VÀI NÉT VỀ GIẢNG DẠY TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Võ Viết Trí[1], Trần Thanh Phong[1]
(1) Trường Đại học Thủ Dầu Một
Ngày nhận bài 27/4/2024; Chấp nhận đăng 20/8/2024
Liên hệ email: phongtt.khtn@tdmu.edu.vn

Tóm tắt

Lý thuyết xác suất thống kê đã hình thành từ rất sớm, nó luôn được áp dụng một cách hiệu quả trong thực tiễn cuộc sống. Việc đưa một phần của lý thuyết xác suất vào chương trình giáo dục phổ thông là một tất yếu. Nhằm mục đích góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học nội dung này của chương trình toán phổ thông trung học, mục đích chính trong bài viết này là, đề xuất một hướng tiếp cận khái niệm xác suất, cụ thể là: biến cố, các phép toán trên các biến cố. Bài viết cung cấp một số kinh nghiệm nhằm nâng cao hiệu quả việc giảng dạy các quy tắc đếm, khái niệm xác suất, biến ngẫu nhiên và các vấn đề liên quan. Bên cạnh tiếp cận khái niệm này bằng các ví dụ cổ điển, chúng tôi sử dụng tiên đề về lý thuyết tập hợp và ánh xạ làm trọng tâm.

Từ khóa: *thống kê, tổ hợp, xác suất*

Abstract

AN OVERVIEW OF TEACHING COMBINATORICS AND PROBABILITY

Probability theory was formed very early and has always been efficiently employed in actual life. Putting probability and statistics theory into the general education program is inevitable. The major goal of the article is to propose an approach to the concept of probability that will help enhance the effectiveness of teaching and studying it in the high school mathematics program. The article discusses some experiences with improving the effectiveness of teaching counting rules, probability concepts, random variables, and related topics. Besides, from using typical examples, we focus on the axioms of set theory and mapping.

1. Đặt vấn đề

Theo ghi nhận của chúng tôi trong những năm gần đây, chương trình giáo dục toán học từ các bậc học đã đề cập đến các khái niệm thống kê, khái niệm xác suất tùy theo từng mức độ khác nhau ở từng bậc học từ thấp đến cao. Việc giảng dạy nội dung này giáo viên gặp không ít khó khăn. Thiết nghĩ rằng, một trong những nguyên nhân khách quan là theo các tài liệu hiện tại chỉ cung cấp một lượng tối thiểu các thuật ngữ về tổ hợp, xác suất và biến ngẫu nhiên nên giáo viên hạn chế về ngôn ngữ toán học để diễn đạt (xem [1, 2]). Bên cạnh đó, môn toán học trong kỳ thi tốt nghiệp lại được đánh giá bằng hình thức trắc nghiệm khách quan, mặc dù nó chỉ là hình thức kiểm tra đánh giá, về lý luận nó không ảnh hưởng đến nội dung dạy học nhưng nó đã làm mất đi sự kiên trì nhẫn nại của người học khi gặp vấn đề đòi hỏi sự chuẩn mực về thuật ngữ và lô gic. Trong khi đó, các thuật ngữ ở lĩnh vực này đòi hỏi một sự rõ ràng và minh bạch đặc biệt là làm toán trên các biến cố. Hơn nữa, vấn đề liên hệ thực tiễn cũng chưa mang tính thuyết phục, chẳng hạn như, khái niệm xác suất luôn đề cập đến không gian mẫu là tập hữu hạn phần tử trong khi đó trên thực tế thì không gian này đa số là vô hạn phần tử.

Trong bài viết này, chúng tôi mạnh dạn đề xuất một cách tiếp cận, theo chúng tôi nó mang lại hiệu quả khi giảng dạy, hoặc bài viết cung cấp thêm cho các bạn cơ sở lý luận để có thể giảng dạy một cách tốt hơn về những nội dung đã đề cập.

Phần tiếp theo, trong Mục 3 chúng tôi nhắc lại một số khái niệm xác suất, xác suất có điều kiện và các quy tắc tính xác suất bằng định nghĩa, bằng các công thức nhân. Chúng tôi đưa ra các ví dụ minh họa, chúng tôi quan tâm đến bàn luận về cơ sở của việc tìm lời giải hơn là trình bày lời giải. Đối với bài toán cụ thể, trên cơ sở tìm kiếm lời giải chúng ta có thể trình bày lời giải một cách ngắn gọn và chính xác.

2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phối hợp các phương pháp nghiên cứu: Thu thập tài liệu, phân tích, tổng hợp để nghiên cứu việc dạy học tổ hợp xác suất trong chương trình Toán học bậc trung học phổ thông. Trên cơ sở đó, chúng tôi bàn luận lựa chọn các hướng tiếp cận giải quyết bài toán xác suất trên cơ sở chính xác khoa học và minh họa bởi bài toán cụ thể.

3. Kết quả thảo luận

Trong mục này chúng tôi bàn luận trên một số khái niệm và trình bày một số ví dụ minh họa.

3.1. *Quy tắc cộng và Quy tắc nhân*

Định nghĩa 3.1. Cho A và B là các tập hữu hạn phần tử, (ta ký hiệu: $|M|$ là số phần tử của tập M). Khi đó

(i) Quy tắc cộng: $|A \cup B| = |A| + |B|$,

(ii) Quy tắc nhân: $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Hai ví dụ dưới đây cho thấy vấn đề thuật ngữ toán học giúp chúng ta diễn đạt phương án một cách rõ ràng từ đó sẽ có hướng giải quyết tốt.

Ví dụ 3.2. Xếp 30 hành khách vào 6 toa tàu (khả năng của tàu: mỗi toa có thể hơn 30 hành khách). Hỏi có bao nhiêu cách bố trí hành khách vào toa tàu.

Hướng dẫn: Nếu ta trình bày một cách tự nhiên theo danh sách hành khách:

TT	Tên hành khách	Toa tàu
1	T_1	a_1
2	T_1	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
30	T_{30}	a_{30}

Từ hoạt động thực tế trên, từ đó vấn đề là trình bày lại lời giải từ bảng hướng dẫn: Chúng ta thấy phương án xếp là $x = (a_1, a_2, ..., a_{30})$ và $a_j \in A := \{1, ..., 6\}$ $(j = 1, ..., 30)$. Như thế theo quy tắc nhân ta có số phương án chính là số phần tử của tập tích $A \times A \times ... \times A$ (6 lần).

Bàn luận: Như vậy thuật ngữ/khái niệm tập tích chính là phương tiện để diễn tả phù hợp trong ngữ cảnh này. Khái niệm này tuy rằng chưa được giới thiệu cách chính thống, nhưng học sinh đã được sử dụng ở các dạng khác đó là: tọa độ của điểm, như vậy ở đây ta có thể mạnh dạn sử dụng thông qua giới thiệu ngắn gọn.

Ví dụ 3.3. Một con chuột điện tử cần phải di chuyển trên mặt phẳng toạ độ Oxy từ gốc toạ độ đến điểm $M(a, b)$ (với a, b là các số nguyên dương). Mỗi bước di chuyển, chuột chỉ được phép bước sang phải (R) hoặc lên trên (U) một bước có độ dài là 1 đơn vị. Hành trình di chuyển của chuột được ghi lại bằng một chuỗi các ký tự, ví dụ chuỗi "RRURURRU" chuột di chuyển để đến điểm $M(5, 3)$. Hỏi có bao nhiêu hành trình có thể chọn cho chuột.

Hướng dẫn: Nhận xét: mỗi một hành trình là một chuỗi có độ dài $a+b$; trong đó a ký tự "R" và b ký tự "U". Nếu đánh số $1, 2, ..., a+b$ để chỉ vị trí của ký tự được ghi trong hành trình thì mỗi một hành trình tương ứng cho một cách chọn a vị trí cho ký tự "R" (chẳng hạn ở ví dụ hành trình là tập hợp $\{1, 2, 4, 6, 7\}$, như vậy một hành trình tương ứng một tổ hợp chập a của tập $a+b$ phần tử. Kết luận: có C^a_{a+b} cách di chuyển.

Bàn luận: Nếu ta không đưa ra mô tả cho một phương án, thì dễ dẫn đến sự nhầm lẫn trong việc xem phương án là chuỗi có chiều dài $a+b$, mỗi vị trí trong chuỗi có 2 khả năng chọn, và kết cục sai lầm là chọn đáp số 2^{a+b}.

3.2. *Không gian biến cố*

Cũng giống như khái niệm tập hợp và phần tử của tập hợp, khái niệm "biến cố" nó mang tính chất nguyên thủy, chỉ được định nghĩa thông qua việc mô tả các tiên đề.

Chúng ta không phân tích sự khác biệt giữa các Sách giáo khoa khi trình bày định nghĩa các khái niệm này. Ở đây chúng tôi đề xuất một cơ sở để xem xét và giải quyết các vấn đề liên quan..

Cho Ω là tập hợp tương ứng với không gian mẫu của phép thử nào đó. Ta xét quy tắc cho tương ứng như sau:

1. biến cố *không thể* tương ứng với tập rỗng;
2. biến cố *tất yếu* tương tứng với tập Ω;
3. biến cố *sơ cấp* được tương ứng với tập con 1 phần tử của Ω (và ta đồng nhất viết $\{w\} \equiv \omega$).
4. *tổng* hai biến cố A và B, ký hiệu là $A+B$ và tương ứng với tập $A \cup B$; tổng quát với $A_1, A_2, ...$, là dãy các biến cố, ta định nghĩa tổng $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ tương ứng với tập $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$;
5. *tích* hai biến cố A và B ký hiệu là AB và tương ứng với tập $A \cap B$, và tổng quát, $A_1, A_2, ...$ là dãy biến cố, ta định nghĩa tích $\Pi_{j=1}^{\infty} A_j$ tương ứng với tập $\cap_{j=1}^{\infty} A_j$.

Ví dụ 3.4. Xét phép thử gieo 1 con xúc sắc: Biến cố sơ cấp $\{\omega_j\}$ là biến cố "xuất hiện mặt có j dấu chấm" ($j = 1, ..., 6$). Như vậy không gian mẫu là

$$\Omega = \{\omega_j : j \in \{1, ..., 6\}\}.$$

Ta có thể đi đến định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.5. Cho một phép thử với không gian mẫu ký hiệu là Ω ta gọi σ-đại số là họ $\mathcal{F}$ các biến cố thỏa:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$ (ở đây, E^c là phần bù của E trong Ω, nghĩa là, $E^c = \Omega \backslash E$).

(iii) Nếu $E_1, E_2, .., \in \mathcal{F}$, $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ thì $E \in \mathcal{F}$.

Với định nghĩa trên ta nhận thấy rằng họ $\mathcal{F}$ ổn định với phép toán lấy phần bù, phép hợp (giao) của một họ đếm được.

Trên cơ sở đó ta có các phép toán "$+$", "$\times$" trên các biến cố (cũng chính là phép hợp, phép giao các tập hợp) và các phép toán này có tính giao hoán, kết hợp và phân phối giữa phép cộng và phép nhân. Nghĩa là,

Nhận xét 3.6. Cho không gian các biến cố $(\Omega, \mathcal{F})$, và $A, B, C \in \mathcal{F}$. Khi đó

(i) $A+B = B+A$; (tính giao hoán của phép cộng)

(ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$; (tính kết hợp)

(iii) $AB = BA$; (tính giao hoán của phép nhân)

(iv) $A(BC) = (AB)C$; (tính kết hợp)

(v) $(A+B)C = AC+BC$. (tính phân phối)

Với cơ sở trên chúng ta củng cố khái niệm:

• Hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi $AB = \emptyset$.

• Hai biến cố A và B đối lập khi và chỉ khi $AB = \emptyset$ và $A + B = \Omega$ (ta ký hiệu đối lập của A là $\overline{A}$).

Bàn luận:

1. Việc sử dụng ngôn ngữ tập hợp mô tả/cũng cố lại khái niệm biến cố hơn nữa, nó làm cho việc diễn tả các phép toán một cách tự nhiên hơn, nó đưa về các phép toán mà học sinh đã khá quen.

2. Với cách trình bày như trên ta thấy việc mô tả không gian mẫu là không duy nhất. Không gian mẫu là rất trừu tượng, nhưng tính bất biến của không gian mẫu là lực lượng các biến cố sơ cấp quyết định.

3. Tuy nhiên, dùng các phép toán "+", "×" nêu không chú ý sẽ có sự nhầm lẫn, chẳng hạn như $A + A = 2A$ hay $A \times A = A^2$.

3.3. *Khái niệm xác suất và công thức tính*

Trong mục này, chúng ta thảo luận về làm thế nào để giảng dạy khái niệm xác suất có hiệu quả?

Trước hết ta điểm qua cách tiếp cận khai niệm xác suất và công thức tính. Tương tự như các khái niệm đo lường khác như là "chiều dài", "diện tích", "thể tích",..., thì khái niệm "xác suất" dùng để đo khả năng xuất hiện một hiện tượng nào đó mà ta gọi chung là "biến cố". Thường thì việc giới thiệu khái niệm xác suất bắt đầu từ ví dụ hàn lâm "gieo con súc xắc" và quy ước khả năng xuất hiện các mặt đều như nhau. Điều này cho phép ta định nghĩa một cách tường minh xác suất của một biến cố.

Định nghĩa 3.7. [2] (Định nghĩa cổ điển) Cho Ω có n biến cố sơ cấp đồng khả năng và A là một biến cố (xem như $A \subset \Omega$). Ta định nghĩa xác suất của A là số

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{3.1}$$

ở đó ký hiệu $|E|$ chỉ số lượng phần tử của E. Đây là một định nghĩa ban đầu, nó có ưu điểm là rõ ràng. Tuy nhiên bản thân nó chưa thật sự là một khái niệm có thể áp dụng trong thực tế cuộc sống được và bản thân nó cũng hàm chứa khái niệm chưa rõ ràng "biến cố sơ cấp đồng khả năng", thêm nữa, khái niệm chỉ có nghĩa khi Ω là tập hữu hạn phần tử. Bỏ qua yếu tố này, với định nghĩa này chúng ta cũng minh họa vài tính chất đặc trưng của xác suất thông qua việc tính toán cụ thể.

Định nghĩa 3.8. [1,2] (Dạng hình học) Với phép thử xác định tương ứng với không gian mẫu Ω. Cho A là biến cố. Khi đó xác suất của A có thể định bởi:

$$p(A) = \frac{\text{số đo miền } A}{\text{số đo miền } \Omega}, \tag{3.2}$$

Trong đó, "số đo miền" là một khái niệm được xác định khi biết cụ thể "miền" (có thể là chiều dài, diện tích, thể tích,...). Ta xem xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 3.9. Hai người bạn hẹn gặp nhau trong khoảng thời gian từ 17 giờ đến 18 giờ, người nào đến trước, sau khi chờ quá 20 phút nếu không có người kia đến thì có thể ra về. Tìm khả năng để họ gặp nhau.

Gọi x, y là thời điểm đến chổ hẹn lần lượt của người thứ nhất và người thứ hai. Khi đó

$$\begin{cases} (x,y) \in [0,60] \times [0,60] \equiv \Omega, & \text{(1 giờ bằng 60 phút)} \\ A = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega : |x-y| \leq 20\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

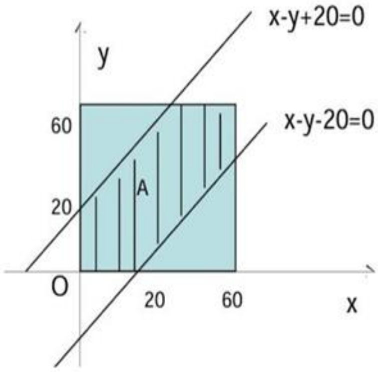
Ta chọn số đo là diện tích, từ (3.3) ta có

$$p(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2}.$$

Định nghĩa 3.10. [2, 3] (Định nghĩa theo tần suất/thống kê) Quan sát một phép thử n lần trong điều kiện như nhau, ta ghi nhận lại số lần xuất hiện biến cố A là n_A. Ta định nghĩa xác suất của A là số

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}. \tag{3.4}$$

Định nghĩa này, không đòi hỏi yếu tố "biến cố sơ cấp đồng khả năng". Tuy nhiên, vẫn còn đòi hỏi yếu tố phần tử của không gian thử (số n). Trên thực tế, đôi khi để thực hiện một phép thử là khá tốn kém về thời gian và tài chính.



Hình 1. *Minh họa cho ví dụ 3.9*

Định nghĩa 3.11. [2] (Định nghĩa theo tiên đề) Cho không gian các biến cố $(\Omega, \mathcal{F})$. Một hàm $p : \mathcal{F} \to [0,1]$ thỏa các tính chất:

(i) $p(\Omega) = 1$;

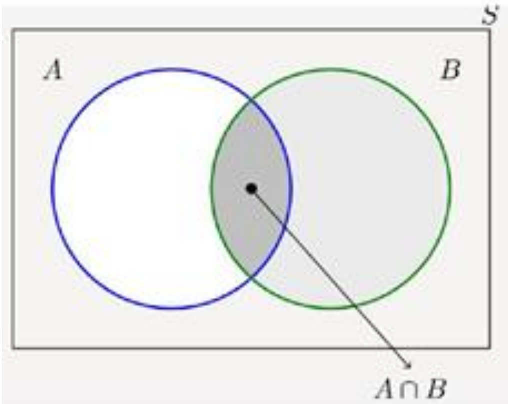
(ii) Với $\{E_j\}_{j=1,2,..}$ là dãy các biến cố độc lập (nghĩa là $E_jE_i = \emptyset$ nếu $j \neq i$) thì ta có $p(\sum_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p(E_j)$.

Nhận xét 3.12. Định nghĩa trên trong phạm vi sử dụng ta có thể xem xét tổng nói trong (ii) là tổng hữu hạn và ta rút ra các kết qua sau:

1. $p(\emptyset) = 0$;

2. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

3. $p(A + B) = p(A) + p(B)$ với $A, B \in \mathcal{F}$ với $AB = \emptyset$ (công thức cộng).



Hình 2. *Minh họa cho công xác suất có điều kiện*

Để định nghĩa xác suất của biến cố A với điều kiện $B \neq \emptyset$, ta xem không gian $(B, \mathcal{F}_B)$, ở đây $\mathcal{F}_B = \{E \cap B : E \in \mathcal{F}\}$ là họ các biến cố trên không gian mẫu $\Omega_B = \Omega \cap B$. Khi đó ta có thể định nghĩa xác suất của A với điều kiện B là

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \tag{3.5}$$

Trong trường hợp A và B độc lập, nghĩa là $p(A|B) = P(A)$, vậy từ (3.5) ta có hai công thức nhân sau:

1. Nếu A và B độc lập thì $p(AB) = p(A)p(B)$.

2. $p(AB) = p(B)p(A|B)$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số ví dụ minh họa cho thấy xác định các biến cố là quyết định trong việc tính xác suất.

Ví dụ 3.13. Có hai lô hàng: Lô (I): gồm 10 sản phẩm tốt 5 sản phẩm xấu, lô (II): Gồm 8 sản phẩm tốt 7 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ở mỗi lô 2 sản phẩm.

(a) Tính xác suất để trong 4 sản phẩm được chọn có: 2 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm xấu.

(b) Giả sử chọn được 2 tốt và 2 xấu. Tính xác suất chọn được 1 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu từ lô (I).

Hướng dẫn: (a): Gọi A_i là biến cố "chọn được i sản phẩm tốt và $2-i$ sản phẩm xấu từ lô (I)" và B_j là biến cố "chọn được j sản phẩm tốt và $2-j$ sản phẩm xấu từ lô (II)" $(i, j = 0; 1; 2)$.

Gọi A là biến cố "Chọn được 2 sản phẩm tốt và hai sản phẩm xấu". Như vậy, ta có ngay sự phân tích $A = A_0B_2 + A_1B_1 + A_2B_0$ và ta thấy ngay từ công thức cộng và công thức nhân:

$$p(A) = p(A_0B_2) + p(A_1B_1) + p(A_2B_0) = p(A_0)p(B_2) + p(A_1)p(B_1) + p(A_2)p(B_0).$$

và yêu cầu thứ nhất của bài toán hoàn toàn được giải quyết bởi

$$p(A_i) = \frac{C_{10}^i C_5^{2-i}}{C_{15}^2}, \qquad p(B_j) = \frac{C_8^j C_7^{2-j}}{C_{15}^2}$$

(b): Gọi B là biến cố "chọn được 1 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu ở lô (I) với điều kiện đã nêu". Ta có ngay yên cầu cần tính là $p(B) = p(A_1|A)$. Với chú ý thực hiện phép toán trên biến cố $A_1A = A_1(A_0B_2 + A_1B_1 + A_2B_0) = A_1B_1$ (vì $A_iA_j = \emptyset$ với $i \neq j$) ta có $p(B) = \frac{p(A_1)p(B_1)}{p(A)}$.

Ví dụ 3.14. Có 2 lô hàng, lô thứ nhất (I) có 7 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu, lô thứ hai (II) có 6 sản phẩm tốt và 4 sản phẩm xấu. Chọn ngẫu nhiên từ lô (I) hai sản phẩm bỏ vào lô thứ hai, sau đó chọn từ lô (II) 3 sản phẩm.

(a) Tính xác suất chọn được 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu.

(b) Giả sử chọn được 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu, tính xác suất lần chọn đầu tiên được 1 sản phẩn tốt và một 1 sản phẩm xấu ở lô (I).

Hướng dẫn: Đặt A và B lần lượt là các biến cố cần tính xác suất trong yêu cầu (a) và yêu cầu (b).

† Đặt A_k là biến cố "Chọn được k sản phẩm tốt và $1-k$ sản phẩm xấu từ lô (I)" $(k \in \{0, 1, 2\})$

† Đặt B_j là biến cố "Chọn được j sản phẩm tốt và $3-j$ sản phẩm xấu từ lô (II)" $(j \in \{0, 1, 2, 3\})$

Ta phân tích mối quan hệ của biến cố và phép toán trên các biến cố và sử dụng các công thức tính xác suất:

$$\Omega = A_0 + A_1 + A_2,$$
$$A = B_2\Omega = B_2A_0 + B_2A_1 + B_2A_2,$$
$$p(A) = p(A_0)p(B_2|A_0) + p(A_1)p(B_2|A_1) + p(A_2)p(B_2|A_2) \text{ và}$$
$$p(B) = p(A_1|A) = \frac{p(A_1A)}{p(A)} = \frac{p(B_2A_1)}{p(A)} = \frac{p(A_1)p(B_2|A_1)}{p(A)}.$$

Yêu cầu hoàn toàn được giải quyết bởi

$$p(A_k) = \frac{C_7^kC_7^{2-k}}{C_{14}^2} \text{và}$$
$$p(B_2|A_k) = \frac{C_{6+k}^2C_{6-k}^1}{C_{12}^3} \;\; (k \in \{0, 1, 2\}).$$

Bàn luận: (i) Ở hai ví dụ trên, chúng ta có thể thấy ngay rằng bài toán được giải quyết bởi nhờ việc xác định biến cố một cách rõ ràng và từ đó sử dụng các phép toán trên các biến cố và cuối cùng là sử dụng công thức cộng và nhân xác suất.
(ii) Với mục đích trang bị lượng tri thức tối thiểu nhưng giải quyết được nhiều vấn đề, nên trong cách giải quyết ở các ví dụ trên chúng tôi không đề cập đến khái niệm hệ đầy đủ và công thức Bayes cũng như công thức xác suất toàn phần.

4. Kết luận

Bài viết cung cấp một hướng tiếp cận khái niệm biến cố thông qua khái niệm tập hợp từ đó xây dựng các phép toán trên các biến cố đồng thời minh họa bằng các ví dụ cụ thể nhằm giúp cho giáo viên nâng cao hiệu quả việc dạy nội dung xác suất và thông kê. Chúng tôi mạnh dạn đề xuất người dạy cần quan tâm đến việc rèn luyện cho người học xác định biến cố và kỹ năng thực hiện các phép toán trên các biến cố, nó là cái gốc để giải quyết các vấn đề về xác suất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Quang Báu (2009). *Lý thuyết xác suất và thống kê toán học*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
[2] Đinh Văn Gắng (1999). *Lý thuyết Xác suất và Thống kê*. NXB Giáo dục.
[3] Trần Ngọc Hội (2009). *Bài giảng Xác suất thống kê*. Trường Đại học Công nghệ Sài Gòn.
[4] Đoàn Quỳnh (chủ biên) (2007). *Đại số và Giải tích 11 (nâng cao)*. NXB Giáo dục.