SỰ GIÃN NỞ TĂNG TỐC CỦA VŨ TRỤ TRONG MÔ HÌNH HẤP DẪN f(R) DẠNG HÀM MŨ - ĐA THỨC

Võ Văn Ớn(1), Trần Trọng Nguyên(2)

(1) Trường Đại học Thủ Dầu Một, (2) Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

TÓM TẮT

Trong bài báo này ngoài phần giới thiệu sơ lược những nét cơ bản về hấp dẫn cải tiến f(R) và động lực học vũ trụ của nó, chúng tôi đưa vào một mô hình hấp dẫn f(R) với lagrangian có dạng lũy thừa – đa thức của độ cong vô hướng R của vũ trụ. Chúng tôi chỉ ra rằng mô hình hấp dẫn này có thể diễn tả một vũ trụ với sự giãn nở tăng tốc vào thời gian sau và lạm phát ở giai đoạn đầu.

Từ khóa: *hấp dẫn cải tiến f(R), dạng lũy thừa-đa thức*

*

1.Mở đầu ngắn về hấp dẫn f(R)

Có nhiều dữ kiện quan sát trong thời gian gần đây chỉ ra rằng vũ trụ chúng ta đang ở trong giai đoạn tăng tốc. Những quan sát này dựa trên sao siêu mới loại IA [1, 2, 3, 4], bức xạ nền vũ trụ [5], sự tạo thành cấu trúc trên giai lớn của vũ trụ [6], gương hấp dẫn yếu [7]. Có ba hướng tiếp cận lí thuyết có thể giải thích được sự tăng tốc này của vũ trụ là [8]: (1) một hằng số vũ trụ Λ, (2) năng lượng tối, và (3) hấp dẫn cải tiến.

Trong hướng tiếp cận đầu tiên, một hằng số vũ trụ Λ đang đẩy vật chất của vũ trụ làm cho nó tăng tốc và xu hướng này đang chiếm ưu thế trong vũ trụ hiện nay, nó đưa vũ trụ vào trong pha de Sitter tăng tốc mãi mãi. Cách tiếp cận này là hướng giải thích rõ ràng nhất cho sự tăng tốc hiện nay, tuy nhiên nó gặp phải hai vấn đề rất nan giải là vấn đề hằng số vũ trụ (sự khác biệt đến 120 bậc độ lớn giữa giá trị lí thuyết và giá trị quan sát của hằng số vũ trụ) [9,10] và vấn đề trùng nhau (sự trùng nhau về bậc độ lớn không thể giải thích được giữa mật độ vật chất thông thường và mật độ năng lượng vacuum vật lí, nó xác định độ lớn của hằng số vũ trụ, ở thời điểm hiện tại dù rằng tốc độ thay đổi của chúng là khác nhau trong quá trình phát triển của vũ trụ) [11]. Do hai vấn đề nan giải này, phần lớn các nhà vật lí loại bỏ hướng tiếp cận hằng số vũ trụ trong sự giải thích sự tăng tốc của vũ trụ.

Ở hướng tiếp cận thứ hai, hầu hết các mô hình đều nằm trong khuôn khổ của thuyết tương đối tổng quát Einstein và đều công nhận rằng có tồn tại một dạng vật chất mới trong vũ trụ gọi là năng lượng tối với phương trình trạng thái $P \approx -\rho$ (p là áp suất, ρ là mật độ năng lượng của vật chất tối), nó đang chiếm ưu thế trong vũ trụ trong giai đoạn vật chất ưu thế hiện nay, năng lượng tối thậm chí có thể là năng lượng "ma" với phương trình trạng thái $P < -\rho$. Nhiều mô hình năng lượng tối đã được nghiên cứu nhưng chưa có mô hình nào hoàn toàn thuyết phục hoặc tránh được vấn đề tinh chỉnh để có thể được xem là một mô hình "đúng".

Với hướng tiếp cận thứ ba, người ta thay đổi thuyết tương đối tổng quát Einstein để có thể giải thích sự tăng tốc của vũ trụ hiện nay nhưng không cần đến hằng số vũ trụ hay năng lượng tối bí ẩn. Ở hướng tiếp cận này, lớp mô hình hấp dẫn cải tiến f(R) được quan tâm đặc biệt. Trong lớp mô hình này, vô hướng Ricci trong mật độ lagrangian Einstein – Hilbert được thay thế bằng một hàm f(R), tác dụng Einstein- Hilbert kinh điển là:

$$S_{E-H} = \frac{1}{2k^2}\int \sqrt{-g}(R-2\Lambda)d^4x + S_M \quad (1)$$

Ở dạng tổng quát, tác dụng của hấp dẫn f(R) trong frame dạng Jordan với trường vật chất được viết:

$$S_J(g_{ab}) = \frac{1}{2k^2}\int f(R)\sqrt{-g}d^4x + S_M \quad (2)$$

Ở đây f(R) là một hàm phi tuyến nào đó của vô hướng Ricci R, S_M là tác dụng của trường vật chất, $k^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$, vô hướng Ricci được định nghĩa như sau:

$$R = g^{ab}R_{ab},\ R_{ab} = R^c_{acb} \quad (3)$$

Tenxơ độ cong là:

$$R^d_{abc} = \partial_c\Gamma^d_{ab} - \partial_b\Gamma^d_{ac} + \Gamma^e_{ab}\Gamma^d_{ce} - \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{be} \quad (4)$$

Khi thay đổi tác dụng này đối với tenxơ metric g^{ab} ta được phương trình trường:

$$f'(R)R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) - \nabla_a\nabla_b f'(R) + g_{ab}\nabla_c\nabla^c f'(R) = \kappa^2 T_{ab} \quad (5)$$

Ở đây: $f'(R) \equiv df(R)/dR$ và $T_{ab} \equiv \delta S_M / \delta g^{ab}$ (6)

Phương trình (5) là phương trình vi phân bậc 4, rất khó giải.

Về nguyên tắc, tenxơ metric có thể gồm nhiều bậc tự do như tenxơ, vectơ, vô hướng có khối lượng hoặc không khối lượng. Trong thuyết hấp dẫn của Einstein chỉ có duy nhất graviton với spin 2 lan truyền, khi chuyển sang hấp dẫn cải tiến f(R) ngoài graviton còn có thêm một mode vô hướng có khối lượng nữa, nó có thể dẫn dắt cho vũ trụ tăng tốc thời gian sau tương tự như một trường vô hướng dẫn dắt cho vũ trụ lạm phát ở giai đoạn vũ trụ rất sớm.

Chúng ta thực hiện một phép biến đổi conformal để chuyển tác dụng (2) từ frame Jordan về frame Einstein: ${}^E g_{ab} = e^{\phi}g_{ab}$ (7), ở đây chúng ta đưa vào một tham số ϕ như là một trường vô hướng mới thỏa $\phi \equiv \ln f'(R)$ (8).

Lúc này tác dụng (2) trong frame Einstein thành:

$$S_E[{}^E g_{ab}] = \frac{1}{2\kappa^2}\int\left({}^E R - \frac{3}{2}\ {}^E g^{ab}\tilde{\nabla}_a\phi\,\tilde{\nabla}_b\phi - V(\phi)\right)\sqrt{-{}^E g}\ dx^4 \quad (9)$$

Ở đây $\tilde{\nabla}_a$ là đạo hàm hiệp biến ứng với tenxơ metric trong frame Einstein, $V(\phi)$ là thế hiệu dụng: $V = \frac{Rf'(R) - f(R)}{f'(R)^2}$ (10)

Thay đổi tác dụng (9) đối với ${}^E g_{ab}$ ta được:

$${}^E R_{ab} - \frac{1}{2}\,{}^E g_{ab}\ {}^E R = 3\tilde{\nabla}_a\phi\,\tilde{\nabla}_b\phi - \frac{1}{2}\,{}^E g_{ab}\left(\frac{3}{2}\,{}^E g^{ab}\tilde{\nabla}_a\phi\tilde{\nabla}_b\phi + V(\phi)\right) \quad (11)$$

Khi thay đổi tác dụng (9) đối với trường ϕ ta được: $\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\phi + \frac{V_\phi}{3} = 0$ (12) ở đây $V_\phi \equiv dV/d\phi$.

Chúng ta xét vũ trụ phẳng, metric FRW có dạng:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (13)$$

Phương trình Friedmann từ (11) là:

$$H^2 = \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{V(\phi)}{6} \quad (14)$$

ở đây $H \equiv \dot{a}/a$ là tham số Hubble và $\dot{a} \equiv da/dt$.

Phương trình chuyển động cho trường vô hướng thu được từ (12) là:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{V_\phi}{3} = 0 \quad (15)$$

2. Động lực học vũ trụ của hấp dẫn f(R)

Trong phần này ta sẽ xét sự phát triển của vũ trụ trong frame Einstein với trường vô hướng tự hấp dẫn. Chúng ta bàn luận cơ chế cho sự bắt đầu, kết thúc lạm phát và sự bắt đầu pha tăng tốc vũ trụ nhờ sự phát triển của thế độ cong. Chúng ta sẽ khảo sát cơ chế này tương tự với cơ chế dẫn dắt lạm phát bởi trường vô hướng trong các mô hình lạm phát. Chúng ta sử dụng gần đúng lăn chậm [12, 13]: $\ddot{\phi} \approx 0, \dot{\phi}^2 << V$ (16)

Lúc này phương trình Friedmann và phương trình chuyển động cho trường vô hướng thành: $H^2 = \dfrac{V}{6}$ (17)

$$3H\phi = -\frac{V_\phi}{3} \quad (18)$$

Phối hợp (17) và (18) cho ta:

$$\phi = \frac{V_\phi}{3\sqrt{6V}} \quad (19)$$

Điều kiện gia tốc của vũ trụ trong các mô hình hấp dẫn f(R) là:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0 \quad (20)$$

Từ đây: $-\dfrac{\dot{H}}{H^2} < 1$ (21)

Lấy vi phân H^2 trong (17) và dùng (18), ta có:

$$\dot{H} = -\frac{1}{18}\frac{V_\phi^2}{V} \quad (22)$$

Lúc này (21) thành: $\left(\dfrac{V_\phi}{V}\right)^2 < 3$ (23)

Bất đẳng thức (23) là điều kiện để có sự giãn nở tăng tốc.

3. Sự giãn nở tăng tốc của vũ trụ trong mô hình hấp dẫn f(R) dạng hàm mũ – đa thức

Chúng tôi khảo sát một lớp mô hình hấp dẫn f(R) với lagrangian có dạng hàm mũ – đa thức của vô hướng Ricci R như sau:

$$f(R) = R + a + \frac{\alpha}{R^m}(1 + bR^2 + cR^3)e^{-\beta R^n} \quad (24)$$

Ở đây α, β là những hằng số dương, m, n, a, b, c là những hằng số.

Trong trường hợp $\alpha = 0$ hay $R \to \infty$ ta trở lại lí thuyết Einstein.

Bài báo này chúng tôi chỉ hạn chế khảo sát trường hợp khi: b=c=1, a=-2Λ, *m=n=1*, $\alpha = 10^{-1}; \beta = 10^{-4}$

Lúc này tác dụng (24) thành:

$$f(R) = R - 2\Lambda + \frac{10^{-1}}{R^m}(1 + R^2 + R^3)e^{-10^{-4}.R} \quad (25)$$

Với lagrangian (25), thế hiệu dụng V(ϕ) từ công thức (10) trong frame Einstein thành:

$$V = \frac{1}{2}\frac{R\left(1 + \frac{1}{10}\frac{(2R+3R^2)e^{\left(\frac{-R}{10000}\right)}}{R} - \frac{1}{10}\frac{(1+R^2+R^3)e^{\left(\frac{-R}{10000}\right)}}{R^2} - \frac{1}{100000}\frac{(1+R^2+R^3)e^{\left(\frac{-R}{10000}\right)}}{R}\right) + 2\Lambda - R - \frac{1}{10}\frac{(1+R^2+R^3)e^{\left(\frac{-R}{10000}\right)}}{R}}{\left(1 + \frac{1}{10}\frac{(2R+3R^2)e^{\left(\frac{-R}{10000}\right)}}{R} - \frac{1}{10}\frac{(1+R^2+R^3)e^{\left(\frac{-R}{10000}\right)}}{R^2} - \frac{1}{100000}\frac{(1+R^2+R^3)e^{\left(\frac{-R}{10000}\right)}}{R}\right)^2} \quad (26)$$

Ở thời gian sau R là rất nhỏ nên từ biểu thức đầy đủ của V(ϕ) trong (26) ta được:

$V(\phi) \sim R^3$ (27)

Trong khi đó:

$e^{\phi} \equiv f'(R) \sim R^{-2}$ nên $V(\phi) \sim e^{-\frac{3}{2}\phi}$ (28)

Ta biết từ lí thuyết lạm phát với trường vô hướng rằng [12, 13]: nếu thế hiệu dụng phụ thuộc vào trường vô hướng theo dạng $V(\phi) \sim \exp(-\frac{2}{p}\phi)$ thì nhân số giai (có thể xem như bán kính vũ trụ) sẽ phụ thuộc vào thời gian theo dạng $a(t) \sim t^{p}$.

Với kết quả của chúng ta ở trên, thì nhân số giai sẽ phụ thuộc vào thời gian theo dạng: $a(t) \sim t^{\frac{4}{3}}$ (29)

Sự phát triển của nhân số giai theo dạng (29) cũng tìm thấy ở nhiều mô hình f(R) khác [14,15].

Điều kiện để có sự tăng tốc của vũ trụ (23) viết lại là:

$$\left(\frac{\frac{d}{d\phi}(e^{-\frac{3}{2}\phi})}{e^{-\frac{3}{2}\phi}} \right)^2 < 3 \quad (30);$$

hay $\frac{9}{4} < 3$: luôn được thỏa.

4. Sự lạm phát của vũ trụ ở giai đoạn rất sớm

Lạm phát vũ trụ xảy ra ở giai đoạn rất sớm của vũ trụ ngay sau khi hình thành, nó bắt đầu từ thời điểm khoảng 10^{-38}s kéo dài đến thời điểm khoảng 10^{-33} s ngay sau big bang, mật độ vật chất trong vũ trụ lúc đó là rất cao $\rho \approx 10^{74} g/cm^3$, độ cong vô hướng R của vũ trụ là rất lớn $R \to \infty$, lúc này tác dụng (25) của mô hình này trở về tác dụng kinh điển trong thuyết hấp dẫn Einstein:

$$f(R) \to R - 2\Lambda \quad (31)$$

$$S_{E-H} = \frac{1}{2k^2}\int \sqrt{-g}(R-2\Lambda)d^4x + S_M \quad (32)$$

Với tác dụng kinh điển (32), vũ trụ sẽ lạm phát trong giai đoạn đầu rất sớm ngay sau khi hình thành theo luật hàm lũy thừa[16, 17]: $a(t) \sim e^{H.t}$ (33)

Ở đây H là tham số Hubble ở giai đoạn rất sớm và là một số dương. Với việc quay về tác dụng kinh điển Einstein – Hilbert, mô hình này cũng cho một vũ trụ lạm phát ở giai đoạn đầu rất sớm.

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đưa vào một mô hình hấp dẫn cải tiến f(R) với lagrangian có dạng một hàm lũy thừa – đa thức của độ cong vô hướng Ricci R; chúng tôi cũng chỉ ra rằng mô hình này cũng thống nhất được pha lạm phát vũ trụ ở giai đoạn đầu tiên với pha tăng tốc trong giai đoạn sau. Dáng điệu phát triển theo thời gian của nhân số giai cùng dạng với dáng điệu thu được ở nhiều mô hình f(R) được quan tâm nhất hiện nay. Các vấn đề khác của một mô hình hấp dẫn f(R) như: ổn định vũ trụ, giới hạn Newton và các kiểm chứng trong hệ Mặt trời, cấu trúc vũ trụ trên giai lớn... sẽ được trình bày trong các nghiên cứu khác.

*

ACCELERATING EXPANSION OF THE UNIVERSE IN A POLYNOMAL- EXPONENTIAL f(R)GRAVITY MODEL

Vo Van On(1), Tran Trong Nguyen(2)

(1) Thu Dau Mot University, (2) University of Natural Sciences – VNU HCM

ABSTRACT

In this paper, we introduce a class of f (R) gravity model with Lagrangian of polynomial – exponential form of scalar curvature R. We have improved that this f(R) *gravity model describes a universe with accelerating expansion at late time and the inflation at early time.*

***Keywords**: f(R) modified gravity, polynomial – exponential form*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. V. Miranda, S. E. Jores, I. Waga and M. Quartin ,*Phys. Rev.Lett.*, **102**, 221101(2009).

[2]. A.G. Reiss et al, *Astron. J.*,**116**,1009 (1998);

[3]. S.Perlmutter et al, *Ap.J.* **517**, 565 (1997);

[4]. S.Perlmutter et al, Bull. *Am. Astron. Soc.*, **29**,1351 (1997)

[5]. C.B. Netterfield et al, *Astrophys.*,**571**, 604 (2002).

[6]. M. Tegmark et al., *Phys. Rev.* ***D*69**, 103501 (2004).

[7]. B. Jain and A. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 141302 (2003).

[8]. S.Nojiri and S.D.Odintsov, [*hep-th*/0601213].

[9]. Sean M. Caroll, [*astro-ph*/0004075].

[10]. Sean M. Caroll, *Liv. Rev. Rel.*, **4**,1 (2001).

[11]. James G. Gilson, *www.maths.qmul.ac.uk/~jgg/gil107.pdf*

[12]. Andrew L. Liddle and David H. Lyth, *Cosmological inflattion and Large Scale Structure*, Cambride University Press (2000).

[13]. A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Ppublishers (1990).

[14]. S.M. Carroll , V. Duvvuri, M.Trodden and M. S. Turner , *Phys. Rev.****D*70**, 043528[2004], [*astro-ph*/0306438].

[15]. S. Capozzielo, S. Carloni, A. Troisi, [*astro-ph*/0303041].

[16]. Andrew R. Liddle [*astro-ph*/9901124].

[17]. Shinji Tsujikawa [*hep-ph*/0304257].