

NHIỀU LOẠN TUYẾN TÍNH CỦA VŨ TRỤ TRONG LỚP MÔ HÌNH HẤP DẪN CẢI TIẾN $f(R)$ DẠNG HÀM MŨ – ĐA THỨC

Võ Văn Ốn⁽¹⁾, Trương Hữu Nghị⁽²⁾

⁽¹⁾Trường Đại học Thủ Dầu Một, ⁽²⁾Trường Đại học Cần Thơ

Ngày nhận bài 27/5/2017; Ngày gửi phản biện: 4/6/2017; Chấp nhận đăng: 24/7/2017

Email: onvv@tdmu.edu.vn

Tóm tắt

Các quan sát thiên văn chứng tỏ rằng vũ trụ trong giai đoạn sớm rất thuần nhất và đẳng hướng, độ không thuần nhất chỉ cỡ 10^{-5} . Tuy nhiên hiện nay vũ trụ được xem là không thuần nhất trên những giai khoảng cách cỡ 100 MegaPasec, sở dĩ có hiện tượng này là do các nhiễu loạn nhỏ ban đầu của vũ trụ được khuếch đại lên nhờ lực hấp dẫn, dẫn đến việc tạo thành cấu trúc vũ trụ như ngày nay. Trong bài báo này, chúng tôi bắt đầu từ hàm mật độ Lagrangian khá tổng quát $f(R, \phi, X)$, nó là một hàm của vô hướng Ricci R , trường vô hướng ϕ và tham số động lực $X = -(\nabla\phi)^2/2$ để rút ra một phương trình xác định nhiễu loạn vật chất của vũ trụ trong giai khoảng cách nhỏ hơn đường chân trời vũ trụ (sub-horizon). Kế đến chúng tôi xét trường hợp hạn chế hơn khi f chỉ phụ thuộc vào R và có dạng hàm mũ – đa thức. Rút ra phương trình cho nhiễu loạn mật độ vật chất và nghiên cứu sự phát triển của các nhiễu loạn của vũ trụ ở gần đúng tuyến tính. Kết quả khảo sát cho thấy mô hình cho đáng điều phát triển của vũ trụ hơi khác với trong mô hình vũ trụ chuẩn Λ CMD, đảm bảo được tỉ số Ψ/Φ nằm trong giới hạn cho phép của thực nghiệm.

Từ khóa: nhiễu loạn tuyến tính, dạng hàm mũ - đa thức, hấp dẫn cải tiến

Abstract

LINEAR PERTURBATION OF UNIVERSE IN MODIFIED GRAVITY $F(R)$ OF POLYNOMIAL -EXPONENTIAL FORM

Astronomical observations show that early universe is very homogeneous and isotropic, with no uniformity is only about 10^{-5} . However, the universe is now considered inhomogeneous on scales of 100 MegaPasec. This phenomenon is caused by the initial small disturbances of the universe that are amplified by gravity, which results in forming the structure of the universe as it is today. In this paper, we begin with a general Lagrangian density $f(R, \phi, X)$, which is a function of the Ricci scalar of R , scalar field ϕ , and a dynamic parameter $X = -(\nabla\phi)^2/2$, derive the equation to describe the disturbance of the matter density of the universe at a distance smaller than sub-horizon of universe. Next we consider the more restrictive case where f only depends on R and has the exponential-polynomial form. We derive the equation for material density disturbance and study its development in linear region. The results show that the model notes the development of disturbance of the universe is slightly different from that in the standard Λ CMD model, it also ensures that the ratio of Φ/Ψ is within the allowable range of the experiment.

1. Mở đầu

Từ năm 1998, các nhà khoa học đã xác nhận rằng vũ trụ chúng ta đang thật sự giãn nở tăng tốc từ nhiều dữ kiện quan sát chính xác [1,2,3,4]. Để giải thích sự giãn nở tăng tốc này, các nhà khoa học đưa ra nhiều hướng tiếp cận, nhưng có thể liệt vào hai lớp chính [5,6]. Lớp đầu tiên, giải thích sự giãn nở này do các trường vô hướng như mô hình quintessence [7] và k-essence [8]. Lớp thứ hai tương ứng với mô hình hấp dẫn cải tiến chẳng hạn như hấp dẫn $f(R)$ [9], lý thuyết tensor - vô hướng [10] và các mô hình braneworld [11]. Trong bài này, chúng tôi khảo sát sự phát triển của nhiều loạn vật chất δ_m và thế hấp dẫn Φ theo thời gian vũ trụ trong một lớp nhỏ hơn của hướng hấp dẫn cải tiến $f(R)$ đó là mô hình $f(R)$ dạng hàm mũ - đa thức. Kết quả thấy rằng có thể dựa vào các dáng điệu phát triển này để chỉ ra sự khác biệt của lớp mô hình hấp dẫn cải tiến với mô hình chuẩn Λ CMD và với mô hình khác hiện nay.

Trong hấp dẫn Einstein ta biết rằng nhiều loạn tuyến tính trên giai nhỏ hơn đường chân trời (sub-horizon) thỏa mãn phương trình: $\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\rho_m\delta_m = 0$ (1)

Ở đây H là tham số Hubble, G là một hằng số hấp dẫn Newton's, ρ_m là mật độ năng lượng của các vật chất phi tương đối tính, và một chấm là đạo hàm theo thời gian t . Trong kỷ nguyên vật chất thống trị này lời giải cho mô hình tăng trưởng $\delta_m \propto a \propto t^{2/3}$ dẫn đến sự hình thành các cấu trúc giai lớn. Trong mô hình hấp dẫn cải tiến mức nhiều loạn là khác nhau do sự hiệu chỉnh của hằng số hấp dẫn cũng như sự thay đổi tiến triển của nền. Trong phạm vi của hấp dẫn $f(R)$, đặc biệt đã có một số công trình gần đây về sự tiến triển của mật độ nhiều loạn trong kỷ nguyên vật chất thống trị và bắt đầu kỷ nguyên năng lượng tối thống trị [12].

Bài báo được bố cục như sau: trong phần 2, chúng tôi dẫn ra các phương trình nền cơ bản gồm các phương trình trường hấp dẫn và phương trình chuyển động của trường vô hướng ϕ ; trong phần 3, chúng tôi dẫn ra các phương trình cho sự phát triển của nhiều loạn vật chất và thế hấp dẫn; phần 4, khảo sát sự phát triển của nhiều loạn vật chất trong hấp dẫn $f(R)$ dạng hàm mũ - đa thức, khảo sát tỉ số $\frac{\Psi}{\Phi}$ và so sánh thực nghiệm.

2. Phương trình nền

Chúng ta bắt đầu với các tác dụng 4 chiều với hàm tác dụng khá tổng quát sau:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(R, \phi, X) + L_m \right] \quad (2)$$

Ở đây g là một định thức của metric $g_{\mu\nu}$, f là một hàm theo tham số vô hướng Ricci R , một trường vô hướng ϕ và một số hạng động lực $X = -\phi^c \phi_{,c} / 2$. L_m là mật độ Lagrange cho vật chất không áp suất, mật độ năng lượng của nó là ρ_m . Chúng ta sử dụng kí hiệu metric $(-, +, +, +)$. Phương trình trường hấp dẫn và phương trình chuyển động của trường ϕ được cho bởi:

$$FG_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (f - RF) g_{\mu\nu} + F_{,\mu;\nu} - \square F g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} f_{,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (3)$$

$$(f_{,X} \phi^c)_{;c} + f_{,\phi} = 0 \quad (4)$$

Ở đây $F = \frac{\partial f}{\partial R}$, $G_{\mu\nu}$ là một tenxơ Einstein, và $T_{\mu\nu}^{(m)}$ là một tenxơ năng - xung lượng của vật chất không áp suất.

Trong vũ trụ phẳng Friedmann-Robertson-Walker (FRW) mêtric với nhân số giai a , chúng ta được các phương trình nền sau đây:

$$3FH^2 = f_{,X}X + \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + \rho_m \quad (5)$$

$$-2F\dot{H} = f_{,X}X + \ddot{F} - H\dot{F} + \rho_m \quad (6)$$

$$\frac{1}{a^3}(a^3\dot{\phi}f_{,\phi}) - f_{,\phi} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (8)$$

Trong đó $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, $R = 6(2H^2 + \dot{H})$, và dấu chấm ký hiệu cho đạo hàm theo thời gian vũ trụ t .

Để đối chiếu phương trình trạng thái của năng lượng tối DE với các quan sát như dữ kiện sao siêu mới loại Ia (SNIa), chúng tôi viết lại phương trình (5) và (6) như sau:

$$3F_0H^2 = \rho_{DE} + \rho_m \quad (9)$$

$$-2F_0\dot{H} = \rho_{DE} + p_{DE} + \rho_m \quad (10)$$

trong đó:

$$\rho_{DE} = \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + f_{,X}X + 3H^2(F_0 - F) \quad (11)$$

$$p_{DE} = \ddot{F} + 2H\dot{F} - \frac{1}{2}(FR - f) - (2\dot{H} + 3H^2)(F_0 - F) \quad (12)$$

Ở đây chỉ số dưới “0” tượng trưng cho giá trị hiện tại. Dễ dàng để chứng minh rằng ρ_{DE} và p_{DE} nó được xác định theo cách này thỏa mãn phương trình bảo toàn năng lượng

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = 0 \quad (13)$$

chúng ta sử dụng phương trình (7). Điều này đã được chứng minh là đúng trong phạm vi tenxơ vô hướng hấp dẫn [22,23] cũng như hấp dẫn $f(R)$ [24]. Chúng ta định nghĩa phương trình trạng thái của DE như sau

$$\omega_{DE} \equiv \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} = -1 + \frac{2f_{,X}X + 2\ddot{F} - 4H\dot{F} - 4\dot{H}(F_0 - F)}{2f_{,X}X + FR - f - 6H\dot{F} + 6H^2(F_0 - F)} \quad (14)$$

Lấy tích phân (8) ta được:

$$\rho_m = 3F_0\Omega_m^{(0)}H_0^2(1+z)^3 \quad (15)$$

trong đó $z = a_0/a - 1$ là dịch chuyển đỏ và $\Omega_m^{(0)}$ là tỷ lệ năng lượng hiện tại của vật chất phi tương đối tính.

Bằng cách sử dụng phương trình (9) và (10) phương trình trạng thái ω_{DE} có thể viết lại:

$$\omega_{DE} = -\frac{3r - (1+z)(dr/dz)}{3r - 3\Omega_m^{(0)}(1+z)^3} \quad (16)$$

trong đó $r = H^2(z)/H_0^2$. Đây là hệ thức giống như hệ thức được rút ra từ hấp dẫn Einstein [6]. Do đó ω_{DE} bị ràng buộc theo cách thường thấy từ quan sát SNIa. Từ phương trình (14), chúng tôi thấy rằng sự phát triển của ω_{DE} phụ thuộc vào mô hình năng lượng tối. Do đó ta có thể kiểm tra tính khả thi của mô hình bằng so sánh ω_{DE} với các quan sát.

3. Các phương trình cho nhiễu loạn vũ trụ

Ta xét các nhiễu loạn mêtric với mêtric nhiễu loạn vô hướng Φ và Ψ trong chuẩn theo chiều dài (longitudinal gauge):

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + a^2(1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (17)$$

Biến đổi Fourier các phương trình nhiễu loạn ta được [26]:

$$3H(\dot{\Psi} - H\Phi) + \frac{k^2}{a^2}\Psi + \frac{1}{2F}\left[-\frac{1}{2}(f_{,\phi}\delta\phi + f_{,X}\delta X) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(f_{,X\phi}\delta\phi + f_{,XX}\delta X) + f_{,X}\dot{\phi}\delta\dot{\phi} - 3H\delta\dot{F}\right. \\ \left.+ \left(3H^2 + 3\dot{H} - \frac{k^2}{a^2}\right)\delta F + 3\dot{F}(\dot{\Psi} + H\Phi) + (3H\dot{F} - f_{,X}\dot{\phi}^2)\Phi + \delta\rho_m\right] = 0 \quad (18)$$

$$f_{,X}\left[\delta\ddot{\phi} + \left(3H + \frac{\dot{f}_{,X}}{f_{,X}}\right)\delta\dot{\phi} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi - \dot{\phi}(3\dot{\Psi} + \dot{\Phi})\right] - 2f_{,\phi}\Phi + \frac{1}{a^3}(\dot{a}^3\dot{\phi}\delta f_{,X}) - \delta f_{,\phi} = 0 \quad (19)$$

$$\Psi = \Phi + \frac{\delta F}{F} \quad (20)$$

$$\delta\dot{\rho}_m + 3H\delta\rho_m = \rho_m\left(3\dot{\Psi} - \frac{k^2}{a}v_m\right) \quad (21)$$

$$\dot{v}_m + Hv_m = \frac{1}{a}\Phi \quad (22)$$

trong đó k là số sóng đồng chuyển động.

Chúng ta định nghĩa nhiễu loạn mật độ vật chất δ_m bất biến gauge như sau:

$$\delta_m \equiv \frac{\delta\rho_m}{\rho_m} + 3Hv \quad (23)$$

trong đó $v \equiv av_m$

Đưa vào phương trình (21) và (22) :

$$\ddot{\delta}_m = -\frac{k^2}{a^2}v + 3(\Psi + Hv) \quad (24)$$

$$\dot{v} = \Phi \quad (25)$$

ta được:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \frac{k^2}{a^2}\Phi = 3\ddot{B} + 6H\dot{B} \quad (26)$$

trong đó $B \equiv \Psi + Hv$.

Theo cách tiếp cận trong [6,22,27], ta sử dụng gần đúng sub-horizon, trong đó các số hạng có đóng góp chủ yếu là các số hạng chứa k^2 và δ_m (hay $\delta\rho_m$) trong phương trình (26) và cũng trong các phương trình (18)-(19). Về cơ bản các số hạng ở vế trái của phương trình (26) cho đóng góp bậc $H^2\Psi$, do đó có thể bỏ qua chúng so với các số hạng $(k^2/a^2)\Phi$ đối với các mode ở sâu bên trong bán kính Hubble ($k^2 \gg a^2 H^2$).

Nếu khối lượng m_ϕ của trường nhiễu loạn $\delta\phi$ lớn hơn số hạng k/a ta cần phải tính đến số hạng khối lượng này. Biểu thức của m_ϕ được rút ra trong [20] được liên kết với các mô hình năng lượng tối với mật độ Lagrangian $p(\phi, X)$. Trong hấp dẫn Einstein với trường vô hướng chuẩn, bình phương khối lượng được cho bởi $m_\phi^2 = V_{,\phi\phi} - 2\dot{\phi}^2$. Khi trường ϕ tương

ứng với năng lượng tối, các số hạng $V_{,\phi\phi}$ và $2\dot{\phi}^2$ có bậc H^2 hay nhỏ hơn, nó cho $|m_\phi| \leq H$. Nghĩa là gần đúng bỏ qua số hạng khối lượng m_ϕ đối với k/a là hợp lý trong mô hình như vậy. Có vài mô hình đặc biệt $f(R, \phi, X)$ vi phạm điều kiện $|m_\phi| \ll k/a$ nhưng chúng ta không xét các trường hợp như vậy. Do vậy phương trình (26) được cho gần đúng bởi :

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m + \frac{k^2}{a^2}\Phi \approx 0 \quad (27)$$

tiếp theo là biểu diễn Φ theo δ_m .

Từ phương trình (18) ta tìm được:

$$\frac{k^2}{a^2}\Psi \approx \frac{1}{2F}\left(\frac{k^2}{a^2}\delta F - \delta\rho_m\right) \quad (28)$$

Khử số hạng Ψ khi dùng (20), ta được:

$$\frac{k^2}{a^2}\Phi \approx -\frac{k^2}{2a^2}\frac{\delta F}{F} - \frac{1}{2F}\delta\rho_m \quad (29)$$

Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ nghiên cứu các trường hợp trong đó F phụ thuộc vào ϕ và R mà không vào X , tức là:

$$F = F(\phi, R) \quad (30)$$

Trường hợp này bao gồm hầu hết các mô hình năng lượng tối đã được đề xuất hiện nay.

Kế đến, δF trong phương trình (29) được cho bởi:

$$\delta F = F_{,\phi}\delta\phi + F_{,R}\delta R \quad (31)$$

Trong đó:

$$\delta R = 2\left[-3(\ddot{\Psi} + 4H\dot{\Psi} + H\dot{\Phi} + \dot{H}\Phi + 4H^2\Phi) + \left(\frac{k^2}{a^2} - 3\dot{H}\right)\Phi - 2\frac{k^2}{a^2}\Psi\right] \approx -2\frac{k^2}{a^2}\left(\Phi + 2\frac{\delta F}{F}\right) \quad (32)$$

Một lần nữa chúng ta sử dụng sự kiện rằng năm số hạng đầu tiên trong phương trình (32) có bậc $H^2\Phi$, $H^2\Psi$ hoặc nhỏ hơn. Đưa phương trình (31) vào phương trình (32) chúng ta được:

$$\delta R \approx -\frac{2k^2}{a^2}\frac{\Phi + \frac{2F_{,\phi}}{F}\delta\phi}{1 + 4\frac{k^2}{a^2}\frac{F_{,R}}{F}} \quad (33)$$

Chú ý rằng δR gộp trong số hạng k^2/a^2 , đại lượng δf :

$$\delta f = f_{,\phi}\delta\phi + f_{,X}\delta X + f_{,R}\delta R \approx F\delta R \quad (34)$$

Từ phương trình (19) ta thấy :

$$f_{,X}\frac{k^2}{a^2}\delta\phi - F_{,\phi}\delta R \approx 0 \quad (35)$$

dẫn đến hệ thức sau:

$$\delta\phi \approx -2\frac{F_{,\phi}}{F_{,X}\left(1 + 4\frac{k^2}{a^2}\frac{F_{,R}}{F}\right) + \frac{4F_{,\phi}^2}{F}}\Phi \quad (36)$$

Đưa này vào phương trình (32), ta được:

$$\delta R \approx -\frac{2k^2}{a^2} \frac{f_{,X}}{f_{,X} \left(1 + 4 \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} \right) + \frac{4F_{,\phi}^2}{F}} \Phi \quad (37)$$

Từ phương trình (29), (31), (36) và (37) thế hấp dẫn Φ được biểu diễn như sau:

$$\frac{k^2}{a^2} \Phi \approx -\frac{\rho_m}{2F} \frac{f_{,X} + 4 \left(f_{,X} \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)}{f_{,X} + 3 \left(f_{,X} \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)} \delta_m \quad (38)$$

ở đây ta đã sử dụng $\delta_m \approx \delta \rho_m / \rho_m$ ở gần đúng sub-horizon. Do đó phương trình (27) của trường nhiễu loạn vật chất thành:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}} \rho_m \delta_m \approx 0 \quad (39)$$

ở đây hằng số hấp dẫn hiệu dụng được cho bởi:

$$G_{\text{eff}} \approx \frac{1}{1 + f_R} \cdot \frac{f_{,X} + 4 \left(f_{,X} \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)}{f_{,X} + 3 \left(f_{,X} \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{F_{,\phi}^2}{F} \right)} \cdot G \quad (40)$$

Từ (38) thế hấp dẫn là :

$$\Phi \approx -4\pi G_{\text{eff}} \frac{a^2}{k^2} \rho_m \delta_m \quad (41)$$

nó tương ứng với một phương trình Poisson trong không gian Fourier. Trong phần tiếp theo chúng ta sử dụng dấu bằng chứ không phải là xấp xỉ bằng nhau ($\approx$) cho các kết quả thu được trong gần đúng sub-horizon.

Chúng ta cũng định nghĩa tham số η , nó đặc trưng cho mức độ dị hướng :

$$\eta = \frac{\Phi - \Psi}{\Psi} \quad (42)$$

Sử dụng (20), (36) và (37), ta được:

$$\eta = \frac{2f_{,X} \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{2F_{,\phi}^2}{F}}{f_{,X} \left(1 + 2 \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} \right) + \frac{2F_{,\phi}^2}{F}} \quad (43)$$

Thế hấp dẫn Φ thỏa:

$$\frac{k^2}{a^2} \Psi = -\frac{\rho_m}{2F} \frac{f_{,X} + 2 \left(f_{,X} \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{2F_{,\phi}^2}{F} \right)}{f_{,X} + 3 \left(f_{,X} \frac{k^2}{a^2} \frac{F_{,R}}{F} + \frac{2F_{,\phi}^2}{F} \right)} \delta_m \quad (44)$$

Chúng ta biến đổi phương trình (39) sang dạng sau:

$$\delta_m'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \omega_{eff} \right) \delta_m' - \frac{3}{2} \left[\frac{1 + 4 \frac{k^2}{a^2 R} m}{1 + 3 \frac{k^2}{a^2 R} m} G \right] \Omega_m \delta_m = 0 \quad (45)$$

trong đó $N = \ln a$; dấu $' = \frac{d}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt}$ và

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2}{3} \frac{H'}{H} \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{3FH^2} \quad \xi = \frac{k^2}{a^2 R} m; ; m = \frac{Rf_{RR}}{f_R} \quad (46)$$

Nếu $\omega_{eff}, \Omega_m, \xi, G$ là hằng số.

Ta tìm nghiệm của phương trình (45) dưới dạng sau:

$$\delta_m = c_+ a^{n_+} + c_- a^{n_-} \quad (47)$$

với:

$$n_{\pm} = \frac{-1 - 3\xi + 3\omega_{eff} + 9\xi\omega_{eff} \pm \sqrt{(1 + 3\xi - 3\omega_{eff} - 9\xi\omega_{eff})^2 - 4(2 + 6\xi)(-3G\Omega_m - 12G\xi\Omega_m)}}{2(2 + 6\xi)} \quad (48)$$

c_+, c_- là các hằng số.

Số hạng đầu trong (47) là nghiệm trong mode tăng trưởng, số hạng thứ hai là mode suy giảm. Nhiễu loạn vũ trụ phát triển theo mode tăng trưởng:

$$\delta_m = c_+ a^{n_+} \quad (49)$$

4. Hấp dẫn $f(R)$

Trong phần này chúng ta nghiên cứu phát triển của nhiễu loạn vật chất trong lý thuyết hấp dẫn cải tiến, trong đó f chỉ là hàm của R . Trong trường hợp này, hằng số hấp dẫn hiệu dụng có dạng đơn giản hơn:

$$G_{eff} = \frac{1}{1 + f_R} \frac{1 + 4 \frac{k^2}{a^2 R} m}{1 + 3 \frac{k^2}{a^2 R} m} G \quad (50)$$

$$\text{Với: } m = \frac{Rf_{RR}}{f_R} \quad (51)$$

$$\text{và tham số dị hướng } \eta = \frac{2 \frac{k^2}{a^2 R} m}{1 + 2 \frac{k^2}{a^2 R} m} \quad (52)$$

Trong mô hình hấp dẫn $f(R)$ dạng hàm mũ đa thức, ta có

$$f(R) = R + a + \frac{\alpha}{R^m} (1 + bR^2 + cR^3) e^{-\beta R^n} \quad (53)$$

Với $\alpha > 0, \beta > 0; m = n = 1; a = -2\Lambda; b = c = 1$

$$\text{Khai triển Euler lấy gần đúng: } e^{-\beta R} = 1 - \beta R \quad (54)$$

$$\text{Ta có : } f_R = \alpha \left[-3\beta R^2 - \frac{1}{R^2} - 2(\beta - 1)R + 1 \right] + 1 \quad (55)$$

$$f_{RR} = 2\alpha \left[-\beta + \frac{1}{R^3} - 3\beta R + 1 \right] \quad (56)$$

$$m = \frac{Rf_{RR}}{f_R} = \frac{2\alpha [3\beta R^4 + (\beta - 1)R^3 - 1]}{\alpha + 3\beta R^4 + 2\alpha(\beta - 1)R^3 - (\alpha + 1)R^2} \quad (57)$$

Chúng ta xét hai trường hợp giới hạn sau đây:

4.1 Trường hợp $\frac{k^2}{a^2 R} m \gg 1$

Trong trường hợp này $G_{\text{eff}} \approx \frac{1}{1+f_R} G \cdot \frac{4}{3}$, mô hình tương ứng với lý thuyết Brans –

Dicke với $\omega_{BD} = 0$ [30]. Tham số dị hướng $\eta \cong 1$. Điều kiện $\frac{k^2}{a^2 R} m \gg 1$ có thể thực hiện

được thực tế do điều kiện $\frac{k^2}{a^2 R} \gg 1$ thực hiện được trong gần đúng sub-horizon $k \gg aH$ miễn là m không rất nhỏ hơn đơn vị. Lúc này phương trình (45) trở thành:

$$\delta_m'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \omega_{\text{eff}} \right) \delta_m' - 2G\Omega_m \delta_m = 0 \quad (58)$$

Trong kỉ nguyên vật chất chiếm ưu thế $\omega_{\text{eff}} = -\frac{m}{1+m}$ và $\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$

Chọn nghiệm trong dạng (47) :

$$\delta_m = c_+ a^{n_+} + c_- a^{n_-} \quad (59)$$

Giải (58) ta có nghiệm sau:

$$n_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{-(m+1)^2 [16(8m^2 + 3m - 2) - (4m+1)^2] + 4m^2 + 5m + 1}}{4(m+1)^2} \quad (60)$$

Nghiệm trong mode tăng trưởng là:

Với $\delta_m = c_+ a^{n_+}$

$$n_+ = \frac{\sqrt{-(m+1)^2 [16(8m^2 + 3m - 2) - (4m+1)^2] + 4m^2 + 5m + 1}}{4(m+1)^2} \quad (61)$$

Chú ý là trong giai đoạn vật chất chiếm ưu thế của vũ trụ, nhân số giai $a(t)$ phụ thuộc vào thời gian theo dạng :

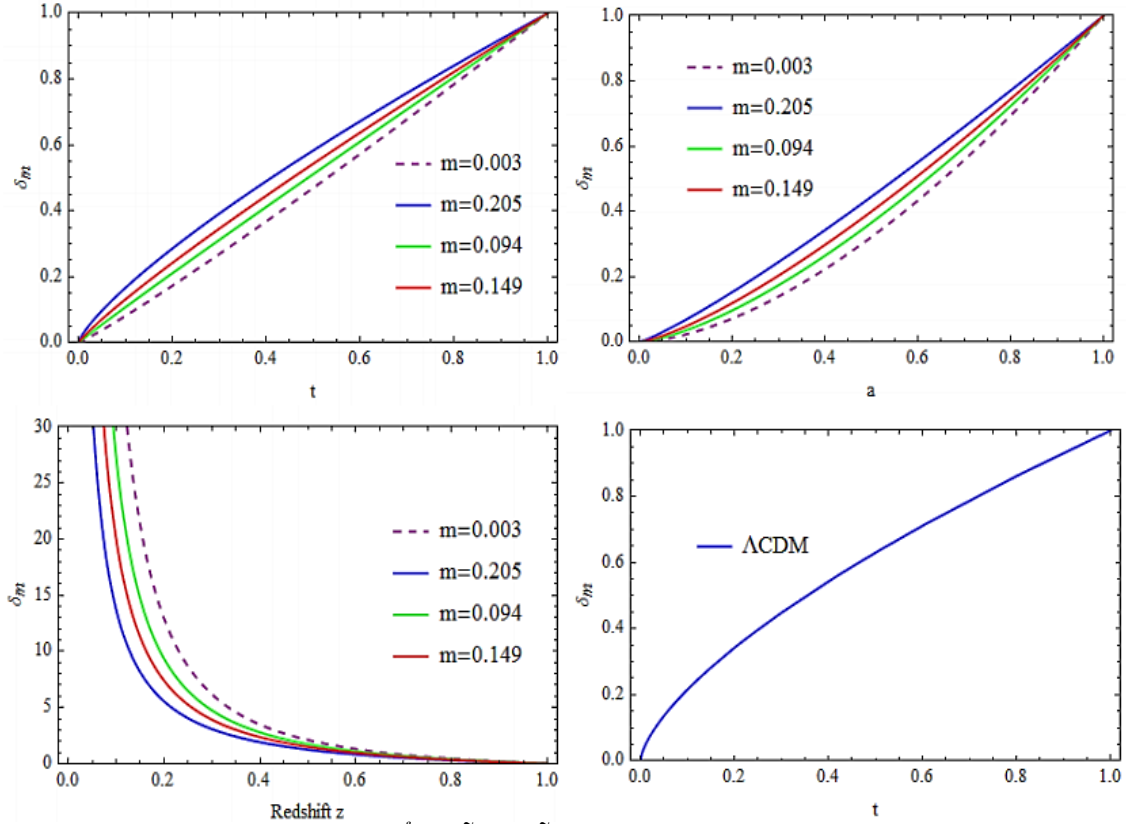
$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (62)$$

nên mode tăng trưởng của nhiễu loạn vật chất phụ thuộc thời gian trong dạng:

$$\delta_m = c_+ t^{\frac{2}{3}n_+} \quad (63)$$

Với n - theo biểu thức (61)

Hình 1 là đường biểu diễn mode tăng trưởng của nhiễu loạn vũ trụ theo nhân số giai a và tham số dịch chuyển đỏ vũ trụ z với lưu ý rằng $z = a_0 / a - 1$



Hình 1. Các đường biểu diễn nhiễu loạn vũ trụ với các giá trị m khác nhau, so sánh với mô hình Λ CDM.

4.2. Trường hợp $\frac{k^2}{a^2 R} m \ll 1$

Điều kiện này được thỏa trên những giai mà quanh nó cấu trúc giai lớn của vũ trụ được tạo thành. Trong trường hợp này

$$G_{eff} \approx \frac{1}{1+f_R} \left(1 + \frac{k^2}{a^2 R} m\right) G \text{ và } \eta \approx 2 \frac{k^2}{a^2 R} m$$

$$\text{Phương trình (45) viết lại: } \delta_m'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \omega_{eff}\right) \delta_m' - \frac{3}{2} \Omega_m G \delta_m = 0 \quad (64)$$

Giải pt (64) ta được

$$\delta_m = c_+ a^{\frac{1}{4} \left[-\sqrt{\frac{(4m+1)^2 - 12G(8m^2+3m-2)}{(m+1)^2}} - \frac{3m}{m+1} - 1 \right]} + c_- a^{\frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{(4m+1)^2 - 12G(8m^2+3m-2)}{(m+1)^2}} - \frac{3m}{m+1} - 1 \right]} \quad (65)$$

Nghiệm trong mode tăng trưởng là:

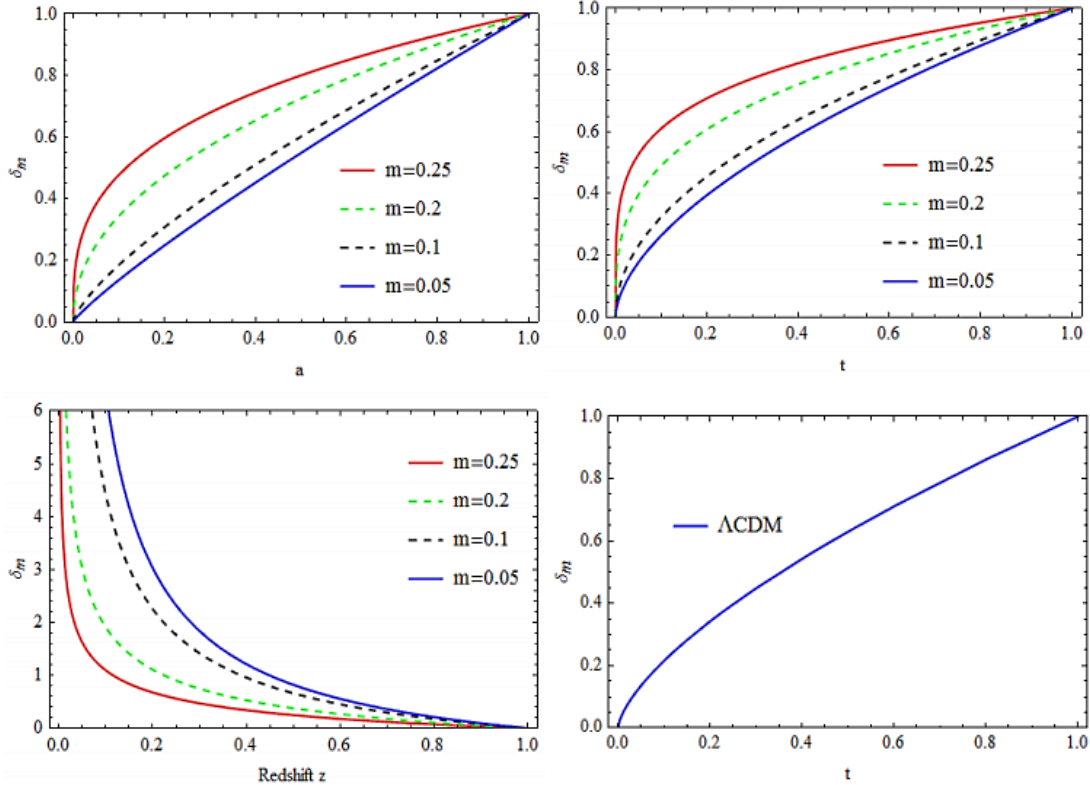
$$\delta_m = a^{\frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{(4m+1)^2 - 12G(8m^2+3m-2)}{(m+1)^2}} - \frac{3m}{m+1} - 1 \right]} \quad (66)$$

Nghiệm mode tăng trưởng phụ thuộc thời gian vũ trụ là:

$$\delta_m = t^{\frac{1}{6} \left[\sqrt{\frac{(4m+1)^2 - 12G(8m^2+3m-2)}{(m+1)^2}} - \frac{3m}{m+1} - 1 \right]} \quad (67)$$

Ta có khi $m=0 \rightarrow \delta_m \propto a \propto t^{2/3}$

Đồ thị biểu diễn nhiễu loạn vũ trụ trong mode tăng trưởng như sau:



Hình 2. Các đường biểu diễn nhiễu loạn vũ trụ với các giá trị m khác nhau và trong mô hình Λ CDM.

Đường biểu diễn sự phát triển của nhiễu loạn vật chất trong các hình 1 và hình 2 càng giống với trong mô hình vũ trụ chuẩn khi tham số m của mô hình càng gần tới không.

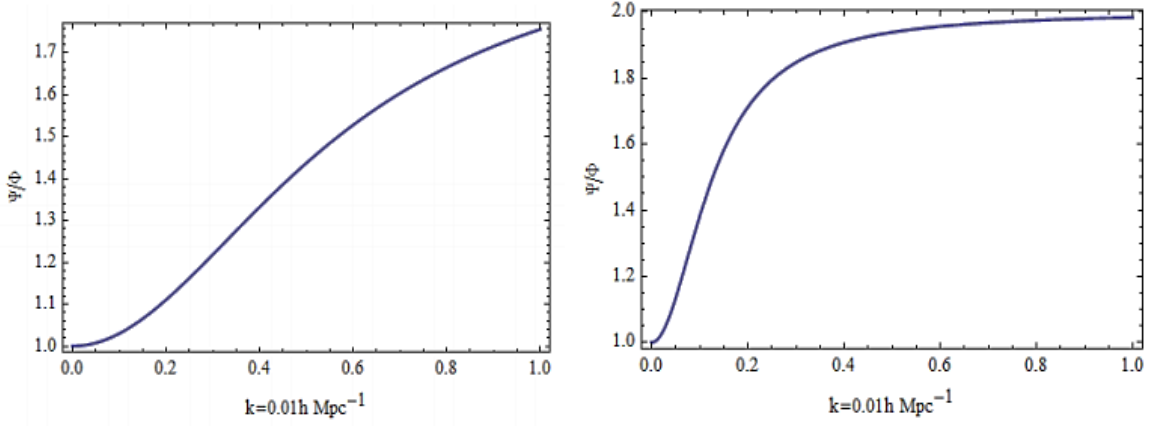
4.3 Đánh giá lại các hằng số

Trong phần này chúng ta sẽ đánh giá lại tỷ số hằng số hấp dẫn vũ trụ hiệu dụng với hằng số hấp dẫn Newton G_{eff}/G , tỷ số hàm vô hướng $\frac{\Psi}{\Phi}$ trong mô hình này và so sánh với các ràng buộc từ thực nghiệm.

4.3.1 Tỷ số $\frac{\Psi}{\Phi}$

$$\text{Ta có: } \frac{\Psi}{\Phi} = \frac{1 + 4 \frac{k^2}{a^2} \frac{f_{RR}}{1 + f_R}}{1 + 2 \frac{k^2}{a^2} \frac{f_{RR}}{1 + f_R}} \quad (68)$$

Trong đó $k = 0.01 h \text{Mpc}^{-1}$; $h = 0.72 \pm 0.08$.



Hình 3: Đồ thị tỷ số $\frac{\Psi}{\Phi}$

So sánh với thực nghiệm: ở giai đoạn hiện nay, độ cong vũ trụ rất nhỏ cỡ $R \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ nên ta có trong mô hình mũ – đa thức:

$$f_R \sim -\frac{\alpha}{R^2}, f_{RR} \sim \frac{2\alpha}{R^3}, \frac{f_{RR}}{1+f_R} \approx R^{-1} \quad (69)$$

Vì vậy: $\frac{\Psi}{\Phi} \approx 2$

Giá trị thực nghiệm khi $k = 0.01h/\text{Mpc}$ và $a = 1$ [36]: $1 < \frac{\Psi}{\Phi} \leq 1.996$

5. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã nhận được phương trình diễn tả sự phát triển của nhiễu loạn vật chất với hằng số hấp dẫn hiệu dụng đối với mật độ Lagrangian $f(R, \phi, X)$ khá tổng quát. Khi xét cho trường hợp hẹp hơn f chỉ phụ thuộc vào độ cong vô hướng R trong dạng hàm mũ – đa thức chúng tôi thu được các phương trình ở dạng đơn giản hơn. Sự phát triển của nhiễu loạn mật độ vật chất và hằng số hấp dẫn cũng được đánh giá và so sánh với mô hình vũ trụ chuẩn hiện nay và thực nghiệm quan sát.

Kết quả khá phù hợp của mô hình với thực nghiệm cho thấy mô hình cũng là một ứng viên tiềm năng cho việc tìm hiểu vũ trụ hiện nay. Các nghiên cứu chi tiết ở đánh giá tỉ số $\frac{\Psi}{\Phi}$, cho thấy nó phù hợp với thực nghiệm quan sát, còn đối với tỉ số $\frac{G_{eff}}{G_N}$ cần có một sự khảo sát chi tiết hơn trong các nghiên cứu tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [2] P. Astier *et al.*, *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006); A. G. Riess *et al.*, arXiv:astro-ph/0611572; W. M. WoodVasey *et al.*, arXiv:astro-ph/0701041.
- [3] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [4] D. J. Eisenstein *et al.* [SDSS Collaboration], *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005).

- [5] V. Sahni and A. A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 373 (2000).
- [6] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006).
- [7] Y. Fujii, Phys. Rev. D **26**, 2580 (1982).
- [8] T. Chiba, T. Okabe and M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **62**, 023511 (2000).
- [9] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1969 (2003).
- [10] J. P. Uzan, Phys. Rev. D **59**, 123510 (1999).
- [11] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000).
- [12] P. Zhang, Phys. Rev. D **73**, 123504 (2006).
- [13] L. Amendola, M. Kunz and D. Sapone, arXiv:0704.2421 [astro-ph].
- [14] R. Cooray and D. Huterer, Astrophys. J. **513**, 95 (1999).
- [15] M. Tegmark et al. [SDSS Collaboration], Phys. Rev. D **69**, 103501 (2004).
- [16] Shirata, T. Shiromizu, N. Yoshida and Y. Suto, Phys. Rev. D **71**, 064030 (2005).
- [17] O. Lahav, P. B. Lilje, J. R. Primack and M. J. Rees, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **251**, 128 (1991).
- [18] L. M. Wang and P. J. Steinhardt, Astrophys. J. **508**, 483 (1998).
- [19] E. V. Linder, Phys. Rev. D **72**, 043529 (2005).
- [20] L. Amendola, Phys. Rev. Lett. **93**, 181102 (2004).
- [21] L. Amendola, Phys. Rev. D **62**, 043511 (2000).
- [22] G. Esposito-Farese and D. Polarski, Phys. Rev. D **63**, 063504 (2001).
- [23] R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet and A. A. Starobinsky, JCAP **0609**, 016 (2006).
- [24] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **75**, 083504 (2007).
- [25] S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **72**, 083512 (2005).
- [26] J. c. Hwang and H. Noh, Phys. Rev. D **71**, 063536 (2005).
- [27] B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85**, 2236 (2000).
- [28] C. Schimd, J. P. Uzan and A. Riazuelo, Phys. Rev. D **71**, 083512 (2005).
- [29] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
- [30] T. Damour and K. Nordtvedt, Phys. Rev. D **48**, 3436 (1993).
- [31] B. Bertotti, L. Iess and P. Tortora, Nature **425**, 374 (2003).
- [32] L. Amendola, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. Lett. **98**, 131302 (2007).
- [33] T. Chiba, Phys. Lett. B **575**, 1 (2003).
- [34] L. Amendola and S. Tsujikawa, arXiv:0705.0396 [astroph].
- [35] G. J. Olmo, Phys. Rev. Lett. **95**, 261102 (2005).
- [36] Wei-Ting Lin; Je-An Gu and Pisin Chen, arXiv: 1009. 3488, (2010).