

GIẢI GẦN ĐÚNG BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH NỬA VÔ HẠN SỬ DỤNG LƯỚI TỰA ĐỀU

Trần Đình Hùng*, Bùi Thế Hùng, Lê Quang Ninh
Trường Đại học Sư Phạm – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Một số nhà toán học Nga gần đây đã đề xuất một cách xử lý mới, sử dụng lưới tính toán tựa đều giải các bài toán trong miền vô hạn. Phương pháp này dựa trên việc biến đổi tọa độ, ánh xạ miền không giới nội tới miền giới nội. Theo lưới tựa đều, điều kiện biên tại vô cùng được xử lý một cách dễ dàng. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng lưới tính toán tựa đều giải gần đúng bài toán truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn. Chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ minh họa cho hiệu quả của phương pháp.

Từ khóa: Toán ứng dụng; bài toán truyền nhiệt; miền vô hạn; lưới tựa đều.

Ngày nhận bài: 10/4/2019; Ngày hoàn thiện: 21/5/2019; Ngày duyệt đăng: 29/5/2019

NUMERICAL METHOD FOR THE PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY IN A SEMI-INFINITE BAR USING QUASI-UNIFORM GRIDS

Tran Dinh Hung*, Bui The Hung, Le Quang Ninh
University of Education - TNU

ABSTRACT

Recently, a few of Russian mathematicians proposed a new method, using quasi-uniform grids for problems in unbounded domains. This method is based on the coordinate transforms, which map unbounded domains into bounded ones. Due to this grid the condition on infinity is easily taken into account. In this paper, we will use quasi-uniform grids for solving the problem of heat conductivity in a semi-infinite bar. Some examples demonstrate the applicability of the proposed method.

Keywords: Applied mathematics; the problem of heat conductivity; unbounded domains, quasi-uniform grids.

Received: 10/4/2019; Revised: 21/5/2019; Approved: 29/5/2019

* Corresponding author: Email: trandinhhung@dhsptn.edu.vn

1. Giới thiệu

Nhiều bài toán vật lý, cơ học, môi trường, ... được đặt ra trong các miền không giới nội (hay còn gọi là các miền vô hạn). Để giải quyết các bài toán này, nhiều nhà toán học sử dụng phương pháp điều kiện biên nhân tạo [1], [2]. Tuy nhiên để áp dụng được thì trong các giả thiết của bài toán gốc, hàm về phải và các điều kiện biên ban đầu phải có giá compact trong không gian.

Gần đây một số nhà toán học Nga đã đề xuất một cách xử lý mới các bài toán trong miền vô hạn, đó là sử dụng lưới tính toán tựa đều. Phương pháp này dựa trên việc biến đổi tọa độ, ánh xạ miền không giới nội tới miền giới nội. Một lưới đều trong miền bị chặn ánh xạ tới một lưới không đều được gọi là lưới tựa đều trong miền vô hạn. Theo lưới tựa đều, điều kiện biên tại vô cùng được xử lý một cách dễ dàng. Ý tưởng của phương pháp này xuất hiện từ những năm bảy mươi của thế kỷ trước nhưng việc sử dụng nó để giải các bài toán trong miền không giới nội chỉ mới cách đây hơn một thập kỷ. Fazio và Jannelli [3] xét lược đồ sai phân hữu hạn trên lưới tựa đều, xác định bởi việc biến đổi tọa độ, áp dụng cho nghiệm số của bài toán giá trị biên trên các khoảng vô hạn. Các tác giả áp dụng phương pháp trên cho hai bài toán kiểm tra. Bài toán đầu tiên là mô hình Falkner-Skan của lý thuyết lớp biên. Bài toán thứ hai là một vấn đề được quan tâm trong kỹ thuật nền móng. Ngoài ra, các tác giả đã áp dụng ngoại suy Richardson để cải tiến độ chính xác của các kết quả thu được. Đồng thời chỉ ra một cách mở rộng bài toán trên toàn bộ trục thực. Koleva [3] sử dụng lưới tựa đều cho các bài toán truyền nhiệt 1D và 2D với các điều kiện biên phi tuyến đơn giản. Thuật toán được đề xuất hiệu quả đối với nghiệm bùng nổ do sử dụng bước thời gian giảm, tương ứng với sự phát triển của nghiệm.

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng lưới tính toán tựa đều giải gần đúng bài toán truyền nhiệt một chiều trong thanh nửa vô

hạn. Chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ để minh họa cho hiệu quả của phương pháp.

2. Lưới tựa đều

Cho $x(\xi)$ là hàm trơn, đơn điệu chặt của biến $\xi \in [0,1]$. Lưới không đều

$$\omega_N = \{x_i = x(i/N), i = 0, 1, \dots, N\},$$

với $x(0) = 0, x(1) = +\infty$ được gọi là lưới tựa đều trên $[0, +\infty]$. Trong đó, điểm cuối x_N của lưới được đặt tại vô cùng.

Để xây dựng các lưới tựa đều, người ta thường xét 3 hàm

$$x(\xi) = -c \ln(1 - \xi),$$

$$x(\xi) = c \tan \frac{\pi \xi}{2},$$

$$x(\xi) = c \frac{\xi}{1 - \xi}.$$

Khi đó ta được 3 lưới tựa đều tương ứng:

Lưới logarithm:

$$\omega_N = \{x_i = -c \ln(1 - \frac{i}{N}), i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Lưới tangent:

$$\omega_N = \{x_i = c \tan \frac{\pi i}{2N}, i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Lưới hyperbol:

$$\omega_N = \{x_i = c \frac{i}{N - i}, i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Trong đó $c > 0$ là tham số điều khiển. Việc chọn tham số $c > 0$ dựa trên một số nhận xét: khoảng hai phần ba số điểm lưới nằm trong khoảng $(0, c)$ trên lưới logarithm, một nửa số điểm lưới nằm trong khoảng $(0, c)$ trên lưới tangent và hyperbol, hơn nữa:

trên lưới logarithm: $x_{N-1} = c \ln N$,

trên lưới tangent: $x_{N-1} = c / \tan(\frac{\pi}{2N})$,

trên lưới hyperbol: $x_{N-1} \approx cN$.

Đối với 3 ánh xạ, các lưới tương đương trong x_i không đều và tăng nhanh khi $c \ll x_i$. Lưới logarithm cho nghiệm tốt nhất gần 0, lưới tangent và hyperbol cho nghiệm tốt hơn khi

$x_i \rightarrow \infty$, lưới tangent cho nghiệm tốt hơn lưới hyperbol ở gần c . Dễ dàng suy ra được:

$$-c \ln(1 - \xi) < c \frac{\xi}{1 - \xi}, \xi \in (0, 1),$$

$$-c \ln(1 - \xi) < c \tan \frac{\pi \xi}{2}, \xi \in (0, 1),$$

$$c \tan \frac{\pi \xi}{2} \geq c \frac{\xi}{1 - \xi}, \xi \in [0, \frac{1}{2}],$$

$$c \tan \frac{\pi \xi}{2} < c \frac{\xi}{1 - \xi}, \xi \in (\frac{1}{2}, 1).$$

Khoảng cuối $[x_{N_q-1}, x_{N_q}]$ vô hạn nhưng điểm $x_{N-1/2}$ hữu hạn vì các nút không nguyên được

cho bởi $x_{i+\alpha} = x(\frac{i+\alpha}{N})$, $|\alpha| < 1$. Do đó lưới tựa đều biến đổi miền vô hạn thành hữu hạn các khoảng và xác định điều kiện biên gốc trực tiếp tại vô cùng.

Sử dụng các xấp xỉ đạo hàm sau

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{i+1/2} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{2(x_{i+3/4} - x_{i+1/4})}, \quad (1)$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_i \approx \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} (\frac{u_{i+1} - u_i}{2(x_{i+3/4} - x_{i+1/4})} - \frac{u_i - u_{i-1}}{2(x_{i-1/4} - x_{i-3/4})}). \quad (2)$$

Xấp xỉ giá trị của u tại điểm giữa của lưới:

$$u_{i+1/2} \approx \frac{x_{i+1} - x_{i+1/2}}{x_{i+1} - x_n} u_i + \frac{x_{i+1/2} - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1}.$$

Các công thức trên chứa $u_N = u_\infty$ nhưng không chứa $x_N = \infty$. Các xấp xỉ sai phân hữu hạn trên có bậc chính xác $O(N^{-2})$.

3. Bài toán truyền nhiệt dừng trong nửa thanh vô hạn

Xét bài toán truyền nhiệt dừng trong nửa thanh vô hạn:

$$-(ku')' + du = f(x), \quad x > 0, \quad (3)$$

$$u(0) = \mu_0, \quad u(+\infty) = 0, \quad (4)$$

với giả thiết các hàm $k(x), d(x), f(x)$ liên tục và

$$0 < K_0 \leq k(x) \leq K_1, \quad 0 < D_0 \leq d(x) \leq D_1,$$

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow \infty.$$

Kí hiệu v_i là giá trị xấp xỉ của $u(x_i)$, $d_i = d(x_i)$ và

$$a_i = k[x(\frac{i-1/2}{N})].$$

Sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm (2), ta có công thức xấp xỉ đạo hàm $(ku')'$ như sau:

$$(ku'(x_i))' \approx \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} (a_{i+1} \frac{v_{i+1} - v_i}{2(x_{i+3/4} - x_{i+1/4})} - a_i \frac{v_i - v_{i-1}}{2(x_{i-1/4} - x_{i-3/4})}).$$

Từ đó ta thu được lược đồ sai phân cho bài toán vi phân (3), (4):

$$-A_i v_{i-1} + C_i v_i - B_i v_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

$$v_0 = \mu_0, \quad v_N = 0, \quad (6)$$

trong đó

$$f_i = f(x_i),$$

$$A_i = \frac{a_i}{2(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(x_{i-1/4} - x_{i-3/4})},$$

$$B_i = \frac{a_{i+1}}{2(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(x_{i+3/4} - x_{i+1/4})},$$

$$C_i = A_i + B_i + d_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Lược đồ sai phân (5), (6) có dạng hệ phương trình đại số tuyến tính ba điểm và được giải bằng phương pháp chặt cột [5].

Chúng tôi thực hiện một số ví dụ số trên 3 lưới tựa đều logarithm, tangent và hyperbol, số nút lưới là N , tham số điều khiển c . Trong bảng kết quả $\max |v_i - u(x_i)|$ biểu diễn sai số giữa nghiệm xấp xỉ và nghiệm đúng.

Ví dụ 1. Với các dữ liệu như trong bài báo [6], chọn

$$u = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad k(x) = 1 + \frac{1}{1+x}, \quad d(x) = 1 + \sin^2 x.$$

Khi đó

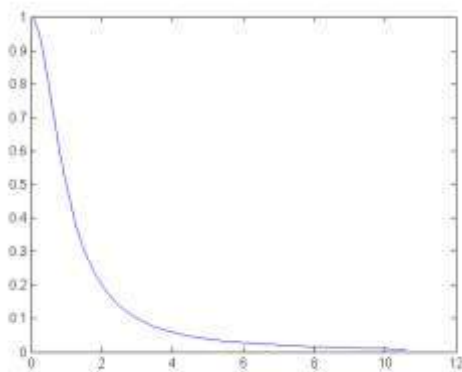
$$f(x) = \frac{(2+x)(2-6x^2)(1+x) - 2x(1+x^2)}{(1+x)^2(1+x^2)^3} + \frac{1 + \sin^2 x}{1+x^2}.$$

Kết quả tính toán trên lưới tựa đều được cho trong Bảng 1:

Bảng 1. Kết quả tính toán trong Ví dụ 1

N	c	Sai số		
		logarithm	tangent	hyperbol
50	1	0,0332	2.10^{-4}	2.10^{-4}
100	1	0,0229	5.10^{-5}	6.10^{-5}

Trong [6], sử dụng lưới đều, với sai số đạt được ứng với số nút lưới 650 là 9.10^{-4} . Như vậy ta có thể thấy sử dụng lưới tựa đều cho kết quả với độ chính xác khá cao.



Hình 1. Đồ thị nghiệm xấp xỉ sử dụng lưới tựa đều tangent với $N = 50, c = 1$

Ví dụ 2. Với các dữ liệu như trong bài báo [7], chọn

$$u = \frac{\sin x}{x+1}, k(x) = 1, d(x) = 1 + \sin^2 x.$$

Khi đó

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{(x+1)^3} - \frac{\sin x}{x+1} - \frac{2 \cos x}{x+1} - \frac{\sin x (\sin^2 x + 1)}{x+1}.$$

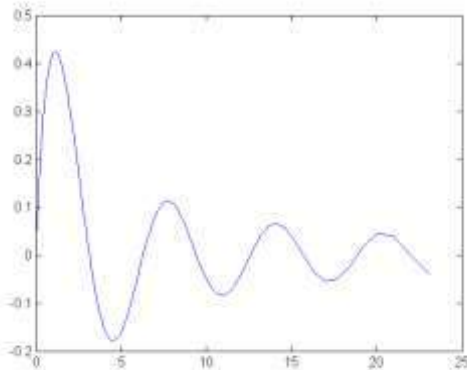
Kết quả tính toán được cho trong Bảng 2:

Bảng 2. Kết quả tính toán trong Ví dụ 2

N	c	Sai số		
		logarithm	tangent	hyperbol
50	1	0,0757	0,0301	0,0217
100	1	0,0678	0,0177	0,0169
100	3	0,0169	0,0178	0,0159
200	3	0,0041	0,0101	0,0088

Từ Hình 2 ta thấy rằng mặc dù sử dụng lưới tựa đều cho kết quả khá tốt, nhưng khi giải các phương trình dạng dao động tắt dần, đối với các điểm ở xa khi khoảng cách giữa các

nút thưa dần sẽ không phản ánh được tốt nhất nghiệm của bài toán. Tuy nhiên để ý rằng trong trường hợp này tại các điểm ở càng xa thì giá trị hàm u sẽ càng tiến dần về 0, do đó việc tìm gần đúng các giá trị của u ở gần điểm ban đầu vẫn có ý nghĩa hơn. Khi cần các giá trị ở xa, ta có thể điều chỉnh tăng tham số điều khiển c để thu được tốt hơn các giá trị đó.



Hình 2. Đồ thị nghiệm xấp xỉ sử dụng lưới tựa đều hyperbol với $N = 200, c = 3$

4. Bài toán truyền nhiệt trong nửa thanh vô hạn (Phương trình Parabolic)

Xét bài toán truyền nhiệt một chiều với hệ số hằng $k_1, k_2 > 0$:

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial t} - k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u(0, t) = \psi(t), u(+\infty, t) = 0. \quad (8)$$

Để giải bài toán (7), (8) ta sử dụng lưới tựa đều theo biến không gian x và lưới đều theo biến thời gian t : $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots$, trong đó τ là bước lưới thời gian.

Kí hiệu v_i^j là giá trị xấp xỉ của $u(x_i, t_j)$,

$$f_i^j = f(x_i, t_j).$$

Sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm (2) và công thức xấp xỉ đạo hàm $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$ với cấp xấp xỉ $O(\tau)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\tau}, \quad (9)$$

ta thu được lược đồ sai phân ẩn có dạng hệ phương trình ba điểm tại mỗi bước thời gian j như sau:

$$-A_i v_{i-1}^j + C_i v_i^j - B_i v_{i+1}^j = F_i^j, \quad (10)$$

$$v_0^j = \psi(t_j), v_N = 0, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots,$$

trong đó

$$A_i = \frac{k_2}{2(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(x_{i-3/4} - x_{i-1/4})},$$

$$B_i = \frac{k_2}{2(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(x_{i+3/4} - x_{i+1/4})},$$

$$C_i = A_i + B_i + \frac{k_1}{\tau}, F_i^j = f_i^{j-1} + \frac{k_1 v_i^{j-1}}{\tau},$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots$$

Do (9) chỉ có cấp xấp xỉ bậc 1 đối với τ nên cấp xấp xỉ của lược đồ (10), (11) là $O(\tau + N^{-2})$.

Chúng tôi thực hiện một số ví dụ số trên 3 lưới tựa đều logarithm, tangent và hyperbol với tham số điều khiển $c = 1$, số nút lưới là N . Trong bảng kết quả $\max_i |v_i^j - u(x_i, t_j)|$ biểu diễn sai số giữa nghiệm xấp xỉ và nghiệm đúng.

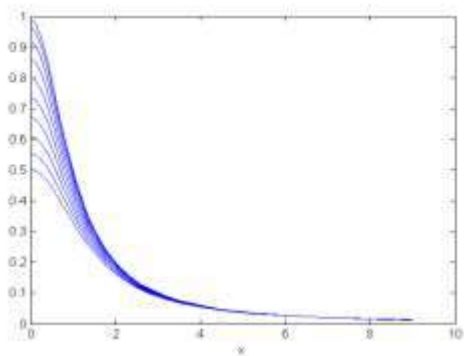
Ví dụ 3. Với các dữ liệu như trong bài báo [7], chọn

$$u = \frac{1}{x^2 + t^2 + 1}, k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{2}.$$

Kết quả tính toán được cho trong Bảng 3:

Bảng 3. Kết quả tính toán trong Ví dụ 3

τ	N	Sai số		
		logarith	tangen	hyperbol
1	50	0,0237	0,0234	0,0234
0,1	50	0,0082	0,0082	0,0081
0,01	100	$7 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$



Hình 3. Đồ thị nghiệm xấp xỉ sử dụng lưới tựa đều hyperbol với $N = 50, \tau = 0,1$

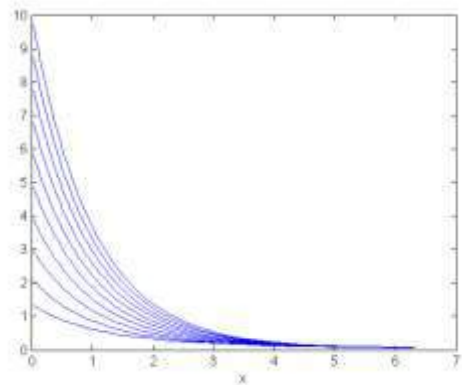
Ví dụ 4. chọn

$$u = \frac{e^{-t}}{x+1} + te^{-x}, k_1 = 2, k_2 = 3.$$

Kết quả tính toán được cho trong Bảng 4:

Bảng 4. Kết quả tính toán trong Ví dụ 4

τ	N	Sai số		
		logarith	tangen	hyperbol
1	50	0.0817	0.0887	0.0886
0,1	75	0.0124	0.0101	0.0101
0,01	100	0.0044	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$



Hình 4. Đồ thị nghiệm xấp xỉ sử dụng lưới tựa đều tangent với $N = 50, \tau = 1$

Lược đồ sai phân (10), (11) chỉ có cấp xấp xỉ bậc 1 đối với τ , do đó sai số chủ yếu ảnh hưởng bởi τ khi số nút của lưới tựa đều tăng lên.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày phương pháp số sử dụng lưới tựa đều giải bài toán truyền nhiệt dừng và không dừng một chiều trong nửa thanh vô hạn. Chúng tôi cũng đưa ra một số ví dụ minh họa cho phương pháp.

Phát triển phương pháp trên lưới tựa đều giải bài toán elliptic 2 chiều trong nửa dải là hướng nghiên cứu tiếp theo của chúng tôi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. H. Han, Z. Huang, "A class of artificial boundary conditions for heat equation in unbounded domains", *Computers and Mathematics with Applications*, 43, 889-900, 2002.
- [2]. X. Wu, Z. Sun, "Convergence of difference schemes for heat equation in unbounded domains

using artificial boundary conditions”, *Applied Numerical Mathematics*, 50, 261–277, 2004.

[3]. R. Fazio, A. Jannelli, “Finite difference schemes on quasi-uniform grids for BVPs on infinite intervals”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 269 14–23, 2014.

[4]. M.N. Koleva, “Numerical solution of the heat equation in unbounded domains using quasi-uniform grids”, in *Large-Scale Scientific Computing*, I. Lirkov, S. Margenov, and J. Wasniewski, Eds., vol. 3743 of Lecture Notes in Comput. Sciences, Springer, Berlin, Germany, 509–517, 2006.

[5]. A. Samarskii, “The Theory of Difference Schemes”. New York: Marcel Dekker, 2001.

[6]. Q. A. Dang and D. H. Tran, “Method of infinite system of equations for problems in unbounded domains”, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 584704, 17 pages, doi:10.1155/2012/584704, 2012.

[7]. Q. A. Dang, D. H. Tran, “Comparison of the efficiency of some methods for solving problems in unbounded domains”, *VietNam Journal of Mathematical Applications*, Vol. 13, N. 1, 57-72, 2015.