BẬC KHÔNG ĐIỂM CỦA WRONSKIAN CÁC HÀM CHỈNH HÌNH *p*-ADIC

Hà Trần Phương[1], Nguyễn Thị Ngân[1], Padaphet Inthavichit[2]
[1]*Trường Đại học Sư phạm – ĐH Thái Nguyên,*
[2]*Trường Cao đăng Sư phạm – CHDCND Lào*

TÓM TẮT

Cho $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm chỉnh hình độc lập tuyến tính trên một trường đóng đại số và $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của $f_0, \ldots, f_n$. Trong bài báo này chúng tôi sẽ chứng minh một kết quả về quan hệ giữa bậc không điểm của Wronskian của các hàm $f_0, \ldots, f_n$ với bậc không điểm có thể có của các hàm thuộc $\mathcal{L}$.
Từ khóa: *giải tích, Wronskian, đường cong chỉnh hình p-adic.*

Ngày nhận bài: 03/5/2019;Ngày hoàn thiện: 26/5/2019;Ngày duyệt đăng: 31/5/2019

THE ORDER OF THE WRONSKIAN OF *p*− ADIC HOLOMOPHIC FUNCTIONS

Ha Tran Phuong[1], Nguyen Thi Ngan[1], Padaphet Inthavichit[2]
[1]*University of Education – TNU,*
[2]*Luang Prabang Teacher Training College, Laos*

ABSTRACT

Let $f_0, \ldots, f_n$ be $p-$adic holomorphic functions and L is the set of all of non-trivial linear combinations of $f_0, \ldots, f_n$. In this paper we will prove a result of relationship between the degree of zeros of Wronskian of the functions $f_0,\ldots, f_n$ with the possible orders of zeros of functions in L.
Key words: *Analytic; Wronskian; p-adic holomorphic function.*

Received: 03/5/2019; Revised: 26/5/2019;Approved: 31/5/2019

* Corresponding author: *Email: nguyenthingan@dhsptn.edu.vn*

1. Giới thiệu

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là một trường đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ với giá trị tuyệt đối không Acsimet "$|\ |$". Cho g là một hàm nguyên trên $\mathbb{K}$ và z_0 là một điểm tùy ý trên $\mathbb{K}$. Khi đó trong lân cận của z_0, hàm $g(z)$ có biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa hội tụ

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (m \geqslant 0,\ a_m \neq 0),$$

khi đó ta kí hiệu $g^*(z_0) = a_m$, $\mathrm{ord}_g(z_0) = m$ và gọi là *bậc không điểm của* g tại z_0. Trường hợp $g(z_0) \neq 0$ ta kí hiệu $\mathrm{ord}_g(z_0) = 0$.

Cho $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm nguyên trên $\mathbb{K}$ không có không điểm chung và ít nhất một trong chúng khác hằng. Wronskian của các hàm $f_0, \ldots, f_n$ định nghĩa bởi

$$W = W(f_0, \ldots, f_n) := \begin{vmatrix} f_0 & \ldots & f_n \\ f_0' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)} & \ldots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Kí hiệu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm $f_0, \ldots, f_n$. Từ Mệnh đề 1 ta thấy, tại mỗi điểm $z_0 \in \mathbb{K}$, các bậc không điểm có thể có tại z_0 của các hàm thuộc $\mathcal{L}$ tạo nên một dãy $d_0, d_1, \ldots, d_n$ thỏa mãn $d_0 = 0 < d_1 < \cdots < d_n$ và được gọi là dãy các số mũ đặc trưng của các hàm $f_0, \ldots, f_n$ tại z_0.

Trong bài báo này chúng tôi sẽ chứng minh một quan hệ giữa bậc không điểm của Wronskian các hàm $f_0, \ldots, f_n$ với các số mũ đặc trưng của các hàm $f_0, \ldots, f_n$ tại z_0. Kết quả của chúng tôi như sau:

Định lý 1. *Cho $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm nguyên độc lập tuyến tính trên $\mathbb{K}$ không có không điểm chung và ít nhất một trong chúng khác hằng. Với mỗi $z_0 \in \mathbb{K}$, gọi $d_0, d_1, \ldots, d_n$ là dãy các số mũ đặc trưng của $f_0, \ldots, f_n$ tại z_0. Khi đó*

i) Nếu $W(z_0) \neq 0$ thì $d_0 = 0 < d_1 < \cdots < d_n = n$;

ii) Nếu $W(z_0) = 0$ thì $d_0 = 0 < d_1 < \cdots < d_n$ phụ thuộc vào z_0, hơn nữa, trong trường hợp này bậc không điểm của W tại z_0 bằng

$$\sum_{j=1}^{n} d_j - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Chú ý rằng, Anderson và Hinkkanen ([1]) đã có kết luận tương tự trong trường hợp phức. Ở đây chúng tôi xem xét trong trường hợp $p-$adic với các chứng minh chi tiết hơn.

2. Mệnh đề

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh một bổ đề cần thiết cho chứng minh kết quả chính. Cho $f_0, \dots, f_n$ là các hàm nguyên độc lập tuyến tính trên $\mathbb{K}$ không có không điểm chung và ít nhất một trong chúng khác hằng. Kí hiệu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n)$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm $f_0, \dots, f_n$. Khi đó ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1. *Với mỗi $z_0 \in \mathbb{K}$, các bậc có thể có tại không điểm z_0 của các hàm thuộc $\mathcal{L}$ tạo nên một dãy $d_0(z_0), d_1(z_0), \dots, d_n(z_0)$ thỏa mãn*

$$0 = d_0(z_0) < d_1(z_0) < \cdots < d_n(z_0).$$

Chứng minh. Gọi $z_0 \in \mathbb{K}$ là một điểm tùy ý, theo giả thiết các hàm $f_0, \dots, f_n$ là độc lập tuyến tính nên tồn tại $j_0 : 0 \leqslant j_0 \leqslant n$ sao cho $f_{j_0}(z_0) \neq 0$. Giả sử $f_{j_0}(z_0) = \alpha \neq 0$, ta đặt $g_0 = f_{j_0}/\alpha$ và $d_0(z_0) = 0$, khi đó $g_0(z_0) = 1$.

Với mỗi hàm f_i $(i \neq j_0)$. Ta thiết lập hàm $h_i(z)$ như sau:

$$h_i(z) = \begin{cases} f_i(z) - f_i(z_0)g_0(z) & \text{nếu } f_i(z_0) \neq 0 \\ f_i(z) & \text{nếu } f_i(z_0) = 0, \end{cases}$$

khi đó $h_i(z_0) = 0$. Đặt $m = \mathrm{ord}_{h_i}(z_0)$, do $h_i(z_0) = 0$ nên h_i biểu diễn được dưới dạng

$$h_i(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

trong lân cận z_0, trong đó $m \geqslant 1, a_m \neq 0$ và m phụ thuộc vào hàm f_i. Ta thay thế hàm f_i ban đầu bằng hàm h_i/a_m.

Sau khi thực hiện với tất cả các $i \neq j_0$ ta sẽ được $n+1$ hàm: hàm g_0 và n hàm $f_i(i \neq j_0)$ mới mà mỗi trong chúng là hàm gốc ban đầu hay là một tổ hợp tuyến tính của hàm đó. Hiển nhiên mỗi hàm f_i đều biểu diễn được dưới dạng

$$f_i(z) = (z - z_0)^{m_i} + a_{m_i+1}(z - z_0)^{m_i+1} + \dots$$

trong lân cận z_0. Hơn nữa, do các hàm $f_0, \dots, f_n$ là độc lập tuyến tính và từ cách xây dựng ta suy ra các hàm $n+1$ hàm mới (hàm g_0 và n hàm $f_i(i \neq j)$) cũng độc lập tuyến tính.

Đặt $d_1(z_0) = \min\limits_{i \neq j}\{m_i\} \geqslant 1$ và ta chọn một trong số các hàm $f_i(i \neq j_0)$ mới mà bội không điểm tại z_0 bằng $d_1(z_0)$, ta gọi là hàm f_{j_1}. Đặt $g_1 = f_{j_1}$, khi đó

$$g_1(z) = (z - z_0)^{d_1(z_0)} + a_{d_1(z_0)+1}(z - z_0)^{d_1(z_0)+1} + \dots.$$

Với mỗi hàm f_i trong $n-1$ hàm còn lại, ta thay thế chúng bởi hàm $\beta(f_i - \lambda g_1)$ với các số thích hợp $\beta \neq 0$ và λ phụ thuộc vào f_i sao cho mỗi hàm trong chúng có bậc không điểm tại z_0 ít nhất là $d_1(z_0) + 1$ và hệ số có chỉ số thấp nhất khác 0 trong khai triển chuỗi lũy thừa tại z_0 bằng 1.

Ta tiếp tục quá trình cho đến khi còn một hàm cuối cùng ta sẽ được một dãy phân biệt các số nguyên không âm $d_j(z_0)$, $j = 0, 1 \ldots, n$, thỏa mãn

$$d_0(z_0) = 0 < d_1(z_0) < d_2(z_0) < \cdots < d_n(z_0),$$

và các hàm độc lập tuyến tính g_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, trong đó mỗi hàm g_j là một trong các hàm gốc $f_0, \ldots, f_n$ ban đầu hay là một tổ hợp tuyến tính của các hàm đó, tức là $g_j \in \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$ và thỏa mãn

$$g_j(z) = (z - z_0)^{d_j(z_0)} + a_{d_j(z_0)+1}(z - z_0)^{d_j(z_0)+1} + \ldots$$

trong lận cận z_0. Tức là $\mathrm{ord}_{g_j}(z_0) = d_j(z_0)$.

Bây giờ giả sử $g \in \mathcal{L}$ tùy ý, do các hàm $g_j, j = 0, 1, \ldots, n$, là các tổ hợp tuyến tính của các hàm $f_0, \ldots, f_n$, do đó hàm g có thể biểu diễn được dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của các hàm $g_0, \ldots, g_n$, tức là

$$g = \sum_{j=0}^{n} a_j g_j,$$

trong đó các a_j không đồng thời bằng 0. Đặt

$$m = \min_{j \in \{0,1,\ldots,n\}} \{j : a_j \neq 0\}.$$

Khi đó g có không điểm bội $d_m(z_0)$ tại z_0 (nếu $g(z_0) \neq 0$ thì $m = 0$). Do một trong các a_j cần phải khác không nên nếu $g(z_0) = 0$ thì bậc của g tại z_0 là một trong các số $d_1(z_0), \ldots, d_n(z_0)$ và nếu $g(z_0) \neq 0$ thì bậc của g tại z_0 bằng $d_0(z_0) = 0$. □

3. Chứng minh Định lý 1

Gọi $g_0, g_1, \ldots, g_n$ là các hàm được xây dựng trong chứng minh của Mệnh đề 1. Kí hiệu $G = W(g_0, g_1, \ldots, g_n)$, theo tính chất của Wronskian ta có

$$W(g_0, g_1, \ldots, g_n) = C.W(f_0, f_1, \ldots, f_n), \tag{3.1}$$

trong đó C là một hằng số khác không.

Trước hết ta chứng minh nếu $W(f_0, f_1, \ldots, f_n)(z_0) \neq 0$ thì $d_j(z_0) = j$ với mọi $j = 0, 1, \ldots, n$. Thật vậy, do $W(f_0, f_1, \ldots, f_n)(z_0) \neq 0$ ta có

$$W(g_0, g_1, \ldots, g_n)(z_0) \neq 0.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh với mỗi $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tồn tại hàm $g \in \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$, sao cho $\mathrm{ord}_g(z_0) = k$. Hiển nhiên, với $k = 0$ ta chỉ cần chọn hàm $g_0(z) \in \mathcal{L}$ thỏa mãn yêu cầu. Với $k > 0$, ta kí hiệu

$$A = \begin{pmatrix} g_0(z_0) & \ldots & g_n(z_0) \\ g_0'(z_0) & \ldots & g_n'(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(n)}(z_0) & \ldots & g_n^{(n)}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Do $W(g_0, g_1, \ldots, g_n)(z_0) \neq 0$ ta có $\det A \neq 0$, suy ra hạng của ma trận A bằng $n+1$. Điều này kéo theo k dòng bất kỳ trong ma trận A đều độc lập tuyến tính. Đặc biệt, k dòng đầu tiên của ma trận A là độc lập tuyến tính. Xét hệ phương trình

$$g_0^{(j)}(z_0)a_0 + g_1^{(j)}(z_0)a_1 + \cdots + g_n^{(j)}(z_0)a_n = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{3.2}$$

và điều kiện

$$g_0^{(k)}(z_0)a_0 + g_1^{(k)}(z_0)a_1 + \cdots + g_n^{(k)}(z_0)a_n \neq 0. \tag{3.3}$$

Do k dòng đầu tiên của ma trận A là độc lập tuyến tính nên hệ (3.2) có nghiệm không tầm thường, trong số các nghiệm ấy, sẽ có nghiệm thỏa mãn (3.3). Gọi $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ là một nghiệm của hệ (3.2) thỏa mãn (3.3), đặt

$$g(z) = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n.$$

Khi đó $g(z) \in \mathcal{L}(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ và $\operatorname{ord}_g(z_0) = k$. Như vậy, với mỗi $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tồn tại hàm $g \in \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$, sao cho $\operatorname{ord}_g(z_0) = k$. Kết hợp với Mệnh đề 1 ta suy ra $d_j(z_0) = j$ với mọi $j = 0, 1, \ldots, n$. Từ đó suy ra khẳng định (i) của định lý.

Bây giờ ta xét trường hợp nếu $W(z_0) = 0$. Từ (3.1) ta có

$$\operatorname{ord}_W(z_0) = \operatorname{ord}_G(z_0),$$

do đó không mất tính tổng quát ta thay thế các hàm f_j bởi các hàm g_j tương ứng. Khi đó

$$\operatorname{ord}_{f_j}(z_0) = d_j(z_0); \quad f_j^*(z_0) = 1$$

với $j = 0, 1, \ldots, n$. Ta kí hiệu $d_j = d_j(z_0), j = 0, 1, \ldots, n$, khi đó f_j biểu diễn được dưới dạng

$$f_j(z) = (z - z_0)^{d_j(z_0)} + O((z - z_0)^{d_j(z_0)+1}).$$

Kéo theo, với mỗi $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$f_j^{(k)}(z) = d_j(d_j - 1) \ldots (d_j - k + 1)(z - z_0)^{d_j - k} + O((z - z_0)^{d_j + 1 - k}).$$

Chú ý rằng cách biểu diễn này đúng ngay cả khi $k > d_j$, vì khi đó, một trong các số $(d_j - 1), \ldots, (d_j - k + 1)$ sẽ bằng 0. Do các hàm $f_j^{(k)}(z)$ đều biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa của $(z - z_0)$, do đó sau khi tính toán trực tiếp, định thức Wronskian W được biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa của $(z - z_0)$ như sau:

$$W(z) = c(z - z_0)^m + O((z - z_0)^{m+1}), \tag{3.4}$$

ở đây, $m = \operatorname{ord}_W(z_0)$.

Bây giờ ta đi tính c và m, từ biểu diễn của các hàm $f_j^{(k)}(z)$ ta dễ dàng suy ra

$$W = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=0}^{n} f_j^{(\sigma(j))},$$

trong đó tổng lấy qua tất cả các phép hoán vị σ của tập $\{0,1,\ldots,n\}$. Dễ thấy

$$f_j^{(\sigma(j))}(z) = d_j(d_j-1)\ldots(d_j-\sigma(j)+1)(z-z_0)^{d_j-\sigma(j)} + O((z-z_0)^{d_j+1-\sigma(j)}).$$

Kéo theo

$$c = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ d_1 & \ldots & d_n \\ d_1(d_1-1) & \ldots & d_n(d_n-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1(d_1-1)\ldots(d_1-n+1) & \ldots & d_n(d_n-1)\ldots(d_n-n+1) \end{vmatrix}.$$

Lấy dòng thứ 2 cộng vào dòng thứ 3 ta được dòng thứ 3 là các d_j^2. Tương tự các dòng khác ta sẽ cộng vào một tổ hợp tuyến tính thích hợp của các dòng trên, ta sẽ được dòng thứ k là các d_j^{k-1}. Do đó

$$c = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ d_1 & \ldots & d_n \\ d_1^2 & \ldots & d_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^n & \ldots & d_n^n. \end{vmatrix}.$$

Suy ra giá trị của c bằng với định thức Vandermonde, nên $c = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(d_j-d_i) \neq 0$ do d_j là các số phân biệt. Ngoài ra

$$\begin{aligned} m &= \sum_{j=0}^{n}(d_j-\sigma(j)) = \sum_{j=0}^{n} d_j - \sum_{j=0}\sigma(j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} d_j - \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. J. M. Anderson and A. Hinkkanen, *A new counting function for the zeros of holomorphic curves*, Anal. and Math. Phys., Vol. 4, Issu. 1–2, pp 35–62, 2014.

[2]. W. Cherry and Z.Ye, *Non-Archimedean Nevanlinna Theory in several variables and the Non-Archimedean Nevanlinna inverse problem*, Tran. Amer. Math. Soc., 349(12), pp.5043-5071, 1997.

[3]. G G. Gundersen and W. K. Hayman, *The Strength of Cartan's Version of Nevanlinna theory*, Bull. London Math. Soc. 36, p433–454, 2004.

[4]. P.C. Hu and C.C Yang, *Meromorphic Functions over Non-Archimedean Fields*, Kluwer Academic Publishers, 2000.