

PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI RBF-FD GIẢI PHƯƠNG TRÌNH POISSON TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU VỚI K- ĐIỂM GẦN NHẤT

Ngô Mạnh Tường*, Nguyễn Thị Thanh Giang, Nguyễn Thị Nhung

Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Trong những năm gần đây, phương pháp không lưới RBF-FD (Radial Basis Function -Finite Difference) giải phương trình đạo hàm riêng đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu theo hướng này đang dừng lại trong không gian 2 chiều. Bài báo này trình bày kết quả nghiên cứu việc chọn k -điểm gần nhất làm tập các tâm hỗ trợ cho phương pháp RBF-FD giải phương trình Poisson trong không gian 3 chiều. Kết quả thử nghiệm số cho thấy nghiệm của phương pháp không lưới RBF-FD sử dụng k -điểm gần nhất có độ chính xác cao hơn nghiệm của phương pháp phần tử hữu hạn (FEM - Finite Element Method).

Từ khóa: *Phương pháp không lưới; phương pháp RBF-FD; thuật toán chọn tâm hỗ trợ; k-điểm gần nhất; phương pháp phần tử hữu hạn*

Ngày nhận bài: 10/5/2019; Ngày hoàn thiện: 27/6/2019; Ngày đăng: 16/7/2019

THE RBF-FD METHOD TO SOLVE THE POISSON EQUATION IN 3D WITH THE K-NEAREST POINTS

Ngo Manh Tuong*, Nguyen Thi Thanh Giang, Nguyen Thi Nhung

TNU - University of Information and Communication Technology

ABSTRACT

In recent years, the meshless finite difference method based on radial basis functions (RBF-FD) of solving partial differential equation has been studied by many scientists. However, the research results of this method are limited in 2D. This paper presents results of a new method, using the selection of k -nearest points to be a set of centers, which supports the RBF-FD method to solve Poisson's equation in 3D. The numerical experiments showed that the solution of the RBF-FD method using k -nearest points has higher accuracy than the solution of the finite element method.

Keywords: *meshless; RBF-FD; stencil support selection; k-nearest points; FEM*

Received: 10/5/2019; Revised: 27/6/2019; Published: 16/7/2019

* Corresponding author. Email: nmtuong@ictu.edu.vn

1. Giới thiệu

Phương pháp RBF-FD là phương pháp không lưới sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính RBF với cách tiếp cận địa phương, dựa trên sự rời rạc hóa giống như phương pháp sai phân hữu hạn, để tính xấp xỉ nghiệm tại một số điểm rời rạc trong miền xác định. Khi sử dụng phương pháp RBF-FD giải bài toán trong không gian d chiều, với d lớn tùy ý, thay vì phải làm việc với hàm d biến, ta chỉ cần làm việc với hàm một biến. Một lợi thế của kỹ thuật rời rạc không lưới là chỉ cần dựa trên tập điểm độc lập phân bố bất kỳ, không cần tạo ra cấu trúc lưới. Do đó, không còn cần chi phí dành cho sinh lưới, duy trì lưới và cập nhật lưới.

Phương pháp RBF-FD được Tolstykh và Shirobokov giới thiệu lần đầu tiên vào năm 2003 bằng việc sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính dựa trên cấu trúc điểm của phương pháp phần tử hữu hạn giải bài toán elliptic [1]. Năm 2006, Wright và Fornberg đề xuất phương pháp không lưới RBF-FD sử dụng nội suy Hermite [2]. Năm 2011, Oleg Davydov và Đặng Thị Oanh công bố phương pháp RBF-FD dựa trên nội suy đơn điểm và đa điểm, thuật toán chọn tâm hỗ trợ phương pháp không lưới, thuật toán làm mịn thích nghi [3] và thuật toán ước lượng tham số hình dạng tối ưu cho nội suy hàm RBF [4]. Năm 2017, Đặng Thị Oanh, Oleg Davydov và Hoàng Xuân Phú tiếp tục phát triển thuật toán chọn tâm hỗ trợ phương pháp không lưới, thuật toán làm mịn thích nghi trên các bài toán có hình học phức tạp, hàm có độ dao động lớn [5].

Độ chính xác của phương pháp RBF-FD phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn bộ tâm hỗ trợ tính toán véc tơ trọng số. Trong [3, 5, 6, 7] các tác giả đã công bố và chỉ ra sự hiệu quả các thuật toán k -láng giềng cho phương pháp RBF-FD giải phương trình Poisson trong không gian 2 chiều. Mục tiêu của các thuật toán này là với mỗi tâm ζ nằm trong miền, chọn được bộ tâm $\Xi_\zeta = \{\zeta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ xung quanh góc ζ thỏa mãn 2 điều kiện:

a) Các góc α_i , $i=1,2,\dots,k$ đều nhất, trong đó α_i , $i=1,2,\dots,k$ là góc giữa 2 tia $\zeta\xi_i$ và $\zeta\xi_{i+1}$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ với chu trình $\xi_{k+1} = \xi_1$.

b) Khoảng cách $|\zeta - \xi_i|$, $i=1,2,\dots,k$ gần nhất có thể.

Để đạt được mục tiêu này, các thuật toán hoặc chỉ dùng điều kiện dừng về góc [3] hoặc sử dụng kết hợp điều kiện dừng trung bình của khoảng cách với điều kiện dừng về góc [5, 6, 7]. Các thuật toán bắt đầu với k -điểm gần nhất, sau đó tìm và thay thế điểm gần về góc (điểm xấu), tức là điểm thuộc tia nằm giữa hai góc có độ lớn chênh lệch nhau, bằng điểm có khoảng cách đến ζ xa hơn nhưng thuộc tia nằm giữa 2 góc có độ lớn đều nhau hơn (điểm tốt). Tuy nhiên, trong không gian 3 chiều điều kiện về góc không còn đúng nên không thể áp dụng các thuật toán này. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu việc áp dụng và thử nghiệm chọn k -điểm gần nhất làm tập tâm hỗ trợ tính véc tơ trọng số cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều.

Bài báo gồm 5 phần: Sau Phần giới thiệu là Phần 2, miêu tả phương pháp RBF-FD giải phương trình Poisson trong không gian 3 chiều; Phần 3, giới thiệu thuật toán chọn tâm; Phần 4, trình bày các kết quả thử nghiệm số và Phần 5 là Kết luận.

2. Phương pháp RBF-FD

Xét phương trình Poisson với điều kiện biên Dirichlet trong không gian 3 chiều như sau: Cho miền mở $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ và các hàm số f xác định trên Ω , g xác định trên $\partial\Omega$. Tìm hàm $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{trong } \Omega, \\ u &= g & \text{trên } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

với Δ là toán tử Laplace trong không gian 3 chiều. trên

Bài toán (1) được rời rạc hóa bởi phương pháp sai phân thành hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \Xi_{\zeta}} w_{\zeta, \xi} \tilde{u}_{\xi} &= f(\zeta), \quad \zeta \in \Xi_{\text{int}}; \\ u &= g(\xi), \quad \xi \in \partial \Xi, \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó

- $\Xi \subset \bar{\Omega}$ là tập các tâm rời rạc;
- $\partial \Xi := \Xi \cap \partial \Omega$ là các tâm nằm trên biên;
- $\Xi_{\text{int}} := \Xi \cap \Omega$ là các tâm nằm trong miền;
- $\tilde{u}$ là nghiệm xấp xỉ của u ;
- $w_{\zeta, \xi} \in \mathbb{R}$ là véc tơ trọng số.

Độ chính xác của nghiệm xấp xỉ $\tilde{u}$ trong hệ phương trình (2) phụ thuộc vào ba công đoạn chính

- Cách sinh ra bộ tâm rời rạc Ξ phù hợp với phương pháp RBF-FD;
- Phương pháp lựa chọn tập hỗ trợ $\Xi_{\zeta}, \zeta \in \Xi_{\text{int}}$;
- Cách tính véc tơ trọng số $w_{\zeta, \xi} \in \mathbb{R}$.

Trong không gian 2 chiều, các tác giả đã sử dụng bộ tâm Ξ của FEM [1, 2] và giới thiệu các thuật toán sinh tâm thích nghi cho phương pháp RBF-FD [3, 5]. Trong không gian 3 chiều, chúng tôi cũng sử dụng bộ tâm Ξ của FEM được tạo bởi PDE Toolbox của MATLAB cho các thử nghiệm số.

Véc tơ trọng số $w_{\zeta, \xi} \in \mathbb{R}$ được tính dựa vào nội suy hàm cơ sở bán kính RBF tương tự như trong không gian 2 chiều [1, 3, 5, 6, 7]. Cho hàm xác định dương $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ và hàm cơ sở bán kính $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\Phi(x) := \varphi(\|x\|_2), x \in \mathbb{R}^d,$$

trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn Euclide, (xem chi tiết trong [8, 9, 10]). Gọi $\Xi_{\zeta} := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \subset \mathbb{R}^d$ là bộ tâm đôi một phân biệt và hàm $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục. Khi đó hàm nội suy cơ sở bán kính s của hàm u xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{j=1}^n a_j \Phi(x - \xi_j), \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ s(\xi_i) &= u(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó $a_j, j = 1, 2, \dots, n$ là các hệ số nội suy và được chọn sao cho thỏa mãn điều kiện nội suy (3), tức là

$$s(\xi_i) = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(\xi_i - \xi_j) = u(\xi_i), i = 1, 2, \dots, n$$

hay dạng ma trận

$$\Phi|_{\Xi_{\zeta}} a = u|_{\Xi_{\zeta}},$$

với

$$\begin{aligned} a &:= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad u|_{\Xi_{\zeta}} := \begin{pmatrix} u(\xi_1) \\ u(\xi_2) \\ \vdots \\ u(\xi_n) \end{pmatrix}, \\ \Phi|_{\Xi_{\zeta}} &:= \begin{pmatrix} \Phi(\xi_1 - \xi_1) & \cdots & \Phi(\xi_1 - \xi_n) \\ \Phi(\xi_2 - \xi_1) & \cdots & \Phi(\xi_2 - \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(\xi_n - \xi_1) & \cdots & \Phi(\xi_n - \xi_n) \end{pmatrix} \\ &= [\Phi(\xi_i - \xi_j)]_{i,j=1}^n. \end{aligned}$$

Do Φ là hàm xác định dương nên ma trận $\Phi|_{\Xi_{\zeta}}$ là xác định dương với bộ tâm Ξ_{ζ} , suy ra a được xác định duy nhất

$$a = [\Phi|_{\Xi_{\zeta}}]^{-1} u|_{\Xi_{\zeta}}. \quad (4)$$

Từ (3) ta xấp xỉ toán tử vi phân $\Delta u(x)$ bởi công thức

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &\approx \Delta s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \Delta \Phi(x - \xi_j) \\ &= a^T \cdot \Delta \Phi(x - \cdot) \Big|_{\Xi_{\zeta}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Thay (4) và (5) ta được

$$\Delta u(x) \approx \sum_{i=1}^n w_i u(\xi_i),$$

trong đó véc tơ

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) = [\Phi|_{\Xi_{\zeta}}]^{-1} \cdot \Delta \Phi(x - \cdot) \Big|_{\Xi_{\zeta}}$$

được gọi là véc tơ trọng số và

$$\Delta\Phi(x-.)|_{\Xi_\zeta} = \begin{pmatrix} \Delta\Phi(x-\xi_1) \\ \Delta\Phi(x-\xi_2) \\ \vdots \\ \Delta\Phi(x-\xi_n) \end{pmatrix}.$$

Vậy với mỗi bộ tâm Ξ_ζ ta tính được véc tơ trọng số w_ζ tương ứng. Tập Ξ_ζ được gọi là *bộ tâm hỗ trợ tính toán véc tơ trọng số*. Câu hỏi đặt ra là chọn bộ tâm này như thế nào? Trong phần tiếp theo chúng tôi sẽ giới thiệu thuật toán chọn bộ tâm này cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều.

3. Thuật toán chọn tâm

Đặc trưng của phương pháp RBF-FD là tập điểm trong miền Ξ được phân bố bất kỳ và không sử dụng đường liên kết giữa các điểm (lưới), nên mục tiêu của thuật toán tương tự như trong không gian 2 chiều [3, 5, 6, 7], đó là: Với mỗi tâm $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$, ta chọn được tập

$$\Xi_\zeta := \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k\} \subset \Xi, \text{ với } \xi_0 = \zeta,$$

xung quanh gốc ζ gần và đều nhất có thể. Để đạt được mục tiêu này thuật toán bắt đầu với m ($m > k$) điểm $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ xung quanh ζ và sắp xếp m điểm theo thứ tự tăng dần về mật độ khoảng cách đến ζ , thuật toán kết thúc khi chọn k điểm đầu tiên.

Thuật toán: Chọn k -điểm gần nhất

Input: Bộ tâm rời rạc Ξ, ζ .

Output: Tập tâm hỗ trợ Ξ_ζ .

Các tham số: k (số tâm được chọn) và m ($m > k$, số tâm ứng viên ban đầu).

I. Tìm m tâm $M := \{\xi_1, \dots, \xi_m\} \in \Xi \setminus \{\zeta\}$ xung quanh ζ . Khởi tạo $\Xi_\zeta := \{\zeta\}$.

II. Tính các khoảng cách

$$D := \{\|\zeta - \xi_i\|_2 : i = 1, 2, \dots, m\}.$$

III. Tìm k tâm trong m tâm $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sao cho khoảng cách từ các điểm đó đến ζ là nhỏ nhất:

1) Đặt

tempD: = D;

i: = 1;

2) While $i \leq k$

For $j = 2$ to length (tempD)

Min: = tempD(1);

If tempD(j) < Min

Min: = tempD(j);

End

End

idx: = find(D == Min);

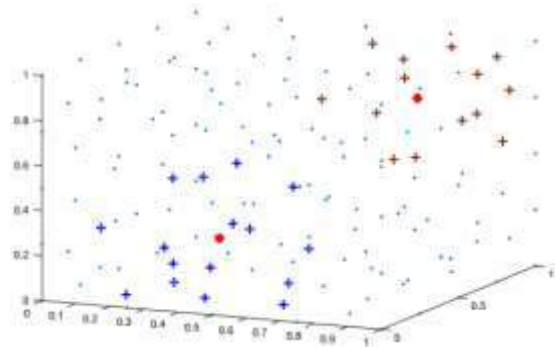
$\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup M(\text{idx})$;

tempD: = setdiff(tempD, Min);

i: = i + 1;

End

Hình 1, biểu diễn kết quả của thuật toán chọn k -điểm gần nhất trong trường hợp miền rời rạc Ξ là hình hộp có 155 tâm, với hai trường hợp tập các tâm hỗ trợ Ξ_ζ có 14 điểm (dấu “+” màu nâu) gần ζ (dấu “•” đỏ) khi $k=15$ và Ξ_ζ có 16 điểm (dấu “+” màu xanh) khi $k=17$.



Hình 1. Tập các tâm hỗ trợ Ξ_ζ

4. Thử nghiệm số

Mục tiêu của thử nghiệm số là đánh giá hiệu quả của phương pháp RBF-FD khi sử dụng chọn k -điểm gần nhất thông qua việc so sánh với FEM dựa trên các hàm tuyến tính, do đó chúng tôi rời rạc miền Ξ là tập gồm các đỉnh của các tứ diện được tạo bởi hàm

generateMesh trong PDE Toolbox của Matlab. Với mỗi bài toán thử nghiệm, chúng tôi chọn độ dài cạnh lưới tối đa H_{max} cho phép tạo ra các tam giác lưới thô nhất, sau đó tạo các tam giác lưới mịn hơn bằng cách giảm H_{max} nhiều lần với hệ số $2^{-1/3}$ và được gần gấp đôi số đỉnh. Số lượng đỉnh trong miền của bài toán ký hiệu là $\#\Xi_{int}$ tương ứng trong các bảng ghi kết quả thử nghiệm số của mỗi bài toán.

Để đánh giá sự hiệu quả của phương pháp RBF-FD khi sử dụng chọn k -điểm gần nhất, chúng tôi so sánh giá trị sai số trung bình bình phương tương đối $rrms$ (relative root mean square) và coi nó như thước đo độ chính xác giữa nghiệm xấp xỉ $\tilde{u}$ của hệ (2) với nghiệm chính xác u của hệ (1) tại các điểm trong miền. Sai số $rrms$ được tính bởi công thức

$$rrms := \left(\frac{\sum_{\zeta \in \Xi_{int}} (\tilde{u}(\zeta) - u(\zeta))^2}{\sum_{\zeta \in \Xi_{int}} (u(\zeta))^2} \right)^{1/2}.$$

Ngoài sai số $rrms$, chúng tôi còn so sánh mật độ của ma trận hệ số của hệ phương trình (2) của phương pháp RBF-FD với mật độ của ma trận cứng của FEM. Mật độ của ma trận

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được tính bởi công thức $\frac{nnz(A)}{n}$,

trong đó $nnz(A)$ là tổng số đầu vào khác không trên n hàng của A .

Trong các thử nghiệm số, khi tính véc tơ trọng số chúng tôi sử dụng hàm nội suy RBF Power (xem [9, 10])

$$\varphi(r) = r^5, r = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}^3.$$

Các tham số sử dụng trong thuật toán chọn k -điểm gần nhất là $m=100$ và k lần lượt bằng các giá trị 15, 17, 21.

Bài toán 1: Xét phương trình Poisson

$$\Delta u = -3\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z$$

trên miền hình hộp $\Omega = [0,1]^3$ với điều kiện biên Dirichlet được chọn thỏa mãn nghiệm chính xác của bài toán là

$$u(x, y, z) = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z.$$

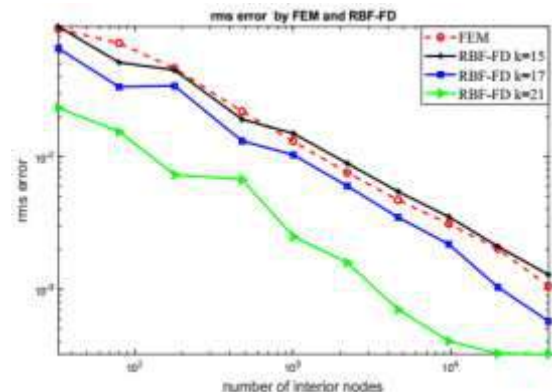
Bộ tâm Ξ của bài toán được tạo bởi PDE Toolbox của MATLAB với lưới thô nhất có 33 tâm trong miền ứng với $H_{max} = 0,3969$. Kết quả thử nghiệm số của bài toán được biểu diễn trong Bảng 1, Hình 2 và Hình 3.

Bảng 1. Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 1

# Ξ_{int}	Sai số $rrms$			
	FEM	RBF-FD		
		k=15	k=17	k=21
33	9,19e-2	9,58e-2	6,55e-2	2,34e-2
80	7,19e-2	5,13e-2	3,36e-2	1,54e-2
179	4,64e-2	4,50e-2	3,42e-2	7,32e-3
479	2,19e-2	1,91e-2	1,31e-2	6,73e-3
1008	1,31e-2	1,50e-2	1,03e-2	2,51e-3
2213	7,58e-3	8,91e-3	6,01e-3	1,59e-3
4633	4,72e-3	5,46e-3	3,49e-3	7,04e-4
9684	3,12e-3	3,53e-3	2,19e-3	4,08e-4
19776	2,02e-3	2,11e-3	1,04e-3	3,29e-4
41409	1,06e-3	1,29e-3	5,74e-4	3,24e-4

Bảng 1 và Hình 2 biểu diễn sai số $rrms$ của FEM và của phương pháp RBF-FD sử dụng thuật toán chọn k -điểm gần nhất. Hình 3 biểu diễn mật độ của ma trận cứng của FEM và mật độ của ma trận hệ số của hệ phương trình (2) của phương pháp RBF-FD.

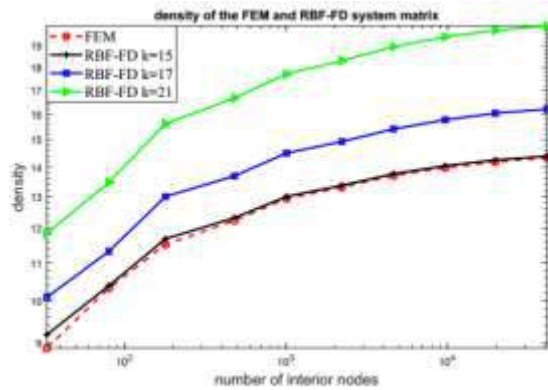
Với $k=15$, sai số sai số $rrms$ và mật độ của ma trận hệ số của phương pháp RBF-FD (đường có nhãn RBF-FD k=15) xấp xỉ sai số $rrms$ và mật độ của ma trận cứng của FEM (đường có nhãn FEM).



Hình 2. Sai số $rrms$ trên các tâm của Bài toán 1

Khi $k=17$ thì sai số $rrms$ của phương pháp RBF-FD (đường có nhãn RBF-FD k=17) luôn

nhỏ hơn sai số $rrms$ của FEM, còn mật độ của ma trận hệ số của phương pháp RBF-FD (xấp xỉ 16) cao hơn không đáng kể mật độ của ma trận cứng của FEM (bằng 14).



Hình 3. Mật độ của ma trận hệ số của Bài toán 1
Với $k = 21$, sai số $rrms$ của phương pháp RBF-FD (đường có nhãn RBF-FD $k=21$) nhỏ hơn 3 lần sai số $rrms$ của FEM nhưng mật độ của ma trận hệ số của phương pháp RBF-FD (xấp xỉ 20) cao hơn gần 1,5 lần mật độ của ma trận cứng của FEM.

Bài toán 2: Xét phương trình Poisson

$$\Delta u = 3e^{x+y+z}$$

trên miền hình cầu đơn vị

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

với điều kiện biên Dirichlet thỏa mãn nghiệm chính xác của bài toán là

$$u(x, y, z) = e^{x+y+z}.$$

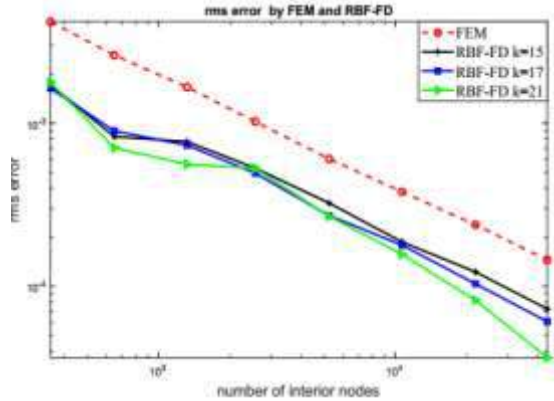
Bảng 2. Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 2

# Ξ_{int}	Sai số $rrms$			
	FEM	RBF-FD		
		k=15	k=17	k=21
349	4,20e-3	1,72e-3	1,64e-3	1,78e-3
650	2,61e-3	8,27e-4	8,95e-4	7,06e-4
1318	1,66e-3	7,70e-4	7,33e-4	5,60e-4
2559	1,02e-3	5,30e-4	4,94e-4	5,28e-4
5254	6,04e-4	3,23e-4	2,71e-4	2,69e-4
10662	3,80e-4	1,87e-4	1,79e-4	1,57e-4
21777	2,38e-4	1,22e-4	1,04e-4	8,22e-5
43813	1,45e-4	7,26e-5	6,07e-5	3,65e-5

Bộ tâm Ξ của bài toán được rời rạc tương tự như Bài toán 1, với lưới thô nhất ứng với $H_{\max} = 0,3969$ có 349 tâm trong miền. Kết

quả thử nghiệm số của bài toán được biểu diễn trong Bảng 2, Hình 4 và Hình 5.

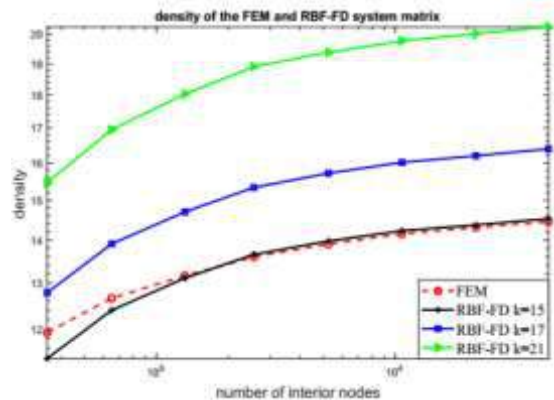
Sai số $rrms$ của phương pháp RBF-FD thay đổi không đáng kể khi k tăng và luôn luôn nhỏ hơn 2 lần sai số $rrms$ của FEM.



Hình 4. Sai số $rrms$ trên các tâm của Bài toán 2

Mật độ của ma trận hệ số của hệ phương trình (2) của phương pháp RBF-FD tăng khi k tăng, từ 14 (bằng mật độ của ma trận cứng của FEM) với $k = 15$ đến lớn hơn 20 khi $k = 21$, lớn hơn 1,5 lần mật độ của ma trận cứng của FEM.

Các kết quả thử nghiệm số cho thấy, nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng thuật toán chọn k -điểm gần nhất có độ chính xác cao hơn nghiệm của FEM khi số tâm của tập tâm hỗ trợ Ξ_{c} được chọn lớn hơn 15, tuy nhiên thời gian tính của phương pháp RBF-FD cao hơn của FEM. Để nghiệm của phương pháp RBF-FD vừa đạt được độ chính xác tốt, vừa không tăng đáng kể về thời gian tính toán, thì giá trị $k = 17$ là phù hợp nhất.



Hình 5. Mật độ của ma trận hệ số của Bài toán 2

5. Kết luận

Nghiệm của pháp không lưới RBF-FD giải phương trình Poisson trong không gian 3 chiều với k -điểm gần nhất có độ chính xác tốt trên miền khối cầu. Tuy nhiên, trên miền khối hình hộp, để tăng độ chính xác của nghiệm của phương pháp ta cũng cần tăng thời gian tính toán. Hy vọng đây là kết quả tạo tiền đề cho nhóm tác giả tiếp tục nghiên cứu về phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều.

LỜI CẢM ƠN

Bài báo được tài trợ bởi Đề tài cấp cơ sở, mã số T2019-07-16 của Trường Đại học Công nghệ thông tin và truyền thông - Đại học Thái Nguyên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. A. I. Tolstykh and D. A. Shirobokov, "On using radial basis functions in a 'finite difference mode' with applications to elasticity problems", *Computational Mechanics*, 33(1), pp. 68-79, 2003.
- [2]. G. B. Wright and B. Fornberg, "Scattered node compact finite difference-type formulas generated from radial basis functions", *J. Comput. Phys.*, 212(1), pp. 99-123, 2006.
- [3]. O. Davydov and D. T. Oanh, "Adaptive meshless centres and RBF stencils for Poisson equation", *J. Comput. Phys*, 230, pp. 287-304, 2011.
- [4]. O. Davydov and D. T. Oanh, "On the optimal shape parameter for Gaussian Radial Basis Function finite difference approximation of Poisson equation", *Computers and Mathematics with Applications*, 62, pp. 2143-2161, 2011.
- [5]. D. T. Oanh, O. Davydov, and H. X. Phu, "Adaptive RBF-FD method for elliptic problems with point Singularities in 2d", *Applied Mathematics and Computation*, 313, pp. 474-497, 2017.
- [6]. Trần Xuân Tiệp, *Nghiên cứu một số thuật toán chọn k láng giềng gần trong 2D và áp dụng cho phương pháp RBF-FD giải phương trình poisson*, Luận văn thạc sĩ khoa học máy tính, Trường đại học Công nghệ thông tin - Đại học Thái Nguyên, 2014.
- [7]. Đặng Thị Oanh và Nguyễn Văn Tảo, "Nghiên cứu thuật toán chọn k -láng giềng gần với hai điều kiện dừng cho phương pháp RBF-FD giải phương trình Poisson trong 2D", *Kỷ yếu Hội thảo Fair*, tr. 509-514, DOI: 10.15625/vap.2016.00062, 2016.
- [8]. C. K. Lee, X. Liu, and S. C. Fan, "Local multiquadric approximation for solving boundary value problems", *Comput. Mech*, 30(5-6), pp. 396-409, 2003.
- [9]. G. F. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 2007.
- [10]. M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2003.

