

BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM CHUYỂN TIẾP TỪ TRUNG BÌNH CỘNG THÀNH TRUNG BÌNH BẬC $k > 1$ TÙY Ý

Phạm Thị Linh*, Nguyễn Thị Thu Hằng

Trường Đại học Kinh tế và Quản trị Kinh doanh – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Phương trình và bất phương trình hàm là một nội dung khó. Nội dung này thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Lý thuyết về phương trình và bất phương trình hàm có mặt ở hầu hết các lĩnh vực và có nhiều ứng dụng trong đời sống cũng như trong kỹ thuật. Sự phát triển của nó đóng góp rất nhiều cho sự phát triển của toán học và ảnh hưởng rất nhiều đến các lĩnh vực khác như kinh tế học, sinh thái học, lý thuyết thông tin, thống kê,... Trong bài báo này chúng tôi sẽ nghiên cứu về bất phương trình hàm chuyển tiếp từ trung bình cộng thành trung bình cộng, trung bình bậc hai và trung bình bậc $k > 1$ tùy ý và một số dạng toán liên quan.

Keywords: *Hàm, phương trình hàm, bất phương trình hàm, trung bình cộng, trung bình bậc hai.*

Ngày nhận bài: 26/6/2019; Ngày hoàn thiện: 14/8/2019; Ngày đăng: 19/8/2019

FUNCTIONAL INEQUALITIES INDUCED BY ARITHMETIC MEAN TO MEAN OF DEGREE $k > 1$

Phạm Thị Linh*, Nguyễn Thị Thu Hằng

University of Economics and Business Administration - TNU

ABSTRACT

Functional equalities and inequalities are difficult. Many authors studied functional equations and inequalities. The development used to application in several areas - not only in mathematics but also in other disciplines. Functional equalities and inequalities are applied computers, economics, polynomials, engineering, information theory, reproducing scoring system, taxation, etc. In this paper, we establish some functional inequalities induced by arithmetic mean to arithmetic mean, quadratic mean and mean of degree $k > 1$ with k is a positive interger and their related problems.

Keywords: *Functional, functional equalities, functional inequalities, arithmetic mean, quadratic mean.*

Received: 26/6/2019; Revised: 14/8/2019; Published: 19/8/2019

* Corresponding author. Email: linhpham19101985@gmail.com

1. Một số kiến thức bổ trợ

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát các dạng toán bất phương trình hàm chuyển tiếp từ

Trung bình cộng của các đối số (xem [1, 2])

$$\frac{x+y}{2}; x, y \in \mathbb{R};$$

Trung bình bình phương của các đối số (xem [1, 2])

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}; x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Trung bình bậc k ($k > 1$) của các đối số

$$\left(\frac{x^k+y^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}; x, y \in \mathbb{R}^+;$$

thành các đại lượng

Trung bình cộng của các hàm số (xem [1, 2])

$$\frac{f(x)+f(y)}{2};$$

Trung bình bình phương của các hàm số (xem [1, 2])

$$\sqrt{\frac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}};$$

Trung bình bậc k ($k > 1$) của các hàm số

$$\left(\frac{[f(x)]^k+[f(y)]^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Để giải một số bài toán liên quan đến bất phương trình hàm, chúng tôi đã sử dụng phương pháp quy nạp, phương pháp thế,...

Chú ý 1. Để sử dụng phương pháp thế, ta thường thay các giá trị đặc biệt:

+) Ví dụ thay $x = a$ sao cho $f(a)$ xuất hiện nhiều trong phương trình.

+) $x = a$, $y = b$ rồi hoán vị, thay đổi đi để tìm liên hệ giữa $f(a)$ và $f(b)$.

+) Đặt $f(0) = b$, $f(1) = b$, ...

+) Nếu f là toàn ánh, tồn tại a : $f(a) = 0$ (dùng trong phương trình cộng), còn nếu tồn tại a : $f(a) = 1$ (nếu trong phương trình có nhân). Chọn x, y phù hợp để triệt tiêu đi $f(g(x, y))$ có trong phương trình. Hàm có x bên ngoài thì cố gắng chỉ ra nó là đơn ánh hoặc toàn ánh.

+) Làm xuất hiện $f(x)$.

+) $f(x) = f(y)$ với mọi $x, y \in A$ suy ra $f(x) = \text{const}$ với mọi $x \in A$.

2. Bất phương trình hàm chuyển tiếp từ trung bình cộng thành trung bình bậc tùy ý

Trong mục này, chúng tôi xét các dạng toán về bất phương trình hàm chuyển tiếp từ các đại lượng trung bình cộng của các đối số vào các đại lượng trung bình cộng, trung bình cộng bậc hai và trung bình bậc tùy ý của các hàm số. Một số trường hợp đơn giản đã được xét trong tài liệu [3].

Bài toán 1 (Trung bình cộng thành trung bình cộng). Cho các số thực a, b . Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

và

$$f(0) = b, \quad f(t) \geq at + b, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lời giải. Thế $x = t$, $y = -t$ vào (1), ta thu được

$$\begin{aligned} b &= f(0) \\ &= f\left(\frac{t+(-t)}{2}\right) \\ &\geq \frac{f(t)+f(-t)}{2} \\ &\geq \frac{(at+b)+(-at+b)}{2} \\ &= b, \end{aligned}$$

với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t) \equiv at + b$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện (1)-(2). Vậy nghiệm của bài toán đã cho là

$$f(t) \equiv at + b.$$

Từ đây, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1 (xem [3]). Các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

và

$$f(0) = 0, \quad f(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

là hàm số $f(x) \equiv 0$.

Bài toán 2 (Trung bình cộng thành trung bình bậc hai). Tìm các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

và $f(0) = 0$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$(5) \Leftrightarrow \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 \geq \frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2},$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ hay

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{g(x) + g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

với $g(x) = [f(x)]^2 \geq 0$.

Theo kết quả của Hệ quả 1 thì $g(x) \equiv 0$. Suy ra $f(x) \equiv 0$.

Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Vậy

$$f(t) \equiv 0.$$

Bài toán 3 (Trung bình cộng thành trung bình bậc tùy ý). Cho số $k > 1$. Tìm các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt[k]{\frac{[f(x)]^k + [f(y)]^k}{2}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (6)$$

và $f(0) = 0$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$(6) \Leftrightarrow \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^k \geq \frac{[f(x)]^k + [f(y)]^k}{2},$$

với $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Hay

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{g(x) + g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

với $g(x) = [f(x)]^k \geq 0$.

Theo kết quả của Hệ quả 1 thì $g(x) \equiv 0$. Suy ra $f(x) \equiv 0$.

Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Kết luận:

$$f(t) \equiv 0.$$

3. Một số dạng toán liên quan

Trong mục này, ta xét một số bài toán cụ thể liên quan đến bất phương trình hàm. Các bài toán này được tham khảo chính từ các tài liệu số [1, 4, 5].

Bài toán 4. Xác định các hàm số $f(t)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$f(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Lời giải. Thế $x = 0, y = 0$ vào (8), ta thu được $f(0) \geq 2f(0)$, suy ra $f(0) \leq 0$. Kết hợp với (7) ta được $f(0) = 0$.

Tiếp theo, thế $x = t, y = -t$ vào (8), ta có $0 = f(0) = f(t + (-t)) \geq f(t) + f(-t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t) \equiv 0$.

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện (7) và (8).

Vậy nghiệm của bài toán là $f(t) \equiv 0$.

Bài toán 5. Cho hàm số $h(t) = at$, $a \in \mathbb{R}$. Xác định hàm số $f(t)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) $f(t) \geq h(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Lời giải. Để ý rằng $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Đặt $f(t) = h(t) + g(t)$. Khi đó ta thu được các điều kiện

- (i) $g(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (ii) $g(x+y) \geq g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Lập lại cách giải của Bài toán 4, thay $t = 0$ vào điều kiện đầu bài, ta thu được

$$\begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(0) = 0$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} 0 &= g(0) \\ &= g(x + (-x)) \\ &\geq g(x) + g(-x) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Điều này kéo theo $g(t) \equiv 0$ hay $f(t) = at$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(t) = at$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 6. Cho số dương a . Xác định các hàm số $f(t)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) $f(t) \geq a^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (ii) $f(x+y) \geq f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Lời giải. Để ý rằng $f(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Vậy ta có thể logarit hóa hai vế các bất đẳng thức của điều kiện đã cho:

- (i) $\ln f(t) \geq (\ln a)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (ii) $\ln f(x+y) \geq \ln f(x) + \ln f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Đặt $\ln f(t) = \varphi(t)$, ta thu được

- (i) $\varphi(t) \geq \ln at$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- (ii) $\varphi(x+y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Ta nhận được Bài toán 5. Như vậy

$$\varphi(t) = (\ln a)t.$$

Suy ra $f(t) = a^t$. Thử lại ta thấy hàm số $f(t) = a^t$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét 1.

- Với $0 < a < 1$ thì ta có $a^t > 1 + t$, với mọi $t < 0$ và $a^t < 1 + t$, $\forall t \geq 0$;
- Với $a \geq 1$ thì ta có $a^t > 1 + t$, với mọi $t < 0$; $a^t \leq 1 + t$, với mọi $t \in [0; 1)$ và $a^t \geq 1 + t$, với mọi $t \geq 1$.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: Trong Bài toán 6, có thể thay hàm số $g(t) = a^t$ bởi hàm số nào để bài toán cũng có nghiệm không tầm thường?

Từ Nhận xét 1, ta xét hàm số $g(t) = t + 1$. Khi đó ta có bài toán sau.

Bài toán 7. Xác định các hàm số $f(t)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) $f(x+y) \geq f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
- (ii) $f(t) \geq 1 + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) \geq f^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(x_0) = 0$, thì

$$0 = f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2}\right) \geq f^2\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

Do đó $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 0$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ với mỗi số nguyên dương n .

Tuy nhiên, từ điều kiện thứ hai của bài toán suy ra rằng $f(x) > 0$ với x gần 0. Do đó điều giả thiết trên là mâu thuẫn.

Vậy $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng f khả vi tại mỗi điểm $x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = f(x)$.

Thật vậy, từ (i) và (ii), với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &\geq f(x)f(h) - f(x) \\ &= (f(h) - 1)f(x) \\ &\geq hf(x). \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq f(x).$$

Mặt khác, cũng từ (i) và (ii), với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x+h-h) \\ &\geq f(x+h)f(-h) \\ &\geq (1-h)f(x+h). \end{aligned}$$

Suy ra

$$(1-h)f(x) + hf(x) \geq (1-h)f(x+h).$$

Do đó

$$hf(x) \geq (1-h)(f(x+h) - f(x))$$

hay

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}.$$

Vậy, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}.$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h < 0$ đủ nhỏ.

Do đó, ta có

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tồn tại và bằng $f'(x)$, với $x \in \mathbb{R}$.

Từ đó, với $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0.$$

Do đó $f(x) = C.e^x$, C là hằng số.

Hơn nữa, từ (i) ta có $f(0) \geq f^2(0)$ hay $f(0) \leq 1$ và từ (ii) ta có $f(0) \geq 1$.

Do đó $C = f(0) = 1$.

Thử lại, hàm $f(x) = e^x$ thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii).

Như vậy, với $g(x) = a^x$ hoặc $g(x) = 1 + x$ (6) và (7) đều giải được.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu (1997), *Phương trình hàm*, NXB Giáo dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (2016), *Phương trình hàm với đối số biến đổi*, NXB ĐHQG Hà Nội.
- [3] Phạm Thị Vi (2014), *Phương trình và bất phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình*, Luận văn Thạc sỹ, ĐHKH, ĐH Thái Nguyên.
- [4] Titu Andresscu, Iurie Boreico (2007), *Functional equations - 17 Chapters and 199 Problems with Solution*, Electronic Edition.
- [5] Trịnh Đào Chiến (2012), *Giải bất đẳng thức hàm bằng phương pháp chuyển qua giới hạn dãy số*, Kỷ yếu HTKH, Các chuyên đề toán học bồi dưỡng học sinh giỏi, Quy Nhơn, 14-15/04/ 2012.