ĐỘ PHỨC TẠP TÔPÔ BẬC CAO CỦA TÍCH KẾT CÁC MẶT CẦU

Trần Huệ Minh*, Nguyễn Văn Ninh
Trường Đại học Sư phạm – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Năm 2010, Rudyak đã đưa ra khái niệm về độ phức tạp topô bậc cao của một không gian tô pô liên thông thường. Đây là một bất biến đồng luân, nó đo sự tồn tại của kế hoạch chuyển động bậc cao và có nhiều quan hệ với các bất biến khác. Việc tính toán độ phức tạp topô bậc cao trong trường hợp tổng quát là khó. Trong bài báo này, bằng việc xây dựng trực tiếp các nhát cắt trên các tập ENR, chúng tôi tính toán độ phức tạp tô pô bậc cao của tích kết các mặt cầu.

Từ khóa: *kế hoạch chuyển động, độ phức tạp tô pô, nhát cắt, bất biến đồng luân, tích kết*

Ngày nhận bài: 01/8/2019; Ngày hoàn thiện: 22/8/2019; Ngày đăng: 26/8/2019

THE HIGHER TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF WEGDE PRODUCT OF SPHERES

Tran Hue Minh*, Nguyen Van Ninh
University of Education – TNU

ABSTRACT

In 2010, Rudyak introduced the concept of higher topological complexity of a topological space. This is a homotopy invariant, which measures the existence of higher motion plans and has many relations with other invariants. It is difficult to calculate higher topological complexity in the general case. In this paper, by directly constructing sections on ENRs, we compute directly the higher topological complexity of wegde product of spheres.
Keyword: *Motion planning, topological complexity, homotopy invariant, wegde product.*

Received: 01/8/2019; Revised: 22/8/2019; Published: 26/8/2019

* Corresponding author. *Email: tranhueminh@gmail.com*

1 Khái niệm và một số tính chất cơ bản

Mở rộng khái niệm về độ phức tạp tôpô, năm 2010, YB .Rudyak đã đưa ra khái niệm về độ phức tạp tôpô bậc cao cho không gian tôpô liên thông đường như sau (xem [1]).

Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, đặt $J_n = [0;1] \vee [0;1] \vee ... \vee [0;1]$ là kết của n đoạn thẳng đơn vị tại điểm 0. Ký hiệu X^{J_n} là tập các ánh xạ liên tục $\gamma : J_n \to X$. Khi đó X^{J_n} là không gian tôpô với tôpô compact mở. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} e_n^X : X^{J_n} &\to X^n \\ \gamma &\mapsto (\gamma(1_1), \gamma(1_2), ..., \gamma(1_n)). \end{aligned}$$

1_i là điểm 1 của đoạn $[0;1]$ thứ i trong J_n. Khi đó, e_n là phân thớ theo nghĩa Sere và thớ F đồng luân với $(\Omega X)^{n-1}$.

Định nghĩa 1. Độ phức tạp tôpô của X là số nguyên dương bé nhất $TC_n(X) = k$ thoả mãn X^n có thể phủ bởi k tập mở $U_1, ..., U_k$ sao cho trên mỗi U_i tồn tại một nhát cắt liên tục $s_i : U_i \to PX$ tức là $e_n^X s_i = id_{U_i}$ với mọi $i = 1, ..., k$.

Từ định nghĩa ta có $TC_n(X) = 1$ khi và chỉ khi X co rút được (xem [2]). Trong trường hợp tổng quát việc tính toán bất biến này khá phức tạp. Để làm được điều này, người ta thương phải đưa ra chặn trên và chặn dưới.

Mệnh đề sau cho ta chặn dưới của $TC_n(X)$ (xem [1])

Mệnh đề 1. *Cho X là không gian liên thông đường và $d_n : X \to X^n$ là ánh xạ đường chéo tương ứng. Nếu tồn tại các lớp đối đồng điều $u_1, ..., u_m \in H^*(X^n, \mathbb{Z})$ thỏa mãn:*

i. $d_n^* u_i = 0$ với mọi $i = 1, ..., m$,

ii. Lớp $u_1 ... u_m \in H^*(X^n, \mathbb{Z})$ khác không.

Khi đó $TC_n(X) \geq m + 1$.

Chú ý rằng, nếu X là không gian tôpô có kiểu đồng luân của một $CW-$ phức hữu hạn chiều thì (xem [3])

$$H^*(X^n, \mathbb{Z}) \cong H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes ... \otimes H^*(X, \mathbb{Z}) \ \ (n \text{ lần }).$$

Mệnh đề tiếp theo cho ta một chặn trên của độ phức tạp tôpô bậc cao

Mệnh đề 2. *Cho X là là một không gian tôpô có kiểu đồng luân của một polyhedron. Khi đó, nếu $X^n = X_1 \cup ... \cup X_k$, mỗi X_i là ENR và trên mỗi X_i tồn tại $s_i : X_i \to X^{J_n}$ sao cho $e_n^X \circ s_i = id_{X_i}$ thì $TC_n(X) \leq k$. .*

Chứng minh. Ta mở rộng mỗi tập X_i như trên thành một tập con mở trong X^n mà trên đó tồn tại nhát cắt liên tục của e_n^X . Với mỗi tập ENR X_i và phép nhúng $X_i \subset X^n \subset \mathbb{R}^N$. Đặt $r : V \to X_i$ là co rút lân cận. Khi đó tồn tại tập mở U của V với $X \subset U \subset V$ thỏa mãn các ánh xạ $U \subset V$ và $U \subset V \xrightarrow{r} X_i \subset V$ đồng luân. Do đó tồn tại một đồng luân $H : U \times I \to V, H(u,0) = u, H(u,1) \subset X_i$. Xét nhát cắt $s : X_i \to X^{J_n}$ và đặt $g : U \to X^{J_n}, g(u) = sH(u,1)$. Sử dụng tính chất mở rộng đồng luân để xây dựng một đồng luân $G : U \times I \to E$ với $pG = H$ và $G(u,1) = g(u)$. Khi đó $\sigma : U \to E, \sigma(u) = G(u,0)$ là nhát cắt liên tục trên U. □

Thực chất về sau khi xây dựng các nhát cắt ta thường xây dựng trên các tập ENR.

2 Độ phức tạp tôpô bậc cao của tích kết các mặt cầu

Trong phần này bằng việc sử dụng các kết quả của Mệnh đề 1 và Mệnh đề 2, chúng tôi tính toán trực tiếp kết quả về độ phức tạp tôpô bậc cao của các mặt cầu.

Định lý 1. *Giả sử X là tích kết của hữu hạn các mặt cầu bất kì, nghĩa là $X = \mathbb{S}^{k_1} \vee \cdots \vee \mathbb{S}^{k_m}$, $k_i \geq 1, m > 1$. Khi đó $TC_n(X) = n + 1$.*

Chứng minh. Theo kết quả về vành đại số đối đồng điều của X, ta có $H^*(X)$ có m phần tử sinh $u_i \in H^{k_i}(X), i = 1, ..., m$ thỏa mãn điều kiện $u_i u_j = 0$, với mọi i, j. Từ $m > 1$, ta chọn hai phần tử sinh phân biệt u_i, u_j, $i \neq j$. Đặt

$\bar{u}_{it} = 1 \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes \overset{t}{\overset{\vee}{u_i}} \otimes ... \otimes 1 - u_i \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes 1,$ với $t = 2, ..., n,$

$\bar{u}_j = 1 \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes u_j - u_j \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 \otimes 1.$

Khi đó các phần tử $\bar{u}_{it}, \bar{u}_j$ đều thuộc $H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes ... \otimes H^*(X, \mathbb{Z})$. Mặt khác ta có

$$\bar{u}_j \prod_{t=2}^{n} \bar{u}_{it} = \pm u_j \otimes u_i \otimes ... \otimes u_i \pm u_i \otimes ... u_i \otimes u_j \neq 0.$$

Hơn nữa, $d_n^*\bar{u}_{it} = d_n^*\bar{u}_j = 0$. Do đó, theo Mệnh đề 1 ta có $TC_n(X) \geq n+1$.

Để chứng minh định lý ta chỉ cần chứng minh $TC_n(X) \leq n+1$. Gọi P là điểm cơ sở của tích kết $X = \mathbb{S}^{k_1} \vee \cdots \vee \mathbb{S}^{k_m}$, $P_i \in \mathbb{S}^{k_i}$ là các điểm xuyên tâm đối của P trong $\mathbb{S}^{k_i}$ tương ứng. Cố định đường đi γ_i từ P tới P_i và kí hiệu γ_i^{-1} là đường đi ngược lại.

Ta phân tích $\mathbb{S}^{k_i} = U_i \cup V_i$, với U_i, V_i là các tập ENR và $U_i \cap V_i = \emptyset$, $P \in U_i$, $P_i \in V_i$. Khi đó $X \times X$ là hợp rời của các tập $U_i \times U_j, U_i \times V_j, V_i \times U_j, V_i \times V_j$, $1 \leq i, j \leq m$. Với $(A, B) \in X \times X$, ta xây dựng đường đi, kí hiệu $[A, B]$ từ A đến B như sau

+ Nếu $(A, B) \in U_i \times U_j$ thì $[A, B] = [A, P] * [P, B]$, chính là đường đi từ A đến B qua P.

+ Nếu $(A, B) \in U_i \times V_j$ thì $[A, B] = [A, P] * \gamma_j * [P_j, B]$: là đường đi từ A tới B qua P và P_j.

+ Nếu $(A, B) \in V_i \times U_j$ thì $[A, B] = [A, P_i] * \gamma_i^{-1} * [P, B]$: là đường đi từ A tới B qua P_i và P

+ Nếu $(A, B) \in V_i \times V_j$ thì $[A, B] = [A, P_i] * \gamma_i^{-1} * \gamma_j * [P_j, B]$: là đường đi từ A tới B qua P_i, P và P_j.

Ở đây, $[A, P]$, $[A, P_i]$, $[P, B]$, $[P_j, B]$ là đường trắc địa từ A to P, P_i và từ P và P_j tới B tương ứng.

Đặt $U = \cup U_i$, $V = \cup V_i$. Khi đó với mỗi tập con $K \subset \{1, 2, ..., n\}$ ta xét

$$X_K = \{(A_1, ..., A_n) | A_i \in V \text{ if only if } i \in K\}, \text{ and}$$

$$X_k = \bigcup_{|K|=k} X_K.$$

Xét ánh xạ

$$\Phi : X^n \longrightarrow X^{J_n}.$$

biến mỗi bội $(A_1, A_2, ..., A_n) \in X^n$ thành $([A_1, A_1], [A_1, A_2], ..., [A_1, A_n]) \in X^{J_n}$ Ta có $\Phi|_{D_k} : D_k \longrightarrow X^{J_n}$ là nhát cắt liên tục của e_n^X. Hơn nữa, D_k, $k = 0, ..., n$ là các tập ENR và phủ X^n. Do đó theo Mệnh đề 2 $TC_n(X) \leq n+1$. Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Kết luận: Độ phức tạp tôpô bậc cao của một không gian tôpô là một bất biến đồng luân. Theo kết quả trong [2] thì $TC_n(X) = 1$ khi và chỉ khi X là không gian co rút được. Trong trường hợp tổng quát việc tính toán bất biến này là khó. Trong bài báo này, chúng tôi tính toán trực tiếp độ phức tạp tôpô bậc cao của tích kết các mặt cầu. Cụ thể, để ước lượng chặn dưới chúng tôi sử dụng đối đồng điều kì dị, để ước lượng chặn trên chúng tôi đã xây dựng trực tiếp nhát cắt trên các tập ENR.

Tài liệu

[1] Yuli B. Rudyak, "On higher analogs of topological complexity", *Topology and its Applications*, 157, 916-920, 2010.

[2] Trần Huệ Minh, Nguyễn Văn Ninh , "Sự tồn tại kế hoạch chuyển động bậc cao", *Tạp chí KH&CN Đại học Thái Nguyên* Tập 172, số 12, pp55-58, 2017 .

[3] E.Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.