

ĐỘ PHỨC TẠP TÔPO BẬC CAO CỦA DIỆN RIEMANN COMPACT

Trần Huệ Minh*, Nguyễn Văn Ninh
Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Diện Riemann compact Σ_g là các đa tạp compact hai chiều định hướng được. Đây là đối tượng hình học trong R^3 có nhiều tính chất hình học đẹp và được quan tâm nghiên cứu nhiều trong hình học vi phân. Độ phức tạp tôpô bậc cao là một bất biến tôpô được Y. B. Rudyak đưa ra năm 2010, đây là khái niệm tổng quát của khái niệm độ phức tạp tôpô được M. Faber đưa ra trước đó. Các vấn đề liên quan tới độ phức tạp tôpô và độ phức tạp tôpô bậc cao được quan tâm nghiên cứu để áp dụng giải quyết một số bài toán trong lý thuyết robotic trong những năm gần đây. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra kết quả tính toán độ phức tạp tôpô bậc cao của các diện Riemann compact định hướng với giống g bất kỳ.

Từ khóa: *Diện Riemann compact; đa tạp compact; độ phức tạp tôpô bậc cao; đa tạp định hướng được; giống.*

Ngày nhận bài: 25/11/2020; Ngày hoàn thiện: 30/11/2020; Ngày đăng: 30/11/2020

THE HIGHER TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF A COMPLEMENT OF COMPLEX LINES ARRANGEMENT

Tran Hue Minh*, Nguyen Van Ninh
TNU - University of Education

ABSTRACT

The Riemann compact surface Σ_g is an oriented two-dimensional compact manifold. This geometry object in R^3 has many beautiful geometrical properties and is interested in much research in differential geometry. Higher topological complexity is a topological invariant introduced by Y. B. Rudyak in 2010, which is a general concept of topological complexity. Related problems of topological complexity and higher topological complexity have been mentioned in a lot of studies to solve some problems in robotic theory in recent years. In this paper, we give the results of calculating the high order topological complexity of the oriented Riemann compact surface with genus g .

Keyword: *Riemann compact surface; compact manifold; higher topological complexity; oriented manifold; genus*

Received: 25/11/2020; Revised: 30/11/2020; Published: 30/11/2020

* Corresponding author. Email: tranhueminh@gmail.com

1. Độ phức tạp tôpô bậc cao

Cho X là một không gian tôpô liên thông đường, $J_n, n \in \mathbb{N}$ là tích kết của n đoạn đơn vị $[0, 1]_i, i = 1, \dots, n$ tại điểm cơ sở là 0. Đặt X^{J_n} là không gian các ánh xạ liên tục từ J_n tới X với tôpô compact mở. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} e_n : X^{J_n} &\longrightarrow X^n, \\ \gamma &\longmapsto (\gamma(1_1), \dots, \gamma(1_n)) \end{aligned}$$

với 1_i là đơn vị của $[0, 1]$ thứ i tương ứng. Khi đó e_n là một phân thớ theo nghĩa Serre.

Định nghĩa 1. [1] Độ phức tạp tôpô bậc cao $TC_n(X)$ của không gian tôpô X là số nguyên dương nhỏ nhất k thỏa mãn tồn tại một phủ mở $\{X_i, i = 1, \dots, k\}$ của X^n sao cho trên mỗi tập X_i tồn tại nhát cắt liên tục $s_i : X_i \rightarrow X^{J_n}$ của e_n (nghĩa là, $e_n \circ s_i = id_{X_i}$).

Định nghĩa này được Y. Rudyak đưa ra trong [1]. Trong trường hợp $n = 2$, $TC_2(X)$ trùng với khái niệm độ phức tạp tôpô $TC(X)$ được M. Farber đưa ra trong [2].

Có thể hiểu $TC_n(X)$ là giống Schwarz của phân thớ e_n .

Remark 1. Chú ý rằng e_n là cái thớ phân thớ của $d_n : X \rightarrow X^n$ (nghĩa là tồn tại một tương đương đồng luân $h : X \rightarrow X^{J_n}$ sao cho $d_n = e_n \circ h$) và do đó $TC_n(X)$ cũng là giống Schwarz của ánh xạ d_n (xem [1]).

Sau đây là một số tính chất quan trọng của TC_n .

1. Cho X là không gian liên thông đường có kiểu đồng luân của polyhedron n chiều thì

$$TC_n(X) \leq \dim X + 1. \quad (1)$$

2. Cho X và Y là các không gian liên thông đường. Khi đó

$$TC_n(X \times Y) \leq TC_n(X) + TC_n(Y) - 1. \quad (2)$$

3. Vì e_n là cái thớ phân thớ của ánh xạ $d_n : X \rightarrow X^n$ nên ta có tính chất sau: Giả sử m là một số nguyên dương, $u_i \in H^*(X^n)$ với $i = 1, \dots, m$ là các lớp đối đồng điều thỏa mãn $d_n^* u_i = 0$ và $u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_k \neq 0 \in H^*(X^n)$. Khi đó $TC_n(X) \geq k + 1$.

Remark 2. Giả sử X là không gian liên thông đường và u một lớp đối đồng điều trong $H^*(X)$. Đặt

$$\bar{u} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{i}{u} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \right) - 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes (n-1)u,$$

$$\bar{u}_t = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{t}{u} \otimes \dots \otimes 1 - u \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes 1.$$

Đây là các lớp đối đồng điều trong $H^*(X^n) \cong \underbrace{H^*(X) \otimes \dots \otimes H^*(X)}_{n \text{ lần}}$ thỏa mãn $d_n^* \bar{u} = 0$ và $d_n^* \bar{u}_t = 0$ với mọi $t = 2, \dots, n$.

Việc tính toán độ phức tạp tôpô trường hợp tổng quát rất phức tạp. Do đó, thông thường ta chỉ có thể đưa ra các chặn trên và chặn dưới cho bất biến này.

2. Độ phức tạp tôpô bậc cao của phần bù các diện Riemann compact

Trong phần này, chúng tôi đưa ra kết quả cụ thể về độ phức tạp tôpô bậc cao của các diện Riemann compact.

Mệnh đề 1. [3] $X = \Sigma_g, g > 1$ là mặt Riemann compact với giống g . Khi đó $H^*(X) = H^*(X, \mathbb{Q})$ sinh bởi các phần tử $u_1, \dots, u_g, v_1, \dots, v_g \in H^1(X)$ với quan hệ $u_i u_j = v_i v_j = u_i v_j = 0$ với mọi $i \neq j$, $u_i^2 = v_i^2 = 0$ và $u_i v_i \neq 0$.

Định lý sau cho ta kết quả độ phức tạp tôpô bậc cao của mặt Riemann compact với giống g .

Định lý 1. Σ_g là mặt Riemann compact với giống g

$$TC_n(\Sigma_g) = \begin{cases} n+1 & \text{nếu } g=0 \\ 2n-1 & \text{nếu } g=1 \\ 2n+1 & \text{nếu } g>1 \end{cases}$$

Chứng minh.

+Trường hợp $g=0$: Σ_g là S^2 . $TC_n(\Sigma_g) = n+1$ (xem [1]).

+Trường hợp $g=1$: Σ_g là xuyên $T = S^1 \times S^1$. Do đó ta có $TC_n(\Sigma_g) = 2n-1$ (xem [4]).

+Trường hợp $g > 1$: Ta chọn được các lớp đối đồng điều $u_1, v_1, u_2, v_2 \in H^1(\Sigma_g, \mathbb{Q})$ thỏa mãn quan hệ sau:

$$u_i^2 = 0, u_i^2 = 0, u_i v_j = u_i u_j = v_i v_j = 0$$

với $i \neq j$ và lớp đối đồng điều

$$0 \neq u_1 v_1 = u_2 v_2 = \omega \in H^2(\Sigma_g, \mathbb{Q}).$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt: } \bar{u}_2 &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes u_2 - u_2 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes 1 \\ \bar{v}_2 &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes v_2 - v_2 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

$$\bar{u}_{1t} = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{t}{u}_1 \otimes \dots \otimes 1 - u_1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes 1$$

$$\bar{v}_{1t} = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{t}{v}_1 \otimes \dots \otimes 1 - v_1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes 1$$

với $t = 2, \dots, n$.

Đặt

$$\pi = \bar{u}_2 \prod_{t=2}^n \bar{u}_{1t} (\bar{v}_2 \prod_{t=2}^n \bar{v}_{1t})$$

Khi đó

$$\pi = 2\varepsilon\omega \otimes \omega \otimes \dots \otimes \omega$$

ở đây $\varepsilon = \pm 1$.

Mặt khác ta có $d_n^* \bar{u}_{1t} = d_n^* \bar{v}_{1t} = d_n^* \bar{u}_2 = d_n^* \bar{v}_2 = 0$.

Theo tính chất về chặn dưới ta có $TC_n(\Sigma_g) \geq 2n + 1$.

Mặt khác do Σ_g có chiều là 2 nên áp dụng bất đẳng thức (1) ta có $TC_n(\Sigma_g) \leq 2n + 1$.

Vậy $TC_n(\Sigma_g) = 2n + 1$. $\square$

Hệ quả 1. Cho $X = \Sigma_g$ với $g > 1$. Khi đó ta có

$$TC_n((\Sigma_g)^k) \leq 2nk + 1.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức (2) $k - 1$ lần ta được

$$TC_n((\Sigma_g)^k) \leq k(2n + 1) - (k - 1) = 2nk + 1.$$

$\square$

3. Kết luận

Trong bài báo này, bằng phương pháp sử dụng các tính chất chặn trên về chiều và chặn dưới thông qua đối đồng điều kì dị chúng tôi đã đưa ra kết quả về độ phức tạp tôpô bậc cao của diện Riemann compact.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Yuli B. Rudyak, "On higher analogs of topological complexity," *Topology and its Applications*, vol. 157, p.p 916-920, 2010.
- [2]. M.Farber, "Topology of robot motion planning," *Topology and its Application*, vol. 140, pp. 245 - 266, 2004
- [3]. Allen Hatcher., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [4]. I. Basabe, J. González, Y.B. Rudyak, and D. Tamaki, "Higher topological complexity and its symmetrization," *Algebraic and Geometric Topology* vol. 14, pp.2103-2124, 2014.