

GONDRAN-MINOUX ENVELOPING RANK OF MATRICES ON SEMIRINGS**Ha Chi Cong***University of Finance and Accountancy*

ARTICLE INFO		ABSTRACT
Received:	21/7/2022	In semiring theory, rank of matrices and its characteristic properties have played an important role in the semirings structure analysis and have achieved many interesting results on the class of commutative semirings, including Gondran-Minoux rank and Gondran-Minoux enveloping rank of matrices. These rank functions have been considered on the class of entire zerosumfree semirings such as max-plus semiring, extensions of the max-plus semiring, quasi-selective semiring without zero divisors, etc. However, there are not many research results about Gondran-Minoux enveloping rank of matrices over general semirings now. In this paper, we review definitions which relate to Gondran-Minoux enveloping rank of matrices, considering several characteristic inequalities of Gondran-Minoux enveloping column rank of matrices on class of commutative semirings, comparing with factor rank of matrices, indicating the necessary and sufficient conditions for Gondran-Minoux enveloping column rank and factor rank of all matrices to coincide, indicate several cases of Gondran-Minoux enveloping column rank and Gondran-Minoux enveloping row rank equals.
Revised:	19/8/2022	
Published:	19/8/2022	
KEYWORDS		
Semiring		
Semi module		
Matrix		
Gondran-Minoux linear independence		
Gondran-Minoux enveloping rank		
Weak dimension		

HẠNG PHỦ GONDRAN-MINOUX CỦA MA TRẬN TRÊN NỬA VÀNH**Hà Chí Công***Trường Đại học Tài chính – Kế toán*

THÔNG TIN BÀI BÁO		TÓM TẮT
Ngày nhận bài:	21/7/2022	Trong lý thuyết nửa vành, hạng của ma trận và các tính chất đặc trưng của nó đã đóng vai trò quan trọng trong phân tích cấu trúc nửa vành và đã đạt được nhiều kết quả thú vị trên lớp các nửa vành giao hoán, trong đó, có hạng Gondran-Minoux và hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận. Các hàm hạng này đã được xem xét trên lớp các nửa vành phi khả đối nguyên như: nửa vành max-plus, các mở rộng của nửa vành max-plus, nửa vành tựa lựa chọn không có ước của không,... Tuy nhiên, hiện vẫn chưa có nhiều kết quả nghiên cứu về hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận trên nửa vành tổng quát. Trong bài báo này, chúng tôi nhắc lại các định nghĩa liên quan đến hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận, xem xét một số bất đẳng thức đặc trưng của hạng cột phủ Gondran-Minoux của ma trận trên lớp nửa vành giao hoán, so sánh nó với hạng nhân tử của ma trận, chỉ ra điều kiện cần và đủ để hạng cột phủ Gondran-Minoux và hạng nhân tử của mọi ma trận trùng nhau, chỉ ra vài trường hợp hạng cột phủ Gondran-Minoux và hạng dòng phủ Gondran-Minoux bằng nhau.
Ngày hoàn thiện:	19/8/2022	
Ngày đăng:	19/8/2022	
TỪ KHÓA		
Nửa vành		
Nửa môđun		
Ma trận		
Độc lập tuyến tính Gondran-Minoux		
Hạng phủ Gondran-Minoux		
Chiều yếu		

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.6278>*Email: hachicong@tckt.edu.vn*<http://jst.tnu.edu.vn>*Email: jst@tnu.edu.vn*

1. Giới thiệu

Trong lý thuyết nửa vành [1], hạng của ma trận và các tính toán ma trận trên nửa vành được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây, đặc biệt là trên lớp nửa vành giao hoán, và đã đạt được nhiều kết quả thú vị, xem [2] - [9]. Có khá nhiều định nghĩa về hạng của ma trận trên nửa vành được đưa ra, trong đó có hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận [4]. Định nghĩa này được đưa ra khi người ta nhận thấy rằng: Chiều Gondran-Minoux của một nửa môđun hữu hạn sinh trên nửa vành cho trước, không phải lúc nào cũng tồn tại. Trong khi đó, trên nửa vành R cho trước, chiều phủ Gondran-Minoux của một nửa môđun hữu hạn sinh M , con của nửa môđun tự do R^n , luôn tồn tại.

Mặc dù hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận đã được phát biểu và xem xét trên các nửa vành cụ thể cũng như nửa vành tổng quát. Tuy nhiên, kết quả thu được vẫn chưa nhiều. Liên quan đến vấn đề này, trong [4, Corollary 6.13], M. Akian, S. Gaubert và A. Guterman đã chỉ ra rằng: Mọi hệ gồm $n+1$ vectơ trong $R_{\max}^n$ đều phụ thuộc tuyến tính Gondran-Minoux. Trong [6], Y. Shitov đã chỉ ra một số bất đẳng thức về hạng Gondran-Minoux của ma trận trên nửa vành tựa lựa chọn không có ước của không. Trong [7], Y. Shitov đã chứng minh một đặc trưng khá thú vị của nửa vành mà trên đó hạng nhân tử và hạng Gondran-Minoux của ma trận trùng nhau. Trong bài báo này, chúng tôi chỉ ra một số tính chất đặc trưng cơ bản của hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận trên nửa vành giao hoán: Chứng minh một số bất đẳng thức hạng, chỉ ra điều kiện cần và đủ để hạng phủ Gondran-Minoux và hạng nhân tử của mọi ma trận là trùng nhau, chỉ ra vài trường hợp hạng dòng phủ Gondran-Minoux và hạng cột phủ Gondran-Minoux của ma trận là bằng nhau. Trước hết, ta có một số định nghĩa là kết quả liên quan dưới đây.

2. Một số định nghĩa và kết quả liên quan

Trong bài viết này, chúng tôi chỉ xét cho nửa vành có đơn vị, các nửa môđun đều là nửa môđun phải trên nửa vành. Để thuận tiện cho việc trình bày, chuyển vị của ma trận A được ký hiệu A^t , ma trận A cấp $m \times n$ thì được viết $A_{m \times n}$, tập hợp các ma trận cấp $m \times n$ (tương ứng $n \times n$) trên nửa vành R được ký hiệu $M_{m \times n}(R)$ (tương ứng $M_n(R)$).

Định nghĩa 2.1 [1]. Nửa vành là một cấu trúc đại số $(R, +, 1, \cdot, 0)$ sao cho $(R, +, 0)$ là một vị nhóm giao hoán với phần tử đơn vị là 0 , $(R, \cdot, 1)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị là 1 , phép nhân phân phối hai phía đối với phép cộng và $0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$ với mọi $r \in R$. Nửa vành R được gọi là giao hoán nếu $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$.

Định nghĩa 2.2 [2]. Cho R là nửa vành, một ma trận vuông $A \in M_n(R)$ được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(R)$ sao cho $AB = BA = I_n$. Ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A và ký hiệu là $B = A^{-1}$. Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n khả nghịch trên nửa vành R được ký hiệu là $GL_n(R)$.

Mệnh đề 2.3 [2]. Cho R là nửa vành giao hoán và các ma trận vuông $A, B \in M_n(R)$, nếu $AB = I_n$ thì $BA = I_n$.

Định nghĩa 2.4 [1]. Một nửa môđun phải trên nửa vành R là một vị nhóm giao hoán $(M, +, 0_M)$ cùng với phép nhân ngoài $(m, r) \rightarrow mr$ từ $M \times R$ đến M thỏa mãn các điều kiện: $m(rr') = (mr)r'$, $(m + m')r = mr + m'r$, $m(r + r') = mr + mr'$, $m1 = m$, $0_M r = 0_M = m0$ với mọi $m, m' \in M$ và $r, r' \in R$.

Định nghĩa 2.5 [1]. Cho M là một nửa môđun phải trên nửa vành R , S là tập con của M . Ta nói M được sinh bởi S nếu mọi phần tử của M đều biểu thị tuyến tính được qua các phần tử của S . Ký hiệu $\langle S \rangle = M$.

Nếu nửa môđun M có một tập sinh hữu hạn thì ta nói M là nửa môđun hữu hạn sinh.

Định nghĩa 2.6 [1]. Cho M là một nửa môđun phải trên nửa vành R , N là tập hợp con khác rỗng của M . Ta nói N là *nửa môđun con* của M nếu với mọi $x, y \in N, r \in R$ ta có $x + y \in N$ và $xr \in N$. Ký hiệu là $N \leq M$.

Định nghĩa 2.7 [4]. Tập hợp con P của nửa môđun phải M trên nửa vành R được gọi là *phụ thuộc tuyến tính yếu* nếu tồn tại một phần tử trong P biểu thị tuyến tính được qua các phần tử khác của P . Tập hợp P được gọi là *độc lập tuyến tính yếu* nếu nó không phụ thuộc tuyến tính yếu.

Định nghĩa 2.8 [4]. Một họ $m_1, m_2, \dots, m_k$ các phần tử của nửa môđun phải M trên nửa vành R được gọi là *phụ thuộc tuyến tính Gondran-Minoux* nếu tồn tại các tập hợp $I, J \subset \{1, 2, \dots, k\}$ mà $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \{1, 2, \dots, k\}$ và các phần tử không đồng thời bằng không $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$ sao cho $\sum_{i \in I} m_i \alpha_i = \sum_{j \in J} m_j \alpha_j$. Họ các phần tử $m_1, m_2, \dots, m_k$ được gọi là *độc lập tuyến tính Gondran-Minoux* nếu nó không phụ thuộc tuyến tính Gondran-Minoux.

Chú ý 2.9. Một họ $m_1, m_2, \dots, m_k$ các phần tử của nửa môđun phải M trên nửa vành R độc lập tuyến tính Gondran-Minoux thì độc lập tuyến tính yếu, điều ngược lại là không đúng (xem [4, Example 2.14] hoặc xem Chú ý 3.2 dưới đây).

Định nghĩa 2.10 [4]. Cho M là nửa môđun phải hữu hạn sinh trên nửa vành R , *chiều yếu* của M được ký hiệu là $\dim_w(M)$ và được xác định bởi công thức:

$$\dim_w(M) = \min\{|P|, P \text{ là hệ sinh độc lập tuyến tính yếu của } M\}, \text{ với } |P| \text{ là số phần tử của } P.$$

Nhận xét 2.11. Chiều yếu của M luôn tồn tại vì mọi nửa môđun hữu hạn sinh trên nửa vành R luôn tồn tại ít nhất một hệ sinh độc lập tuyến tính yếu hữu hạn. Thật vậy, do M hữu hạn sinh nên gọi P là một hệ sinh (hữu hạn) của M có số phần tử bé nhất, giả sử $P = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Nếu P phụ thuộc tuyến tính yếu thì tồn tại $x_j \in P$ sao cho $x_j = \sum_{i \neq j} x_i \alpha_i$ với $\alpha_i \in R, i \neq j$, suy ra tập $P' = P \setminus \{x_j\}$ cũng là một hệ sinh của M . Điều này mâu thuẫn với P là hệ sinh có số phần tử bé nhất. Vậy P độc lập tuyến tính yếu.

Định nghĩa 2.12 [4]. Cho U là một tập con khác rỗng của nửa môđun R^n , *chiều phủ yếu* của U được ký hiệu là $ed_w(U)$ và được xác định bởi công thức:

$$ed_w(U) = \min\{\dim_w(M), U \subset M \leq R^n\}.$$

Chú ý 2.13. Cho R là nửa vành và các tập hợp con khác rỗng U, V của R^n sao cho $U \subset V$. Khi đó, $ed_w(U) \leq ed_w(V) \leq n$.

Định nghĩa 2.14 [4]. Cho R là nửa vành và $A \in M_{m \times n}(R)$, *hạng phủ cột* (tương ứng *dòng*) *yếu* của ma trận A là chiều phủ yếu của các vectơ cột (tương ứng *dòng*) của ma trận A trong nửa môđun R^m (R^n). Ký hiệu là $ec_w(A)$ (tương ứng $er_w(A)$).

Định nghĩa 2.15 [4]. Cho R là nửa vành và $A \in M_{m \times n}(R)$, *hạng nhân tử* của ma trận A là số nguyên k không âm nhỏ nhất sao cho tồn tại các ma trận $B \in M_{m \times k}(R), C \in M_{k \times n}(R)$ thỏa $A = BC$. Ký hiệu $f(A) = k$.

Mệnh đề 2.16. Cho R là nửa vành và $A \in M_{m \times n}(R)$, ta có $f(A) = ec_w(A) = er_w(A)$.

Chứng minh.

Theo [4, Proposition 7.20] ta có $f(A) = er_w(A)$. Mặt khác, dễ dàng kiểm tra được rằng $f(A) = f(A^t)$ nên $ec_w(A) = er_w(A^t) = f(A^t) = f(A)$. $\square$

3. Kết quả nghiên cứu

Trong mục này, chúng tôi khảo sát một số đặc trưng của hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận trên nửa vành giao hoán. Trước hết, nhắc lại một số định nghĩa về chiều Gondran-Minoux và chiều phủ Gondran-Minoux của ma trận trên nửa vành.

Định nghĩa 3.1 ([4]). Cho R là nửa vành giao hoán, M là nửa môđun phải hữu hạn sinh, gọi $SGM(M)$ là tập hợp tất cả hệ sinh hữu hạn độc lập tuyến tính Gondran-Minoux của M . Nếu $SGM(M) \neq \emptyset$ thì Chiều Gondran-Minoux của M được ký hiệu là $\dim_{GM}(M)$ và xác định bởi công thức: $\dim_{GM}(M) = \min\{|P|, P \in SGM(M)\}$, với $|P|$ là số phần tử của P .

Chú ý 3.2. Không phải nửa môđun phải hữu hạn sinh nào cũng có chiều Gondran-Minoux vì tồn tại các nửa môđun phải hữu hạn sinh không có một hệ sinh độc lập tuyến tính Gondran-

Minoux nào. Ví dụ nửa môđun $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ con của

nửa môđun B^4 trên nửa vành Boolean $B = \{0, 1\}$, có hệ sinh độc lập tuyến tính yếu duy nhất là

$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, nhưng do $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nên P phụ thuộc tuyến tính Gondran-

Minoux. Do đó, M không có hệ sinh độc lập tuyến tính Gondran-Minoux nào.

Định nghĩa 3.3 ([4]). Cho R là nửa vành giao hoán, chiều phủ Gondran-Minoux của tập hợp khác rỗng $U \subset R^n$ được ký hiệu $ed_{GM}(U)$ và xác định bởi công thức: $ed_{GM}(U) = \min\{\dim_{GM}(M) \mid M \in S(U)\}$, với $S(U)$ là tập hợp các nửa môđun con hữu hạn sinh của R^n , chứa U và có ít nhất một hệ sinh hữu hạn độc lập tuyến tính Gondran-Minoux.

Chú ý 3.4.

i) Tập hợp $S(U)$ được xác định như trong Định nghĩa 3.3 luôn khác rỗng, vì R^n là một nửa môđun con của chính nó, chứa U và có một hệ sinh độc lập tuyến tính Gondran-Minoux là $E = \{(1, 0, \dots, 0)^t; (0, 1, 0, \dots, 0)^t; \dots; (0, 0, \dots, 0, 1)^t\}$. Do đó, $R^n \in S(U)$.

ii) Cho R là nửa vành giao hoán và các tập hợp con khác rỗng U, V của R^n sao cho $U \subset V$. Khi đó, $ed_{GM}(U) \leq ed_{GM}(V) \leq n$.

Định nghĩa 3.5 ([4]). Cho R là nửa vành giao hoán và $A \in M_{m \times n}(R)$, hạng cột (tương ứng dòng) phủ Gondran-Minoux của ma trận A là chiều phủ Gondran-Minoux của các vectơ cột (tương ứng dòng) của ma trận A , được ký hiệu là $ec_{GM}(A)$ (tương ứng $er_{GM}(A)$).

Nhận xét 3.6. Cho R là nửa vành giao hoán, ma trận $A \in M_{m \times n}(R)$, ta luôn có:

i) Do mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính Gondran-Minoux đều độc lập tuyến tính yếu nên $ec_w(A) \leq ec_{GM}(A) \leq m$ và $er_w(A) \leq er_{GM}(A) \leq n$. Áp dụng Mệnh đề 2.16 ta được các bất đẳng thức sau: $f(A) = ec_w(A) \leq ec_{GM}(A) \leq m$ và $f(A) = er_w(A) \leq er_{GM}(A) \leq n$.

ii) Gọi $A(R^m)$, $A(R^n)$ là nửa môđun con của R^m , R^n được sinh bởi các vectơ cột, dòng của ma trận A thì $ec_{GM}(A) = ed_{GM}(A(R^m))$, $er_{GM}(A) = ed_{GM}(A(R^n))$.

Kết quả sau cho ta một điều kiện cần và đủ để nhận biết giá trị hạng phủ Gondran-Minoux của một ma trận tùy ý trên nửa vành. Chú ý rằng, các kết quả dưới đây được phát biểu cho hạng cột phủ Gondran-Minoux của ma trận trên nửa vành giao hoán, trường hợp hạng dòng phủ Gondran-Minoux sẽ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Định lý 3.7. Cho R là nửa vành giao hoán và $A \in M_{m \times n}(R)$. Khi đó, hạng cột phủ Gondran-Minoux của ma trận A là số nguyên không âm k nhỏ nhất thỏa điều kiện: Tồn tại ma trận $X \in M_{m \times k}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và ma trận $B \in M_{k \times n}(R)$ sao cho $A = XB$.

Chứng minh.

Giả sử $ec_{GM}(A) = k$, theo Định nghĩa 3.3, tồn tại nửa môđun $M \subset R^m$ hữu hạn sinh chứa các vector cột của ma trận A và $\dim_{GM}(M) = k$. Gọi $U = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M$ là hệ sinh độc lập tuyến tính Gondran-Minoux bé nhất của M . Do ma trận A có các vector cột $A^1, A^2, \dots, A^n$ thuộc M nên $A^1, A^2, \dots, A^n$ có thể biểu thị tuyến tính được qua các phần tử của U như sau:

$$A^j = x_1 b_{1j} + \dots + x_k b_{kj} \text{ với } x_l = \begin{pmatrix} x_{1l} \\ \vdots \\ x_{ml} \end{pmatrix}, l=1, \dots, k \text{ và các } b_{ij} \in R, i=1, \dots, k, j=1, \dots, n.$$

Đặt X là ma trận có các cột là $x_l, l=1, \dots, k$ và $B = (b_{ij}) \in M_{k \times n}(R)$. Khi đó, $X \in M_{m \times k}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và $A = XB$. Bây giờ, nếu tồn tại ma trận $Y \in M_{m \times s}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và ma trận $C \in M_{s \times n}(R)$ sao cho $A = YC$. Khi đó, các vector cột của A biểu thị tuyến tính được qua các vector cột của Y . Gọi $Y(R^m)$ là nửa môđun con của R^m được sinh bởi các vector cột của Y , ta có $A^1, A^2, \dots, A^n \in Y(R^m)$. Do các vector cột của Y độc lập tuyến tính Gondran-Minoux nên $\dim_{GM}(Y(R^m))$ tồn tại và $\dim_{GM}(Y(R^m)) \leq s$. Do $ec_{GM}(A) = k$ nên $k \leq \dim_{GM}(Y(R^m)) \leq s$. Vậy tính nhỏ nhất của k đã được chứng minh.

Ngược lại, nếu tồn tại số nguyên không âm k nhỏ nhất thỏa điều kiện: Tồn tại ma trận $X \in M_{m \times k}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và ma trận $B \in M_{k \times n}(R)$ sao cho $A = XB$. Tương tự như trên, ta có $ec_{GM}(A) \leq k$. Nếu $ec_{GM}(A) = p < k$ thì tồn tại ma trận $Z \in M_{m \times p}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và ma trận $D \in M_{p \times n}(R)$ sao cho $A = ZD$, điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của k . Vậy $ec_{GM}(A) = k$. $\square$

Hệ quả 3.8. Cho R là nửa vành giao hoán và $A \in M_{n \times n}(R)$ là ma trận khả nghịch. Khi đó, $ec_{GM}(A) = n$.

Chứng minh.

Rõ ràng $ec_{GM}(A) \leq n$, giả sử $f(A) = k \leq n$. Khi đó, tồn tại các ma trận $B \in M_{n \times k}(R), C \in M_{k \times n}(R)$ sao cho $A = BC$ suy ra $I_n = A^{-1}BC$. Nếu $k < n$ thì đặt $A^{-1}B = \begin{pmatrix} A^1_{k \times k} \\ A^2_{(n-k) \times k} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C^1_{k \times k} & C^2_{k \times (n-k)} \end{pmatrix}$ ta có $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 & C^2 \end{pmatrix}$ suy ra $A^1 C^1 = I_k, A^1 C^2 = 0, A^2 C^1 = 0, A^2 C^2 = I_{n-k}$. Do R là nửa vành giao hoán nên theo Mệnh đề 2.3 ta có $C^1 A^1 = I_k$. Khi đó, $(A^2 C^1) A^1 = 0 A^1 = 0$ suy ra $A^2 = 0$ suy ra $I_{n-k} = A^2 C^2 = 0 C^2 = 0$ vô lý.

Vậy $k = n$. Ta có $n = k = f(A) \leq ec_{GM}(A) \leq n$ suy ra $ec_{GM}(A) = n$. $\square$

Hệ quả 3.9. Cho R là nửa vành giao hoán và $A \in M_{m \times n}(R), B \in M_{n \times p}(R)$. Khi đó, $ec_{GM}(AB) \leq ec_{GM}(A)$.

Chứng minh.

Giả sử $ec_{GM}(A) = k$, theo Định lý 3.7, tồn tại ma trận $X \in M_{m \times k}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và ma trận $C \in M_{k \times n}(R)$ sao cho $A = XC$. Khi đó, $AB = XCB$. Do ma trận X có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux nên áp dụng Định lý 3.7 ta được $ec_{GM}(AB) \leq k = ec_{GM}(A)$. $\square$

Hệ quả 3.10. Cho R là nửa vành giao hoán, ma trận $A \in M_{m \times n}(R)$ và ma trận khả nghịch $B \in M_n(R)$. Khi đó, $ec_{GM}(A) = ec_{GM}(AB)$.

Chứng minh.

Đặt $X = AB$ ta có $A = XB^{-1}$ suy ra $ec_{GM}(A) = ec_{GM}(XB^{-1}) \leq ec_{GM}(X)$ (theo Hệ quả 3.9).

Mặt khác, $ec_{GM}(X) = ec_{GM}(AB) \leq ec_{GM}(A)$ (theo Hệ quả 3.9). Vậy $ec_{GM}(A) = ec_{GM}(AB)$. $\square$

Định lý sau cho ta các điều kiện cần và đủ để hạng cột phủ Gondran-Minoux và hạng nhân tử của mọi ma trận là trùng nhau.

Định lý 3.11. Cho R là nửa vành giao hoán, các mệnh đề sau là tương đương:

- i) $ec_{GM}(A) \leq n, \forall A \in M_{m \times n}(R)$.
- ii) $ec_{GM}(A) \leq \min\{m, n\}, \forall A \in M_{m \times n}(R)$.
- iii) $ec_{GM}(A) = f(A), \forall A \in M_{m \times n}(R)$.
- iv) $ec_{GM}(AB) \leq \min\{ec_{GM}(A), ec_{GM}(B)\}, \forall A \in M_{m \times n}(R), \forall B \in M_{n \times p}(R)$.

Chứng minh.

$i) \Rightarrow ii)$: hiển nhiên. $ii) \Rightarrow iii)$: Với mọi ma trận $A \in M_{m \times n}(R)$, giả sử $f(A) = k$ thì tồn tại các ma trận $B \in M_{m \times k}(R), C \in M_{k \times n}(R)$ sao cho $A = BC$. Áp dụng hệ quả 3.9 ta có $ec_{GM}(A) \leq ec_{GM}(B)$. Mặt khác, $ec_{GM}(B) \leq \min\{m, k\} \leq k$ suy ra $ec_{GM}(A) \leq k = f(A)$. Theo Nhận xét 3.6 ta có $ec_{GM}(A) \geq f(A)$. Vậy $ec_{GM}(A) = f(A)$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Hiển nhiên do $f(AB) \leq \min\{f(A), f(B)\}, \forall A \in M_{m \times n}(R), B \in M_{n \times p}(R)$.

$iv) \Rightarrow i)$: Với mọi ma trận $A \in M_{m \times n}(R)$ do $A = AI_n$ nên theo giả thiết ta có $ec_{GM}(A) \leq \min\{ec_{GM}(A), ec_{GM}(I_n)\} \leq ec_{GM}(I_n)$. Theo Hệ quả 3.8, $ec_{GM}(I_n) = n$ suy ra $ec_{GM}(A) \leq ec_{GM}(I_n) = n$. $\square$

Tiếp theo chúng tôi sẽ xem xét một số bất đẳng thức hạng cột phủ Gondran-Minoux cho tổng và hợp các ma trận trên nửa vành giao hoán.

Mệnh đề 3.12. Cho R là nửa vành giao hoán và các ma trận $A \in M_{m \times p}(R), B \in M_{m \times q}(R)$. Khi đó, $ec_{GM}((A \ B)) \geq \max\{ec_{GM}(A), ec_{GM}(B)\}$, với $(A \ B)$ là ma trận khối tạo ra từ A, B .

Chứng minh.

Giả sử $ec_{GM}((A \ B)) = k$, theo Định lý 3.7, tồn tại ma trận $X \in M_{m \times k}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và ma trận $Y \in M_{k \times (p+q)}(R)$ sao cho $(A \ B) = XY$. Đặt $Y = \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \\ Y^3 & Y^4 \end{pmatrix}$, ta có $(A \ B) = X \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \\ Y^3 & Y^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XY^1 & XY^2 \\ XY^3 & XY^4 \end{pmatrix}$ suy ra $A = XY^1, B = XY^2$. Áp dụng

Hệ quả 3.9 ta được $ec_{GM}(A) \leq ec_{GM}(X)$ và $ec_{GM}(B) \leq ec_{GM}(X)$. Mặt khác, do X có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux nên $ec_{GM}(X) \leq k = ec_{GM}((A \ B))$. Vậy Mệnh đề được chứng minh xong. $\square$

Mệnh đề 3.13. Cho R là nửa vành giao hoán thỏa mãn điều kiện: Với mọi ma trận $X \in M_{m \times k}(R), Y \in M_{m \times s}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux, $ec_{GM}((X \ Y)) \leq k + s$. Khi đó, các bất đẳng thức sau xảy ra:

$$i) \forall A \in M_{m \times p}(R), \forall B \in M_{m \times q}(R), ec_{GM}((A \ B)) \leq ec_{GM}(A) + ec_{GM}(B).$$

$$ii) \forall A, B \in M_{m \times n}(R), ec_{GM}(A + B) \leq ec_{GM}(A) + ec_{GM}(B).$$

$$iii) \forall A \in M_{m \times n}(R), \forall B \in M_{s \times n}(R), ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \leq ec_{GM}(A) + ec_{GM}(B).$$

Chứng minh.

i) Giả sử $ec_{GM}(A) = k$ và $ec_{GM}(B) = s$, theo Định lý 3.7, tồn tại các ma trận $X \in M_{m \times k}(R), Y \in M_{m \times s}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và các ma trận $C \in M_{k \times p}(R), D \in M_{s \times q}(R)$ sao cho $A = XC, B = YD$. Khi đó, $(A \ B) = (X \ Y) \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Theo Hệ quả 3.9 ta có $ec_{GM}((A \ B)) \leq ec_{GM}((X \ Y)) \leq k + s$.

ii) Ta có $A + B = (A \ B) \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$ nên áp dụng Hệ quả 3.9 ta được $ec_{GM}(A + B) \leq ec_{GM}((A \ B))$ mà $ec_{GM}((A \ B)) \leq ec_{GM}(A) + ec_{GM}(B)$ nên $ec_{GM}(A + B) \leq ec_{GM}(A) + ec_{GM}(B)$.

iii) Ta có $ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = ec_{GM}\left[\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right] \leq ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\right) + ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right)$. Giả sử $ec_{GM}(A) = k$ thì tồn tại ma trận $X \in M_{m \times k}(R)$ có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux và ma trận $Y \in M_{k \times n}(R)$ sao cho $A = XY$ suy ra $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} Y$. Do X có các vector cột độc lập tuyến tính Gondran-Minoux nên ma trận $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ cũng vậy, suy ra $ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq k = ec_{GM}(A)$.

Chứng minh tương tự, $ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right) \leq ec_{GM}(B)$. Vậy $ec_{GM}\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \leq ec_{GM}(A) + ec_{GM}(B)$. $\square$

Tiếp theo chúng tôi xem xét một trường hợp trùng nhau giữa hạng dòng phủ Gondran-Minoux và hạng cột phủ Gondran-Minoux. Nhắc lại trong [4], tác giả đã chỉ ra một lớp nửa vành R mà mọi hệ vector trong nửa môđun R^n có số vector lớn hơn n đều phụ thuộc tuyến tính Gondran-Minoux. Ta có Mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.14. Cho R là nửa vành giao hoán thỏa mãn điều kiện: Với mọi số nguyên dương n cho trước, mọi hệ vector có số vector lớn hơn n trong R^n đều phụ thuộc tuyến tính Gondran-Minoux. Khi đó, với mọi ma trận $A \in M_{m \times n}(R)$ ta có:

i) Nếu các vector dòng của A độc lập tuyến tính Gondran-Minoux thì $er_{GM}(A) = ec_{GM}(A) = m \leq n$.

ii) Nếu các vector cột của A độc lập tuyến tính Gondran-Minoux thì $er_{GM}(A) = ec_{GM}(A) = n \leq m$.

Chứng minh.

i) Giả sử $f(A) = k \leq m$ thì tồn tại các ma trận $B \in M_{m \times k}(R), C \in M_{k \times n}(R)$ sao cho $A = BC$. Gọi $A_1, A_2, \dots, A_m$ là các vector dòng của ma trận A , $B_1, B_2, \dots, B_m$ là các vector dòng của ma trận B . Nếu $k < m$ thì hệ vector $S = \{B_1^t, B_2^t, \dots, B_m^t\} \subset R^k$ phụ thuộc tuyến tính Gondran-Minoux, suy ra tồn tại các tập hợp $I, J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ với $I \cap J = \emptyset, I \cup J = \{1, 2, \dots, m\}$ và các $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in R$ không đồng thời bằng không sao cho $\sum_{i \in I} B_i^t \alpha_i = \sum_{j \in J} B_j^t \alpha_j$, suy ra $\sum_{i \in I} (B_i C)^t \alpha_i = \sum_{j \in J} (B_j C)^t \alpha_j$ hay $\sum_{i \in I} A_i^t \alpha_i = \sum_{j \in J} A_j^t \alpha_j$ (do $A = BC$). Do đó, các vector dòng của A phụ thuộc tuyến tính Gondran-Minoux, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $k = m$ suy ra $m = f(A) \leq ec_{GM}(A) \leq m$ hay $ec_{GM}(A) = m$. Gọi $A(R^n)$ là nửa môđun con của R^n được sinh bởi các vector dòng của A , do các vector dòng của A độc lập tuyến tính Gondran-Minoux nên $\dim_{GM}(A(R^n)) \leq m$ suy ra $er_{GM}(A) \leq \dim_{GM}(A(R^n)) \leq m$. Mặt khác, $m = f(A) \leq er_{GM}(A)$ suy ra $er_{GM}(A) = m \leq n$. Trường hợp ii) được chứng minh tương tự. $\square$

4. Kết luận

Bài báo đã đạt được một số kết quả chính sau: Đưa ra một phát biểu tương đương với định nghĩa hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận, xem Định lý 3.7; Chứng minh một số đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản của hạng phủ Gondran-Minoux của ma trận được thể hiện ở Hệ quả 3.8, Hệ quả 3.9, Hệ quả 3.10, Mệnh đề 3.12, Mệnh đề 3.13 và Mệnh đề 3.14. Chứng minh điều kiện cần và đủ để hạng phủ Gondran-Minoux và hạng nhân tử của mọi ma trận trùng nhau, xem Định lý 3.11.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] J. S. Golan, *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1999.
- [2] Y. J. Tan, "On invertible matrices over commutative semirings," *Linear Multilinear Algebr.*, vol. 61, no. 6, pp. 710–724, 2013.
- [3] P. Butkovič, H. Schneider, and S. Sergeev, "Generators, extremals and bases of max cones," *Linear Algebra Appl.*, vol. 421, no. 2-3 spec. iss., pp. 394–406, 2007.
- [4] S. G. and A. G. M. Akian, "Linear independence over tropical semirings and beyond," *Trop. idempotent Math. Contemp. Math.*, vol. 495, pp. 1–38, 2009.
- [5] L. R. B. Beasley and A. E. Guterman, "Rank inequalities over semirings," *J. Korean Math. Soc.*, vol. 42, no. 2, pp. 223–241, 2005.
- [6] Y. Shitov, "Inequalities for Gondran-Minoux rank and idempotent semirings," *Linear Algebra Appl.*, vol. 435, no. 7, pp. 1769–1777, 2011.
- [7] Y. N. Shitov, "On the coincidence of the factor and Gondran-Minoux rank functions of matrices over a semiring," *J. Math. Sci. (United States)*, vol. 193, no. 5, pp. 802–808, 2013.
- [8] Y. N. Shitov, "Matrices with different Gondran-Minoux and determinantal ranks over max-algebras," *J. Math. Sci.*, vol. 163, no. 5, pp. 598–624, 2009.
- [9] C. C. Ha, "Stably free rank of idempotent matrices on semirings," *Univ. Da Nang, J. Sci. Technol.*, vol. 20, pp. 56–60, 2022.