VỀ VẤN ĐỀ XÂY DỰNG NGHIỆM CƠ SỞ CHO MỘT LỚP CÁC BÀI TOÁN VỎ MỎNG CHỊU UỐN

ON THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF SOME CLASS OF THIN SHALLOW SHELL BENDING PROBLEMS

Trần Đức Chính [1], Ngô Văn Tình[2]
[1]Đại học xây dựng Hà Nội
td_chinh07@hcmutrans.edu.vn
[2]Đại học Giao thông vận tải Tp. Hồ chí Minh
ngovantinhgtvt@gmail.com

Tóm tắt: *Bằng cách biểu diễn nghiệm tổng quát của bài toán biên thuộc lý thuyết uốn vỏ mỏng dưới dạng các ma trận Green, các tác giả đã kiến nghị một phương pháp giải tích để giải hệ các phương trình vi phân của bài toán. Các tác giả đã đặt và giải bài toán đặt ra được dựa trên ý tưởng của phương pháp tải trọng bù. Nghiệm cơ sở được xem là tổng của hai nghiệm: Nghiệm riêng của bài toán có vế phải và nghiệm thuần nhất của bài toán không có vế phải. Để xây dựng nghệm riêng các tác giả đã sử dụng toán tử Dirac. Để nghiệm tổng quát thõa mãn điều kiện biên, nghiệm cơ sở được xây dựng dựa trên bài toán hai điểm: Điểm miền và điểm nguồn (điểm nhận ảnh hưởng của tải và điểm chất tải). Nghiệm tổng quát cũng như tải nguồn đều biểu diễn bằng chuỗi Fourrier, có các hệ số chưa biết được xác định bằng cách cho thỏa mãn hệ các điều kiện biên của vỏ. Kết quả là đưa đến hệ phương trình tích phân Fredholm mà có thể giải gần đúng bằng phương pháp tải trọng bù, bằng cách đưa chúng về hệ phương trình đại số với ẩn số là các tải trọng bù. Các kết quả có thể dùng để tính toán vỏ trụ kín hoặc vỏ có gờ cứng.*

Từ khóa: *Lý thuyết tuyến tính vỏ, vỏ hình cầu, vỏ hình trụ, vỏ hình dạng tùy ý, lý thuyết uốn vỏ mỏng, phân tích vỏ mỏng, tải trọng bù.*

Chỉ số phân loại: *2.5*

Abstract: *By expressing the general solution of the boundary problem of shell bending theory in the form of Green matrix, the authors proposed an analytical method to solve the differential equations of the problem. The authors have set and solved the problem with idea of compensating loading method. General solution is considered as the sum of the two solutions. The solution of problem with right-hand side, the hemogeneous solution of problem that hasn't right - hand side. To obtain the solution of the first problem, the authors has used the Dirac operator. For the general solution to satisfy the boundary condition, the solution was built based on two point problem: Domain point and source point The general solution and source loads are reprenented by the Fourrier series. The unknown coefficients are determined by satisfying the boundary conditions general solution of the problem. As the result we obtained Fredhold integral equations that can be approximated by the compensating loading method, that introduced them to the algebraic equations system. The results can be used for solving the bending problem of circular cylindrical shell.*

Keywords: *Linear theory of shell, spherical shell, cylindrical shell, shell of arbitrayry shape, shell bending theory, analytical method for thin shell, compensating loading method.*

Classification number: *2.5*

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, với những bài toán đặc thù về uốn vỏ ở miền lân cận các điểm chịu lực tập trung, moment tập trung,…,ứng xử của vỏ mô tả bởi các hàm $u, \ldots, T_1, \ldots H_1$ biểu diễn độ võng, ứng suất và moment đã được xem xét. Nhóm tác giả sẽ thiết lập công thức tổng quát cho bài toán vỏ chịu uốn có hình dạng tùy ý, đồng thời thiết lập các phương trình moment của kết cấu vỏ mỏng theo lý thuyết tuyến tính. Các kết quả thu được ở dạng tổng quát của các bài toán đã giải trước đó trong trường hợp các vỏ mỏng có chức năng đặc biệt. Ví dụ, vỏ hình cầu chịu tải tập trung và moment đã được Gol'denveizer xem xét trong [1]. Vỏ hình trụ đã được xem xét bởi Darevskii [2]. Chernykh [3] đã nghiên cứu bài toán uốn các vỏ có hình dạng bất kỳ nhưng đã không giải quyết vấn đề đến kết quả cuối cùng.

Để giải bài toán vỏ chịu uốn, các tác giả sử dụng phương trình vi phân đạo hàm riêng dạng elliptic, tương tự như Gel'fond và Shilov [4], Levi [5], Ion [6], Lopatinkii [7].

2. Xây dựng nghiệm cơ sở cho các bài toán vỏ mỏng chịu uốn

Ta sẽ xét ở dạng tường minh các kỳ dị xuất hiện trong các hàm chuyển vị *u, v, w* chứa trong các phương trình vi phân cân bằng của vỏ khi vỏ chịu tác dụng của một moment tập trung.

Ta sẽ xây dựng nghiệm cơ sở của các phương trình vi phân $L(\phi)=0$ và $L(\phi)=\delta(\xi-\xi_0)$, trong đó L là toán tử vi phân: $\xi=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $\xi_0=\{\xi_{10}, \ldots, \xi_{n0}\}$ là vector ẩn số trong không gian n chiều, δ là hàm Dirac.

Chú ý rằng, xét về phương diện cơ học độ lớn của lực tập trung có thể được xem như giới hạn của cường độ tải phân bố hoạt động trên phân tố ở lân cận điểm khảo sát hoặc có thể xem như lời giải của một phương trình vi phân chứa kỳ dị theo quan điểm toán học. Đầu tiên, ta sẽ sử dụng cách tiếp cận cơ học trong những điều kiện nhất định, sau đó sẽ sử dụng lý thuyết hàm tổng quát.

Bài toán về lực tập trung đặt tại điểm $\xi=0$, được đưa về bài toán tìm giới hạn của chuỗi các tải phân bố đều cường độ q_v đáp ứng các điều kiện sau:

1. Với mỗi M >0 sao cho $|a|\le M$, $|b|\le M$ trong đó *a, b* và *v* là các hằng số phụ thuộc *M*, ta có thể xác định.

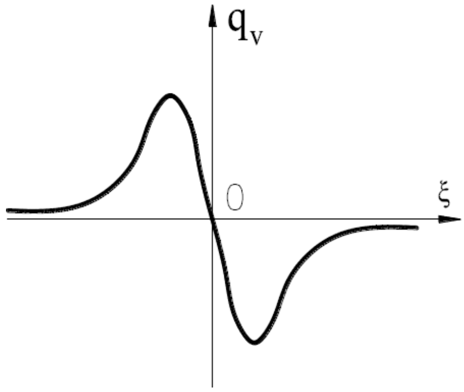
$$\left|\int_a^b q_v(\xi)\,d\xi\right|$$

2. Với *a* và *b* khác 0, ta có

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^b q_v(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0 & (a\langle b\langle 0,\ 0\langle a\langle b)\\ 1 & (a\langle 0\langle b)\end{cases}$$

Hàm q_v có các tính chất này được gọi là hàm số Dirac δ trong lý thuyết các hàm tổng quát [4]. Do đó, định nghĩa ở đây được áp dụng cho bài toán vỏ chịu lực tập trung mô tả bằng hàm Dirac δ. Chuỗi các hàm q_v được gọi là chuỗi kiểu δ.

Ta hãy tìm hiểu về khái niệm moment tập trung. Moment tập trung là giới hạn $v\to\infty$ của tải phân bố với cường độ q_v, ứng xử của hàm được cho trên hình 1.



Hình 1

Các nhánh của hàm q_v ở bên phải và bên trái điểm $\xi=0$, có dạng hàm Delta δ. Ta giả thiết rằng khi $v\to\infty$ các tải trọng này có cường độ không thay đổi và liên tục tới điểm $\xi=0$, và có trị số bằng 0 ở gốc tọa độ.

Kết quả ta thu được phương trình:

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^b \xi q_v(\xi)\,d\xi=1 \quad (a\langle 0\langle b) \tag{1}$$

Và kèm theo điều kiện:

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^b q_v(\xi)\,d\xi=0 \quad (a\langle 0\langle b) \tag{2}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, từ (1) ta nhận được.

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^b d\xi\int_a^b q_v(\eta)\,d\eta=-1 \tag{3}$$

Trên cơ sở của (2) và (3) ta sẽ có.

$$\lim_{v\to\infty} q_v=-\delta'(0)$$

Ở đây δ' biểu thị đạo hàm của hàm δ, theo [4] được định nghĩa như sau:

Giả sử $\varphi(\xi)$ là hàm bất kỳ thuộc lớp thứ k $(k\ge 2)$ các hàm tường minh. Ngoài ra, ta giả sử rằng:

$$\int_c^d f(\xi)\varphi(\xi)\,d(\xi)=-\varphi'(\xi_0) \qquad (c\langle \xi_0\langle d)$$

Trong đó $f(\xi)=\delta'(\xi-\xi_0)$. Để thấy là:

$$\int_a^b q_v(\xi)\varphi(\xi)\,d(\xi)=-\varphi'(\xi_0) \tag{4}$$

Vậy, tích phân từng phần (4) cho ta:

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^b q_v(\xi)\varphi(\xi)d(\xi)=\lim_{v\to\infty}\varphi\int q_v(\xi)d(\xi)\Big|_a^b$$

$$-\lim_{v\to\infty}\int_a^b \varphi'(\xi)d(\xi)\int_a^\xi q_v(\eta)d\eta$$

Biểu thức thứ nhất ở vế phải bằng 0 theo (2), biểu thức thứ hai bằng với *φ'(0)* theo (3), với *a* và *b* tùy ý. Để giải bài toán uốn vỏ, ta sử dụng hệ tọa độ trực giao *(α, β)*. Với giả thiết là các lực tập trung đơn vị và của moment tập trung đơn vị phân bố dọc theo các đường tọa độ *α* và *β*, chúng có thể được mô tả nhờ các toán tử sau:

$$\frac{\delta}{AB},\quad \frac{1}{AB^2}\frac{\partial\delta}{\partial\beta},\quad -\frac{1}{AB^2}\frac{\partial\delta}{\partial\alpha}$$

Trong đó *A* và *B* là các hệ số của dạng toàn phương thứ nhất, phương trình mặt giữa của vỏ. Ở đây, chúng ta giả định rằng mặt trung gian của vỏ được xét trong hệ tọa độ trực giao liên hợp. Các phương trình vi phân cân bằng và chuyển vị của vỏ có thể được biểu diễn dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{11}u+\Delta_{12}v+\Delta_{13}w=-\frac{1-\sigma^2}{2Eh}X\\
&\Delta_{21}u+\Delta_{22}v+\Delta_{23}w=-\frac{1-\sigma^2}{2Eh}Y\\
&\Delta_{31}u+\Delta_{32}v+\Delta_{33}w=-\frac{1-\sigma^2}{2Eh}Z\\
&\Delta_{ik}=\Delta_{ik}^0+\Delta_{ik}'
\end{aligned}\qquad(5)$$

Trong đó:

u, v và *w:* Các hàm chuyển vị;

X, Y và *Z:* Các tải trọng;

Δ_{ik}^0: Các toán tử có chứa các đạo hàm bậc cao;

Δ_{ik}': Các toán tử liên quan đến các điều kiện còn lại.

Biểu diễn của toán tử Δ_{ik} trong các phương trình cân bằng cho trong [9]. Dạng ma trận của các toán tử Δ_{ik}^0 như sau:

$$\left\|\begin{matrix}
p_1\left(D_{\alpha\alpha}^2+\frac{1-\sigma}{2}D_{\beta\beta}^2\right) & q_1D_{\alpha\beta}^2 & \frac{h^2}{3R_1}D_\alpha\Delta\\
q_2D_{\alpha\beta}^2 & p_2\left(D_{\beta\beta}^2+\frac{1-\sigma}{2}D_{\alpha\alpha}^2\right) & \frac{h^2}{3R_2}D_\beta\Delta\\
\frac{h^2}{3}\left[\frac{1}{R_1}D_\alpha\Delta+\frac{1-\sigma}{2}pD_{\alpha\beta\beta}^3\right] & \frac{h^2}{3}\left[\frac{1}{R_2}D_\beta\Delta-\frac{1-\sigma}{2}pD_{\alpha\alpha\beta}^3\right] & \frac{h^2}{3}\Delta^2
\end{matrix}\right\|\qquad(6)$$

Trong đó:

$$p_i=1+\frac{h^2}{3R_i^2},\quad q_i=\frac{1+\sigma}{2}+\frac{h^2}{3R_1R_2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3R_i^2}\quad (i=1,2)$$

$$p=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2},\quad \Delta=\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},\quad p_3=1+\frac{h^2}{3R_1R_2}$$

Ngoài ra:

$$D_\alpha=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha},\quad D_{\alpha\alpha}^2=\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2},\quad D_\beta=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta},....$$

R_1 và R_2 là bán kính cong; *2h* là bề dày của vỏ. Giả sử rằng *A* và $B\neq\infty$.

Ta sẽ biểu diễn l_{ik} là các toán tử đại số tương đương của Δ_{ik}^0 trong ma trận $\left\|\Delta_{ik}^0\right\|$ và ta có dạng sau đây của ma trận $\left\|l_{ik}\right\|$.

$$\left\| \begin{matrix} \frac{h}{3}\left(\frac{1-\sigma}{2}D_{\alpha\alpha}^2+D_{\beta\beta}^2\right)\Delta^2, & -\frac{h^2}{3}\frac{1+\sigma}{2}D_{\alpha\beta}^2\Delta^2, & \frac{h^2}{3}D_\alpha\left[-\frac{1-\sigma}{2R_1}D_{\alpha\alpha}^2+r_{13}D_{\beta\beta}^2\right]\Delta \\ -\frac{h^2}{3}\frac{1+\sigma}{2}D_{\alpha\beta}^2\Delta^2, & \frac{h}{3}\left(\frac{1-\sigma}{2}D_{\beta\beta}^2+D_{\alpha\alpha}^2\right)\Delta^2, & \frac{h^2}{3}D_\beta\left[-\frac{1-\sigma}{2R_2}D_{\beta\beta}^2+r_{23}D_{\alpha\alpha}^2\right]\Delta \\ \frac{h^2}{3}D_\alpha\left[-\frac{1-\sigma}{2R_1}D_{\alpha\alpha}^2+r_{31}D_{\beta\beta}^2\right]\Delta, & \frac{h^2}{3}D_\beta\left[-\frac{1-\sigma}{2R_2}D_{\beta\beta}^2+r_{32}D_{\alpha\alpha}^2\right]\Delta, & \frac{1-\sigma}{2}\Delta^2 \end{matrix} \right\|$$

Trong đó:

$$r_{13}=\frac{1}{R_2}-\frac{3-\sigma}{2R_1},\quad r_{23}=\frac{1}{R_1}-\frac{3-\sigma}{2R_2},\quad r_{31}=\frac{1+\sigma}{2R_2}-\frac{1}{R_1},\quad r_{32}=\frac{1+\sigma}{2R_1}-\frac{1}{R_2}$$

Hệ phương trình cân bằng là hệ các phương trình vi phân dạng elliptic và toán tử elliptic Λ có dạng:

$$\Lambda=\left|\Delta_{ik}^0\right|=\frac{1-\sigma}{2}\frac{h}{3}\left(p_2D_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^4+2p_3D_{\alpha\alpha\beta\beta}^4+p_1D_{\beta\beta\beta\beta}^4\right)\Delta^2$$

Ở đây, ta bỏ qua vô cùng bé bậc cao $h^2/3R_iR_k\ \ (i,k=1,2)$ vì chúng nhỏ hơn 1. Sau đó ta đặt:

$$\Lambda=\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3}\Delta^4 \qquad (7)$$

Ta sẽ giới hạn ở bài toán vỏ chịu lực tập trung có phương song song với trục tọa độ. Ở vế phải của phương trình (5), ta thay $X=\delta/AB,\ Y=Z=0$ và ta thu được nghiệm của hệ phương trình:

$$\Delta_{11}u+\Delta_{12}v+\Delta_{13}w=-\frac{1-\sigma^2}{2Eh}\frac{\delta}{AB}$$
$$\Delta_{21}u+\Delta_{22}v+\Delta_{23}w=0$$
$$\Delta_{31}u+\Delta_{32}v+\Delta_{33}w=0$$

Sử dụng lời giải của Levi [5], ta có thể biểu diễn các hàm chuyển vị *u, v, w* dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} u&=l_{11}\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)\\ &\quad+\iint_G l_{11}\Phi(\alpha,\beta,\xi,\eta)\,f_1(\xi,\eta,\alpha_0,\beta_0)\,d\xi d\eta\\ v&=l_{12}\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)\\ &\quad+\iint_G l_{12}\Phi(\alpha,\beta,\xi,\eta)\,f_2(\xi,\eta,\alpha_0,\beta_0)\,d\xi d\eta \qquad (8)\\ w&=l_{13}\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)\\ &\quad+\iint_G l_{13}\Phi(\alpha,\beta,\xi,\eta)\,f_3(\xi,\eta,\alpha_0,\beta_0)\,d\xi d\eta \end{aligned}$$

Trong đó f_i vẫn là hàm chưa biết, $\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)$ là nghiệm cơ sở của phương trình.

$$-\frac{2Eh}{1-\sigma^2}AB\Lambda\Phi=\delta(\alpha_0,\beta_0)$$

Levi đề xuất phương pháp tổng quát để tìm Φ. Đối với trường hợp Λ có dạng (7) thì phần chính của nghiệm cơ sở ψ, là phần có chứa số mũ cao nhất, ta có:

$$\psi=-\frac{3}{36\times64\times2\pi h^3(1+\sigma)}r^6\ln r^2$$

$$r^2=A^2(\alpha-\alpha_0)^2+B^2(\beta-\beta_0)^2$$

Đặt $\phi=\psi-\Psi$. Trong đó, Ψ chứa các kỳ dị bậc thấp. Ψ có thể tồn tại trong các biểu diễn khác nhau, ở các dạng khác nhau, chẳng hạn như:

$$\Delta\psi=-\frac{\chi}{4\times64\pi}r^4\ln r^2+\Psi,\quad \Delta^2\psi=-\frac{\chi}{32\pi}r^2\ln r^2+\Psi$$

$$D_{\alpha\alpha}^2\Delta\psi=-\frac{\chi}{64\pi}r^2\ln r^2-\frac{\chi}{32\pi}A^2(\alpha-\alpha_0)^2\ln r^2+\Psi$$

$$D_{\alpha\alpha}^2\Delta^2\psi=-\frac{\chi}{8\pi}\ln r^2+\Psi,\quad \chi=\frac{6}{h^3(1+\sigma)}$$

Các biểu diễn của $\Delta\psi$ và $\Delta^2\psi$ trong tọa độ cong β có thể thiết lập một cách tương tự. Để xác định các hàm ẩn f_i ta xây dựng hệ phương trình tích phân Fredholm loại hai bằng cách thay (8) vào các phương trình thứ nhất. Tuy nhiên, đây không phải là vấn đề ta quan tâm vì mục tiêu của nhóm tác giả là tìm ra những kỳ dị cơ bản chứa ở vế phải của (8). Trong trường hợp hệ phương trình ban đầu chứa các hệ số cần xác định thì các biểu thức $u=l_{11}\phi,\ v=l_{12}\phi,\ \mathrm{w}=l_{13}\phi$ sẽ cho ta nghiệm của bài toán.

Việc tìm nghiệm của hệ phương trình có các hệ số biến thiên sẽ được tiến hành tương tự tại các điểm lân cận với điểm đặt lực tập trung. Bers [8] đã xác định được kỳ dị chứa trong nghiệm của hệ phương trình vi phân có các hệ số biến thiên trong miền lân cận của lực tập trung, kể cả các kỳ dị có trong nghiệm cơ sở của phương trình vi phân hệ số hằng và kỳ dị bậc thấp hơn chứa trong các hệ số chính.

Các trường hợp còn lại (cho các lực tập trung *Y* và *Z*) có thể tiến hành tương tự. Kết quả tính toán cho trong bảng 1. Ta xét bài toán vỏ chịu tác dụng của moment tập trung, khi xem tải trọng này là giới hạn của một tải phân bố đều, ta có hệ phương trình sau:

$$\Delta_{11}u+\Delta_{12}v+\Delta_{13}\text{w}=0 \qquad (\text{M}_1=\frac{1}{AB}D_\beta\delta)$$
$$\Delta_{21}u+\Delta_{22}v+\Delta_{23}\text{w}=0 \quad (\text{M}_2=-\frac{1}{AB}D_\alpha\delta) \quad (9)$$
$$\Delta_{31}u+\Delta_{32}v+\Delta_{33}\text{w}=\frac{1\text{-}\sigma^2}{2\text{Eh}}M_i \quad (i=1,2)$$

Trong đó *M₁* là moment đặt trên đường tọa độ *α*, còn *M₂* là moment đặt trên đường tọa độ *β*. Hệ phương trình (9) có thể giải bằng phương pháp tương tự. Bây giờ ta tìm nghiệm của phương trình.

$$\Lambda\Phi_1=\frac{1-\sigma^2}{2Eh}M_i$$

Theo lý thuyết hàm tổng quát, nếu ϕ là nghiệm cơ sở của phương trình $\Lambda\phi=\delta$, thì $\partial\phi/\partial\alpha$ sẽ là nghiệm của phương trình $\Lambda\phi=\partial\delta/\partial\alpha$. Ở đây, các phần chính của nghiệm trong một vài trường hợp có thể thu được bằng cách, tách các phần chính của các hàm u_z, v_z và w_z ứng với vỏ chịu lực tập trung Z, chứa trong vế phải phương trình thứ ba của (9). Khi đó, lời giải bài toán sẽ nhận được khá dễ dàng. Chẳng hạn, khi vỏ chịu moment tập trung đặt dọc theo đường tọa độ α, thì lời giải có dạng $u=D_\beta u_z,..,w=D_\beta w_z$, $T_1=D_\beta T_{1z},..,H_1=D_\beta H_{1z}$ với $T_1,\dots H_1$ là các ứng suất và moment trong vỏ. Moment dọc theo đường tọa độ β có thể xác định nhờ các liên hệ $u=-D_\beta u_z,...,H_1=-D_\alpha H_{1z}$.

Xét các phương trình cho vỏ mỏng có độ cong Gausian (tương ứng với trường hợp phương trình vi phân có dạng elliptic). Ta có nhận xét là ma trận của toán tử của hệ Δ_{ik} bao gồm các ma trận chính và ma trận phụ, với $\Delta_{ik}=\Delta_{ik}^0+\Delta_{ik}^{'}$. Trong các phương trình vi phân cân bằng theo chuyển vị [9] ta hãy viết ở dạng ma trận.

$$\left\|\Delta_{ik}^0\right\|=\left\|\begin{matrix} D_{\alpha\alpha}^2+\frac{1-\sigma}{2}D_{\beta\beta}^2 & \frac{1+\sigma}{2}D_{\alpha\beta}^2 & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)D_\alpha \\ \frac{1+\sigma}{2}D_{\alpha\beta}^2 & \frac{1-\sigma}{2}D_{\alpha\alpha}^2+D_{\beta\beta}^2 & -\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)D_\beta \\ -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)D_\alpha & -\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)D_\beta & 2r_{11} \end{matrix}\right\|$$

Trong đó ma trận đại số l_{ik} là ma trận đối xứng trong trường hợp nhất định, nghĩa là $l_{ik}=l_{ki}$; 1, k=1, 2 và các phần tử của nó có dạng:

$$l_{11}=(1-\sigma)\left(r_{11}D_{\alpha\alpha}^2+\frac{1+\sigma}{R_1^2}D_{\beta\beta}^2\right),\quad l_{12}=-\frac{1-\sigma}{2}p^2D_{\alpha\beta}^2$$
$$l_{13}=\frac{1-\sigma}{2}D_\alpha\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)D_{\alpha\alpha}^2+r_{13}D_{\beta\beta}^2\right]$$
$$l_{22}=(1-\sigma)\left(\frac{1+\sigma}{R_2^2}D_{\alpha\alpha}^2+r_{11}D_{\beta\beta}^2\right)$$
$$l_{23}=\frac{1-\sigma}{2}D_\beta\left[r_{23}D_{\alpha\alpha}^2+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\sigma}{R_1}\right)D_{\beta\beta}^2\right],\quad l_{33}=\frac{1-\sigma}{2}\Delta^2$$
$$r_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right),\ r_{13}=\frac{2+\sigma}{R_1}-\frac{1}{R_2},$$
$$r_{23}=\frac{2+\sigma}{R_2}-\frac{1}{R_1}$$

Hàm $\Lambda=\left|\Delta_{ik}^0\right|$ và có dạng:

$$\Lambda=\frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)}{2}\left(\frac{1}{R_2}D_{\alpha\alpha}^2+\frac{1}{R_1}D_{\beta\beta}^2\right)^2$$

Bảng 1

	X	Y	Z
u	$-\chi_1 \ln r^2$	$\chi_2 \dfrac{xy}{r^2}$	$\chi_3 D_\alpha \left[m_{13}{}^{(1)} - -(1+\sigma) p y^2 / r^2 \right] r^2 \ln r^2$
v	$\chi_2 \dfrac{xy}{r^2}$	$-\chi_1 \ln r^2$	$\chi_3 D_\beta \left[m_{23}{}^{(1)} + +(1+\sigma) p x^2 / r^2 \right] r^2 \ln r^2$
w	$\chi_3 D_\alpha \left[m_{31}{}^{(1)} - 2 p y^2 / r^2 \right] r^2 \ln r^2$	$-\chi_3 D_\beta \left[m_{32}{}^{(1)} + 2 p x^2 / r^2 \right] r^2 \ln r^2$	$-\chi_4 r^2 \ln r^2$

Trong đó:

$$\chi_1 = \frac{(3-\sigma)(1+\sigma)}{16\pi E h}, \quad \chi_2 = \frac{(1+\sigma)^2}{8\pi E h}, \quad \chi_3 = \frac{(1+\sigma)}{64\pi E h}, \quad \chi_4 = \frac{3(1-\sigma^2)}{32\pi E h^3}, \quad p = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2},$$

$$m_{13}{}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sigma}{R_2} - \frac{5-3\sigma}{R_1} \right), \quad m_{23}{}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sigma}{R_1} - \frac{5-3\sigma}{R_2} \right), \quad m_{31}{}^{(1)} = \frac{1}{R_2} - \frac{3-2\sigma}{R_1}, \quad m_{32}{}^{(1)} = \frac{1}{R_1} - \frac{3-2\sigma}{R_2}$$

$$x = A(\alpha - \alpha_0), \quad y = B(\beta - \beta_0), \quad r = \sqrt{A^2(\alpha - \alpha_0) + B(\beta - \beta_0)}$$

Bảng 2

	X	Y	Z
T_1	$-\dfrac{1}{8\pi} D_\alpha \left[(3+\sigma) \ln r^2 + +2(1+\sigma) \dfrac{y^2}{r^2} \right]$	$\dfrac{1}{8\pi} D_\beta \left[(1-\sigma) \ln r^2 - -2(1+\sigma) \dfrac{y^2}{r^2} \right]$	$\dfrac{1}{4\pi} \left[m_{13}{}^{(2)} \ln r^2 - 2t - -(1+\sigma) p \left(\dfrac{x^2 y^2}{r^4} \right) \right]$
T_2	$\dfrac{1}{8\pi} D_\alpha \left[(1-\sigma) \ln r^2 - -2(1+\sigma) \dfrac{x^2}{r^2} \right]$	$-\dfrac{1}{8\pi} D_\beta \left[(3+\sigma) \ln r^2 + +2(1+\sigma) \dfrac{x^2}{r^2} \right]$	$\dfrac{1}{4\pi} \left[m_{23}{}^{(2)} \ln r^2 + 2t + -(1+\sigma) p \left(\dfrac{x^2 y^2}{r^4} \right) \right]$
S_1	$-\dfrac{1}{4\pi} D_\beta \left[(1-\sigma) \ln r^2 + +2(1+\sigma) \dfrac{y^2}{r^2} \right]$	$-\dfrac{1}{4\pi} D_\alpha \left[(1-\sigma) \ln r^2 + +2(1+\sigma) \dfrac{x^2}{r^2} \right]$	$\dfrac{1}{8\pi} D_{\alpha\beta}^2 \left[m_{33}{}^{(2)} + 2t + +(1+\sigma) t \right] r^2 \ln r^2$
G_1	$\dfrac{h^2}{24\pi} D_{\alpha\beta\beta}^3 \left[m_{41}^{(2)} + +2t \right] r^2 \ln r^2$	$\dfrac{h^2}{24\pi} D_{\alpha\alpha\beta}^3 \left[m_{42}^{(2)} + +2t \right] r^2 \ln r^2$	$\dfrac{1}{4\pi} \left[(1+\sigma) \ln r^2 + +2(1-\sigma) \dfrac{x^2}{r^2} \right]$
G_2	$\dfrac{h^2}{24\pi} D_{\alpha\beta\beta}^3 \left[m_{51}^{(2)} - -2t \right] r^2 \ln r^2$	$\dfrac{h^2}{24\pi} D_{\alpha\alpha\beta}^3 \left[m_{52}^{(2)} - -2t \right] r^2 \ln r^2$	$\dfrac{1}{2\pi} \left[(1+\sigma) \ln r^2 + +2(1-\sigma) \dfrac{y^2}{r^2} \right]$
H_1	$-\dfrac{h^2}{6\pi} D_\beta \left[m_{61}^{(2)} \ln r^2 - \dfrac{1+\sigma}{R_2} \dfrac{x^2}{r^2} + p \dfrac{x^2 y^2}{r^4} + \dfrac{2}{R_1} \dfrac{y^2}{r^2} \right]$	$-\dfrac{h^2}{6\pi} D_\alpha \left[m_{62}^{(2)} \ln r^2 - \dfrac{1+\sigma}{R_1} \dfrac{y^2}{r^2} p \dfrac{x^2 y^2}{r^4} + \dfrac{2}{R_2} \dfrac{x^2}{r^2} \right]$	$\dfrac{1-\sigma}{2\pi} \dfrac{xy}{r^2}$

Trong đó:

$$t=\frac{x^2}{R_2}+\frac{y^2}{R_1},\ m_{13}^{(2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{5+\sigma}{R_1}-\frac{1-3\sigma}{R_2}\right),\ m_{23}^{(2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{5+\sigma}{R_2}-\frac{1-3\sigma}{R_1}\right),\ m_{33}^{(2)}=\frac{1-3\sigma}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\ m_{41}^{(2)}=\frac{1+2\sigma}{R_2}+\frac{1-2\sigma}{R_1}$$

$$m_{42}^{(2)}=-\frac{1}{R_1}-\frac{5}{R_2},\ m_{51}^{(2)}=\frac{1}{R_2}-\frac{3}{R_1},\ m_{52}^{(2)}=\frac{3+2\sigma}{R_1}+\frac{3-2\sigma}{R_2},\ m_{61}^{(2)}=\frac{3}{R_1}-\frac{2(1+2\sigma)}{R_2},\ m_{62}^{(2)}=\frac{3}{R_2}-\frac{2(1+2\sigma)}{R_1}$$

Bảng 3

	X	Y	Z
U	$-\chi m_{11}^{(3)}\ln r_1^2$	$\chi p^2\frac{x_1y_1}{r_1^2}$	$-\frac{\chi}{2}D_\alpha\left[\left(2(1+\sigma)-\right.\right.$ $\left.\left.-m_{13}^{(3)}\right)\ln r_1^2-m_{23}^{(3)}\frac{y_1^2}{r_1^2}\right]$
V	$\chi p^2\frac{x_1y_1}{r_1^2}$	$-\chi m_{22}^{(3)}\ln r_1^2$	$-\frac{\chi}{2}D_\beta\left[\left(2(1+\sigma)+\right.\right.$ $\left.\left.+m_{13}^{(3)}\right)\ln r_1^2-m_{23}^{(3)}\frac{x_1^2}{r_1^2}\right]$
W	$-\frac{\chi}{2}D_\alpha\left[\left(2(1+\sigma)-\right.\right.$ $\left.\left.-m_{13}^{(3)}\right)\ln r_1^2-m_{23}^{(3)}\frac{y_1^2}{r_1^2}\right]$	$-\frac{\chi}{2}D_\beta\left[\left(2(1+\sigma)+\right.\right.$ $\left.\left.+m_{13}^{(3)}\right)\ln r_1^2-m_{23}^{(3)}\frac{x_1^2}{r_1^2}\right]$	$\frac{\chi}{2}\Delta^2 r_1^2\ln r_1^2$

Trong đó:

$$x_1=\sqrt{R_2}A\left(\alpha-\alpha_0\right),\quad y_1=\sqrt{R_1}B\left(\beta-\beta_0\right),\quad r_1=\sqrt{R_2A^2\left(\alpha-\alpha_0\right)^2+R_1B\left(\alpha-\alpha_0\right)^2}$$

$$m_{11}^{(3)}=\frac{R_2}{R_1^2}+\frac{1}{R_2}+\frac{2+4\sigma}{R_1},\ m_{22}^{(3)}=\frac{R_1}{R_2^2}+\frac{1}{R_1}+\frac{2+4\sigma}{R_2},\ \chi=\frac{\sqrt{R_1R_2}}{16\pi Eh},\ m_{13}^{(3)}=\frac{R_1^2-R_2^2}{R_1R_2},\ m_{23}^{(3)}=2\frac{\left(R_1-R_2\right)^2}{R_1R_2}$$

Bảng 4

	X	Y	Z
T_1	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}D_\alpha\ln r_1^2$	$-\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}D_\beta\ln r_1^2$	$-\frac{\sqrt{R_1R_2}}{4\pi}D_{\alpha\alpha}^2\ln r_1^2$
T_2	$-\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}D_\alpha\ln r_1^2$	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}D_\beta\ln r_1^2$	$-\frac{\sqrt{R_1R_2}}{4\pi}D_{\beta\beta}^2\ln r_1^2$
S_1	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}D_\beta\ln r_1^2$	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}D_\alpha\ln r_1^2$	$\frac{\sqrt{R_1R_2}}{4\pi}D_{\alpha\beta}^2\ln r_1^2$

Trong đó:

$$G_1=-\frac{2Eh}{3\left(1-\sigma^2\right)}\left(D_{\alpha\alpha}^2+\sigma D_{\beta\beta}^2\right)w_i,\ G_2=-\frac{2Eh}{3\left(1-\sigma^2\right)}\left(\sigma D_{\alpha\alpha}^2+D_{\beta\beta}^2\right)w_i,\ H_1=\frac{2Eh^3}{3\left(1+\sigma\right)}D_{\alpha\beta}^2w_i\quad(i=X,Y,Z)$$

Chú ý: Chỉ số i cho thấy w phải được lấy từ bảng 3 cho lực tương ứng. Ở đây, R_1 và R_2 có cùng một dạng. Vì vậy Λ là một toán tử dạng elliptic.

3. Kết luận

Phương pháp trình bày ở trên có thể tiến hành tương tự như đối với phương trình moment. Vì vậy việc làm này có thể bỏ qua. Chỉ cần lưu ý một điều là hàm ψ biểu thị phần chính của nghiệm cơ sở của phương trình.

$$\Lambda\Phi=\frac{1-\sigma^2}{2Eh}\frac{\delta}{AB}$$

Đối với vỏ mỏng, ta có:

$$\psi=\frac{\sqrt{R_1R_2}}{16\pi Eh\left(1-\sigma\right)}r_1^2\ln r_1^2$$

$$r_1^2=A^2R_2\left(\alpha-\alpha_0\right)+B^2R_1\left(\beta-\beta_0\right)$$

Thực hiện tính toán tương tự với các phép tính trước, ta thu được các đặc trưng cơ bản của các hàm *u, v* và *w* (bảng 3).

Các thành phần biến dạng $\varepsilon_1,\ldots,\tau$ có thể được xác định bằng cách sử dụng các hàm *u, v* và *w*. Các ứng suất và moment $T_1,\ldots,H_1$ được biểu diễn theo các biến dạng $\varepsilon_1,\ldots,\tau$ dựa trên các quan hệ của vật liệu đàn hồi. Các kết quả cho trong các bảng từ 2 đến 4.

Kết quả tính toán cho vỏ trụ tròn chịu uốn đã được so sánh với các kết quả thu được bởi Darevskii [2]. Ở đây, cũng tìm được nghiệm tiệm cận cho u, v, T_1, T_2, S_1 và S_2 trong trường hợp vỏ chịu tác dụng của các lực tập trung X và Y; trong trường hợp vỏ chịu lực Z, ta có kết quả giống như trong [2]; các trường hợp còn lại có sự sai khác do đặc điểm riêng của từng phương pháp tính toán được sử dụng.

Đối với bài toán vỏ cầu, kết quả của nhóm trùng hoàn toàn với [9]❑

Tài liệu tham khảo

[1]. Gol’ denveizer, A.L, Napriazhennoe sostoianie sfericeskoi obolochki (State of stress of a spherical shell). PMM Vol. 8, No. 6, 1994.

[2]. Darevskii, V.M, Nekotorye voprosy teorii tsilindricheskoi obolochki (Some problems of the theory of a cylindrical shell). PMM Vol.15, No. 5, 1951; PMM Vol. 27, No. 2, 1953.

[3]. Chernykh, K.F, Sviaz’ mezhdu dislokatsiiamii sosredotochennymi vozdeistviiami teorii obolochek (Relation between dislocations and concentrated loadings in the theory of shells). PMM Vol. 23, No. 2, 1959.

[4]. Gel’fand, I.M. and shilov, G.E., obobshchennye funktsii i deistviia pod nimi (Generalized Functions and Operations with them). Fizmatgiz, 1958.

[5]. Levi, E.E, O lineinykh ellipticheskikh uravneniiakh v chastnykh proizvodnykh (On linear elliptic partial differential equations).

[6]. Ion, F, Ploskie volny i sfericheskie (Plane Wave and Spherical Means). IL, 1958. [7]. Lopatinskii, Ia.B., Fundamental’naia sistema reshenii sistemy lineinykh differentsial’nykh uravnenii ellipticheskogo tipa (Fundamental system of solutions of linear differential equations of the elliptic type). Dokl. Akad. Nauk SSSR Vol. 71, No. 3, 1950.

[8]. Bers, L, Local behavior of solutions of general linear elliptic equations. Math. 8, No. 4, 1955.

[9]. Gol’denveizer, A.L, Teoriia tonkikh uprugikh obolochek (Theory of Thin Elastic Shells). Gostekhteoretizdat, 1953.

[10]. J. Michael Rotter, Adam J. Sadowski, Cylindrical shell bending theory for orthotropic shells under general axisymmetric pressure distributions, (2012).

[11]. Interlaminar stresses in thick cylindrical shell with arbitrary laminations and and boundary conditions under transverse loads, (2016).

[12]. Vincenzo Vullo, Bending theory of circular cylindrical shells under axisymmetric loads, (2013).

[13]. S. Jafari Mehrabadi, B. Sobhani Aragh, Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes, (2014).

Ngày nhận bài: 30/5/2018
Ngày chuyển phản biện: 2/6/2018
Ngày hoàn thành sửa bài: 22/6/2018
Ngày chấp nhận đăng: 29/6/2018