

ĐỊNH LÝ ÁNH XẠ CO BANACH VÀ SỰ HỘI TỤ CỦA NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN DẠNG $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$

BANACH CONTRACTION THEOREM AND THE CONVERGENCE OF THE
SOLUTION OF A DIFFERENCE EQUATION OF TYPE $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$

HOÀNG VĂN HÙNG

Khoa Cơ sở Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Email liên hệ: hhung56@gmail.com

Tóm tắt

Xét phương trình sai phân cấp k dạng $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$ (k là số nguyên ≥ 1), trong đó $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số thực đã cho hội tụ tới giới hạn M và f là một ánh xạ co chặt từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Tác giả chứng minh rằng nếu phương trình được xét có nghiệm bị chặn thì mọi nghiệm bị chặn của phương trình đó phải hội tụ về điểm bất động duy nhất của ánh xạ $f - M$.

Từ khóa: Ánh xạ co chặt, điểm bất động, phương trình sai phân cấp k , nghiệm bị chặn của phương trình sai phân, dãy hội tụ.

Abstract

Consider a k -order difference equation of type $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$ (k is an integer ≥ 1), where $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ is a given real sequence converging to M and f is a strictly contractive map from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$. The author proved that if the considered equation has bounded solutions then any its bounded solution must converge to the unique fixed point of the map $f - M$.

Keywords: Strictly contractive map, fixed point, k -order difference equation, bounded solution of a difference equation, convergent sequence.

1. Đặt vấn đề

Định lý ánh xạ co Banach được ứng dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của một số phương trình vi phân, phương trình hàm cũng như sự ổn định nghiệm của một số phương trình hàm (xem [2], [4], [5], [6], [7], [8]). Trong bài báo này tác giả sử dụng định lý ánh xạ co Banach để chứng minh sự hội tụ của các nghiệm bị chặn (nếu có) của phương trình sai phân dạng $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$, trong đó f là một ánh xạ co chặt từ tập số thực $\mathbb{R}$ vào chính nó và $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số thực đã cho hội tụ về giới hạn M .

2. Kết quả chính

Tác giả đã chứng minh định lý sau:

2.1. Định lý: Xét phương trình sai phân cấp k dạng $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$ (k là số nguyên ≥ 1), trong đó $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số thực đã cho hội tụ tới giới hạn M và f là một ánh xạ co chặt từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Khi đó mọi nghiệm bị chặn (nếu có) của phương trình được xét phải hội tụ về nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) - M = x$.

Để chứng minh kết quả trên, chúng ta cần một số định nghĩa và mệnh đề bổ trợ.

Định nghĩa 1: Cho X là một tập khác rỗng và $f : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Phần tử $x^* \in X$ gọi là một điểm bất động của ánh xạ f nếu $f(x^*) = x^*$.

Định nghĩa 2: Cho X là một không gian metric với metric d , ánh xạ $f : X \rightarrow X$ gọi là một ánh xạ co chặt nếu tồn tại số $\alpha \in [0, 1)$ sao cho $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.

Định lý ánh xạ co Banach: Cho X là một không gian metric đầy đủ với metric d , $f : X \rightarrow X$ là một ánh xạ co chặt. Khi đó f có điểm bất động duy nhất $x^* \in X$ và với mọi $x_0 \in X$ dãy lặp $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ xác định bởi $x_n = f(x_{n-1})$ ($\forall n \geq 1$) luôn hội tụ về x^* .

Trong bài báo này các ký hiệu ℓ^∞ , c_0 tương ứng chỉ không gian Banach các dãy số thực bị chặn và không gian Banach các dãy số thực hội tụ về 0 với chuẩn supremum:

$$\|x\| = \sup_n |x_n| \text{ nếu } x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ là phần tử của } \ell^\infty \text{ hoặc của } c_0.$$

Chú ý rằng c_0 là không gian con đóng của ℓ^∞ . Ta có mệnh đề:

Mệnh đề 1 (xem [3]): *Không gian thương ℓ^∞ / c_0 là không gian Banach với chuẩn $\|[x]\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$, trong đó $[x]$ là phần tử của ℓ^∞ / c_0 chỉ lớp tương đương chứa dãy $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ của không gian ℓ^∞ .*

Bây giờ ta đã sẵn sàng cho chứng minh của định lý 2.1.

Chứng minh định lý 2.1. Bởi vì $f(x_{n+k}) - x_n = r(n) \Leftrightarrow f(x_{n+k}) - M - x_n = r(n) - M$ và $f - M$ là ánh xạ co chặt nếu f là ánh xạ co chặt nên không giảm tổng quát ta có thể xem $M = 0$, tức là ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_{n+k}) - x_n] = 0$. Ký hiệu $T_k : \ell^\infty / c_0 \rightarrow \ell^\infty / c_0$ là ánh xạ đặt tương ứng lớp $[y] \in \ell^\infty / c_0$ chứa dãy $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ với lớp $[z] = T_k[y] = [\{f(y_{n+k})\}] \in \ell^\infty / c_0$ chứa dãy $z = \{z_n = f(y_{n+k})\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$. Dễ thấy, T_k được xác định một cách đúng đắn và là ánh xạ co chặt từ ℓ^∞ / c_0 vào chính nó. Thật vậy, vì f là ánh xạ co chặt nên nó liên tục (thậm chí là liên tục đều). Do đó, nếu $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ thì $z = \{z_n = f(y_{n+k})\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ (ảnh của một tập bị chặn qua một ánh xạ liên tục trên toàn bộ tập $\mathbb{R}$ là bị chặn). Mặt khác, với hai dãy tùy ý $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty, y' = \{y'_n\}_{n=1}^\infty$ thuộc cùng một lớp tương đương trong ℓ^∞ / c_0 ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y'_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_{n+k} - y'_{n+k}| = 0 \quad (1)$$

Nếu $\alpha \in [0,1]$ là số nói trong định nghĩa 2 đối với ánh xạ co chặt f ta có:

$$|f(y_{n+k}) - f(y'_{n+k})| \leq \alpha |y_{n+k} - y'_{n+k}| \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(y_{n+k}) - f(y'_{n+k})| = 0.$$

Nghĩa là các dãy $\{f(y_{n+k})\}_{n=1}^\infty$ và $\{f(y'_{n+k})\}_{n=1}^\infty$ thuộc cùng một lớp tương đương trong ℓ^∞ / c_0 nên lớp $[z] = T_k[y] = [\{f(y_{n+k})\}] \in \ell^\infty / c_0$ được xác định không phụ thuộc vào việc ta chọn đại diện nào của lớp $[y] \in \ell^\infty / c_0$. Tiếp theo, nếu $[u], [v]$ là hai phần tử tùy ý của ℓ^∞ / c_0 tương ứng chỉ các lớp tương đương chứa các dãy $u = \{u_n\}_{n=1}^\infty, v = \{v_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ ta có:

$$\begin{aligned} \|T_k[u] - T_k[v]\| &= \limsup |f(u_{n+k}) - f(v_{n+k})| \leq \alpha \limsup |u_{n+k} - v_{n+k}| \\ &= \alpha \limsup |u_n - v_n| = \alpha \|[u] - [v]\| \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ T_k là ánh xạ co chặt từ không gian Banach ℓ^∞ / c_0 vào chính nó. Theo định lý ánh xạ co Banach, T_k có duy nhất một điểm bất động $[x^*]$ là lớp tương đương chứa dãy $x^* = \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$. Theo định nghĩa của ánh xạ T_k điều đó có nghĩa là:

$$T_k[x^*] = [x^*] \Leftrightarrow [\{f(x_{n+k}^*)\}_{n=1}^\infty] = [\{x_n^*\}_{n=1}^\infty] \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_{n+k}^*) - x_n^*| = 0.$$

Nhưng mặt khác, theo giả thiết của định lý 2.1, dãy $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ và thỏa mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_{n+k}) - x_n) = 0.$$

Vậy lớp $[x] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cũng là một điểm bất động của ánh xạ T_k . Do tính duy nhất của điểm bất động $[x^*]$ ta phải có $[x^*] = [x]$. Vì f là ánh xạ co chặt từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, nó có duy nhất một điểm bất động $a \in \mathbb{R}$. Xét dãy dừng $w = \{w_n = a\}_{n=1}^{\infty}$. Ta có:

$$f(a) = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f(w_{n+k}) - w_n) = 0$$

Vậy lớp $[w] = \{w_n = a\}_{n=1}^{\infty}$ cũng là một điểm bất động của ánh xạ T_k . Lại vì điểm bất động của T_k là duy nhất, ta phải có $[x^*] = [x] = [w]$. Đẳng thức cuối cùng có nghĩa là:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - w_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

2.2. Nhận xét

- Các phương trình sai phân thỏa mãn điều kiện của định lý 2.1 có thể có các nghiệm không bị chặn. Chẳng hạn, phương trình sai phân $\frac{1}{2}x_{n+1} - x_n = 0$ ($f(x) = \frac{x}{2}, r(n) = 0, k = 1$) có nghiệm tổng quát là $x_n = C.2^n$. Khi $C \neq 0$ các nghiệm này không bị chặn. Vì vậy, trong phát biểu của định lý 2.1 không thể bỏ đi giả thiết về tính bị chặn của các nghiệm được xét.

- Khẳng định của định lý 2.1 vẫn còn đúng nếu phương trình $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$ được xét trong miền phức. Chỉ cần thay các giả thiết trong định lý 2.1 tương ứng bởi các giả thiết " f là một ánh xạ co chặt từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}$ ", " $\{r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số phức đã cho hội tụ tới giới hạn M ". Chứng minh không có gì thay đổi, bởi vì mệnh đề 1 vẫn còn đúng đối với các không gian $\ell^{\infty}(\mathbb{C})$ các dãy số phức bị chặn và không gian $c_0(\mathbb{C})$ các dãy số phức hội tụ về 0.

- Nếu trong phát biểu của định lý 2.1 ta thêm vào giả thiết về tính bị chặn đối với ánh xạ f (nghĩa là tập $f(\mathbb{R})$ bị chặn trong $\mathbb{R}$) thì có thể bỏ đi giả thiết về tính bị chặn của nghiệm, bởi vì khi đó giả thiết này tự động được thỏa mãn. Thực vậy, giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một nghiệm của phương trình $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$ và $|f(x)| \leq A < +\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_{n+k}) - x_n] = M$ ta suy ra dãy $\{f(x_{n+k}) - x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn. Vậy tồn tại số $B > 0$ sao cho $|f(x_{n+k}) - x_n| < B$ với mọi số nguyên dương n . Suy ra $|x_n| < B + |f(x_{n+k})| < B + A$ với mọi n nguyên dương. Điều đó có nghĩa là dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn.

3. Các ví dụ áp dụng

Trước hết ta có nhận xét rằng nếu $f(x)$ là một hàm thực liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là một nghiệm (không bắt buộc phải duy nhất) của phương trình $f(x) - M = x$ thì mọi dãy dạng $\{x_n = a + s_n\}_{n=1}^{\infty}$, trong đó $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số thực có giới hạn bằng 0, sẽ thỏa mãn điều kiện $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_{n+k}) - x_n) = M$. Do đó, có vô số các dãy số thực thỏa mãn điều kiện trong các ví dụ dưới đây. Với các điều kiện của định lý 2.1 ta có khẳng định ngược lại, rằng nếu dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn và thỏa mãn điều kiện $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_{n+k}) - x_n) = M$, thì nó phải có dạng $\{x_n = a + s_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số thực có giới hạn bằng 0.

Ví dụ 1: Cho số thực $\alpha \in [0,1]$ và k là một số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn và thỏa mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_{n+k} - x_n) = M \in \mathbb{R}$$

$$\text{thì } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{M}{\alpha - 1}.$$

(Xem ví dụ 1 trong [1], bài tập số 637.2 trong [9] và bài tập 1.18 trong [10] để so sánh).

Giải. Đặt $f(x) = \alpha x$, $r(n) = \alpha x_{n+k} - x_n$. Khi đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một nghiệm bị chặn của phương trình $f(x_{n+k}) - x_n = r(n)$. Rõ ràng $f: x \rightarrow f(x) = \alpha x$ là ánh xạ co chặt từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_{n+k} - x_n) = M$. Điểm bất động duy nhất của ánh xạ $f - M$ là nghiệm của phương trình $\alpha x - M = x \Leftrightarrow x = \frac{M}{\alpha - 1}$. Áp dụng định lý 2.1 ta suy ra ngay khẳng định của bài toán.

Ví dụ 2: Giả sử dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn và thỏa mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1 + x_{n+1}^2) - x_n \right) = 1 - \sqrt{e^2 - 1}.$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. Đặt $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$, $r(n) = \frac{1}{2} \ln(1 + x_{n+1}^2) - x_n$. Khi đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một nghiệm bị chặn của phương trình $f(x_{n+1}) - x_n = r(n)$. Ta có:

$$|f'(x)| = \left| \frac{x}{1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Từ định lý Lagrange suy ra ánh xạ $f: x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ là ánh xạ co chặt từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Ngoài ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1 + x_{n+1}^2) - x_n \right) = 1 - \sqrt{e^2 - 1}.$$

Vậy mọi giả thiết của định lý 2.1 được thỏa mãn. Từ khẳng định của định lý 2.1 suy ra dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến điểm bất động duy nhất của ánh xạ $g: x \rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \sqrt{e^2 - 1} - 1$.

Nghiệm duy nhất của phương trình $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \sqrt{e^2 - 1} - 1 = x$ là $a = \sqrt{e^2 - 1}$. Do đó từ định lý

2.1 suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{e^2 - 1}$.

Ví dụ 3: Cho số thực $\alpha \in [0, 1)$ và dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \arctan x_{n+2019} - x_n) = \frac{\alpha\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. Bởi vì $|\alpha \arctan x| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$ với mọi số thực x nên theo nhận xét ở cuối mục 2.2 ta suy ra dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn. Đặt $f(x) = \alpha \arctan x$, $r(n) = \alpha \arctan x_{n+2019} - x_n$. Khi đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một nghiệm bị chặn của phương trình $f(x_{n+2019}) - x_n = r(n)$. Ta có:

$$|f'(x)| = \left| \frac{\alpha}{1+x^2} \right| \leq \alpha < 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Do đó, ánh xạ $f: x \rightarrow f(x) = \alpha \arctan x$ là ánh xạ co chặt từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Mặt khác:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \arctan x_{n+2019} - x_n) = \frac{\alpha\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy mọi giả thiết của định lý 2.1 được thỏa mãn (với $k = 2019$). Theo khẳng định của định lý, dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ phải hội tụ đến điểm bất động duy nhất của ánh xạ

$$h: x \rightarrow h(x) = \alpha \arctan x + \frac{3\sqrt{3} - \alpha\pi}{3}.$$

Phương trình $\alpha \arctan x + \frac{3\sqrt{3} - \alpha\pi}{3} = x$ có nghiệm duy nhất $x^* = \sqrt{3}$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Hoàng Văn Hùng. Về một lớp phương trình sai phân có nghiệm hội tụ. Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải. ISSN 1859-316X, tr 132-136, Số 46-3/2016.
- [2] Hoàng Văn Hùng. Some remarks on the stability of the functional equation $f(g(x,y)) = F(f(x),f(y))$. Tạp chí khoa học - Trường Đại học Quy Nhơn, ISSN: 1859-0357, tr. 35-45, Tập 11, số 1, 2017.
- [3] Borwein, J.M and Sims B. Nonexpansive mappings on Banach lattices. C.P. Math. Rep. Acad. Sci. Canada-Vol.V.No 1, February 1983.
- [4] Robert M. Brooks, Klauss Schmitt. The contraction mapping principle and some applications. Electronic Journal of differential equation. Monograph 09.2009, (90 pages). ISSN:1072-6691.
- [5] V.Radu. The fixed point alternative and the stability of functional equation. Fixed point Theory, 4, pp 91-96, 2003.
- [6] S-M Jung and Z-H Lee. A fixed point approach to the stability of quadratic functional equation with involution. Fixed point Theory and Application, vol 2008, Article ID 732086, 11 pages, 2008.
- [7] S-M Jung and S.Min. A fixed point approach to the stability of the functional equation $f(x+y) = F(f(x),f(y))$. Fixed point Theory and Application, vol 2009, Article ID 912046, 8 pages, 2009.
- [8] C.Park and T.M. Rassias. Fixed point and stability of the Cauchy functional equation. The Australian Jour.of Math. Analysis and Applications, vol 6, Issue 1. Article 14, pp 1-9, 2009.
- [9] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Издательство "Наука", восьмое издание, Москва 1979.
- [10] Б.М.Макаров, М.Г.Голузина, А.А.Лодкин, А.Н.Подкорытов. Избранные задачи по вещественному анализу. Москва "Наука", 1992.

Ngày nhận bài: 21/11/2018

Ngày nhận bản sửa: 25/12/2018

Ngày duyệt đăng: 28/12/2018