

NGHIÊN CỨU ỨNG SUẤT CỦA DÀM CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI THEO LÝ THUYẾT PHI CỔ ĐIỂN

INVESTIGATION OF THE STRESS OF VARIABLE-THICKNESS BEAM USING NON-CLASSICAL THEORY

DOÃN QUÝ HIẾU

Viện Độ bền nhiệt đới, Trung tâm Nhiệt đới Việt - Nga

Email liên hệ: dqhieu57@gmail.com

Tóm tắt

Trong kết cấu cơ khí của tàu, thuyền và các thiết bị thuộc lĩnh vực hàng hải, có rất nhiều chi tiết được chế tạo có hình dạng tấm, vỏ, dầm có tiết diện thay đổi. Việc tính toán trạng thái ứng suất biến dạng của các chi tiết dạng này ngày càng đòi hỏi có độ chính xác cao hơn. Bài báo trình bày phương pháp nghiên cứu ứng suất của dầm có tiết diện thay đổi theo lý thuyết phi cổ điển. Mô hình toán học được xây dựng dựa trên hệ phương trình theo lý thuyết đàn hồi. Các giá trị chuyển vị, ứng suất được phân tích dưới dạng các đa thức bậc cao hơn so với phương pháp cổ điển. Kết quả tính toán cho thấy các giá trị ứng suất tại vị trí ngàm chặt cao hơn đáng kể so với phương pháp cổ điển.

Từ khóa: *Lý thuyết dầm, tải trọng, dầm có độ dày thay đổi, ứng suất biến dạng, lý thuyết phi cổ điển.*

Abstract

In the mechanical structure of ships, boats and equipment in the marine field, there are many details that were manufactured in the shape of plates, shells, beams with variable-thickness. The calculation of the stress-deformed state of such parts is increasingly demanding with higher accuracy. This paper presents a method to study the stress of beams with variable-thickness according to non-classical theory. The mathematical model was based on the system of equations according to the theory of elasticity. The values of displacement, stress are analyzed as polynomials of higher order than the classical method. The calculation results show that the stress values at the fastening position are significantly higher than that of the classical method.

Keywords: *Beam theory, loads, variable thickness beam, stress-deformation, non-classical theory.*

1. Mở đầu

Ngày nay, nhiều chi tiết và sản phẩm cơ khí, điện tử trong các ngành công nghiệp, hàng hải được thiết kế dưới dạng cấu trúc vỏ, tấm và dầm có độ dày thay đổi. Đặc điểm hình học của chúng là có mặt phẳng dưới nghiêng một góc nào đó so với mặt phẳng trên. Các tính toán kỹ thuật của tất cả các loại mối nối, vị trí lắp ghép bao gồm mặt bích, hàn và kết dính, được sử dụng để gắn chặt các phần tử kết cấu thành móng, dựa trên kết quả của lý thuyết cổ điển Kirchhoff - Love. Lý thuyết cổ điển để tính toán trạng thái ứng suất biến dạng của tấm, vỏ được trình bày trong tài liệu [1].

Với sự phát triển của công nghệ thông tin và toán học, ngày càng có nhiều phương pháp số, phương pháp phi cổ điển cho phép tính toán với độ chính xác cao hơn. Các phương pháp phi cổ điển của A.L. Goldenveizer, V. V. Vasiliev, S. A. Lurie về lý thuyết tấm vỏ được trình bày trong các tài liệu [2, 3]. Trong đó sử dụng phương trình trạng thái ứng suất biến dạng 3 chiều theo lý thuyết đàn hồi, và các chuyển vị được phân tích thành các đa thức bậc cao hơn so với lý thuyết cổ điển. Trạng thái ứng suất biến dạng của vỏ trụ, tấm chữ nhật theo phương pháp của V.V. Firsanov được trình bày trong các tài liệu [5, 6]. Trong đó, hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên thu được bằng cách sử dụng phương pháp biến phân Lagrange, hệ phương trình vi phân bậc cao với hệ số thay đổi được giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn.

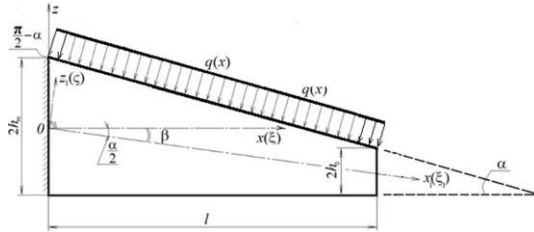
Trong bài báo này, tác giả trình bày nghiên cứu tính toán ứng suất của dầm có tiết diện thay đổi. Việc xây dựng hệ phương trình trạng thái ứng suất biến dạng đầy đủ của dầm được thực hiện tương tự phương pháp tính toán cho tấm vật liệu composite hình chữ nhật trong tài liệu [4]. Khi giải bài toán, phép chuyển sang hệ tọa độ xiên được sử dụng, điều này cho phép ta đưa hệ phương trình vi phân về hệ phương trình Euler. Các giá trị chuyển vị, ứng suất được phân tích dưới dạng các đa thức bậc cao hơn so với phương pháp cổ điển.

Dựa trên bài toán biên đã được xây dựng, bài báo đã tính toán ứng suất cho dầm có tiết diện thay đổi, và đưa ra nhận xét các khác biệt về kết quả so với phương pháp cổ điển.

2. Đối tượng và phương pháp nghiên cứu

2.1. Đối tượng nghiên cứu

Khảo sát dầm được chế tạo từ vật liệu đẳng hướng chịu tải trọng $q(x)$ trong hệ tọa độ (x, z) (Hình 1).



Hình 1. Dầm có tiết diện thay đổi

Để xác định, chúng ta giả sử rằng cạnh $x = 0$ của dầm được kẹp chặt. Cạnh còn lại $x = l$ của dầm có thể có điều kiện biên bất kỳ, tự do, tựa, ngàm chặt, chịu tải các lực như mô men uốn và lực cắt. Độ dày thay đổi của dầm $2h$ được xác định bởi công thức:

$$h = h_m - x \cdot \operatorname{tg}(\alpha). \quad (1)$$

Trong đó:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = (h_m - h_0) / l. \quad (2)$$

Từ hệ tọa độ (x, z) , chúng ta sẽ chuyển sang hệ tọa độ xiên (x_1, z_1) theo công thức sau:

$$x_1 = x / \cos(\alpha), \quad z_1 = z + x \cdot \sin(\alpha). \quad (3)$$

Các biến độc lập không thứ nguyên được đưa vào theo các công thức:

$$x_1 = l \cdot \xi / \cos(\alpha), \quad z_1 = h \cdot \zeta. \quad (4)$$

Điều kiện biên ở mặt phẳng trên và mặt phẳng dưới của dầm được xác định như sau:

Tại mặt phẳng trên của dầm $z_1 = h$

$$\sigma_z + 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \tau_{xz} = -q, \quad (5)$$

$$\tau_{xz} + 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \sigma_z = -2q \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Tại mặt phẳng dưới của dầm $z_1 = -h$

$$\sigma_z + 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \tau_{xz} = -q. \quad (6)$$

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Hệ phương trình vi phân của bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi trong hệ tọa độ Descartes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x,$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

Các chuyển vị và ứng suất trong hệ phương trình (7) được phân tích dưới dạng đa thức như sau:

$$w = w(\xi), \quad u = \zeta u_1 + u_0(\xi)$$

$$\sigma_x = \zeta \sigma_{x1} + \sigma_{x0}, \quad \tau_{xz} = \zeta^2 \tau_{xz2} + \zeta \tau_{xz1} + \tau_{xz0}, \quad (8)$$

$$\sigma_z = \zeta^3 \sigma_{z3} + \zeta^2 \sigma_{z2} + \zeta \sigma_{z1} + \sigma_{z0}$$

Trong đó:

$$u_1 = -h_* \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \sigma_{x1} = -\frac{E}{l} (h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi}),$$

$$\sigma_{x0} = -\frac{E}{l} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right), \quad \tau_{xz2} = -\frac{E h_*}{2l} (h_* \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} -$$

$$- 2\operatorname{tg}\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}), \quad \tau_{xz1} = \frac{E}{l} (2\operatorname{tg}\alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} -$$

$$- h_* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2}), \quad \tau_{xz0} = -\frac{E}{l} \left(\frac{1}{2} h_*^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - 3\operatorname{tg}\alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} +$$

$$+ \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} + h_* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} \right), \quad \sigma_{z3} = -\frac{E h_*}{6l} (h_*^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} -$$

$$- 4\operatorname{tg}\alpha h_*^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 2\operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}), \quad \sigma_{z2} = -\frac{E h_*}{2l} (3\operatorname{tg}\alpha h_* \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - 5\operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - h_* \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi^3} + \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2}),$$

$$\sigma_{z1} = \frac{E}{l} \left(\frac{1}{2} h_*^3 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4\operatorname{tg}\alpha h_*^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 2\operatorname{tg}^2 \alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} +$$

$$+ \operatorname{tg}^3 \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} + h_*^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi^3} \right), \quad \sigma_{z0} = \frac{E}{l} \left(\frac{1}{3} h_*^3 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} -$$

$$- \frac{11}{6} \operatorname{tg}\alpha h_*^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{5}{6} \operatorname{tg}\alpha h_*^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \operatorname{tg}^3 \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} +$$

$$+ \frac{1}{2} h_*^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha h_* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} \right).$$

Như vậy chuyển vị và ứng suất theo phương pháp phi cổ điển được biểu diễn dưới dạng các đa thức bậc cao hơn so với phương pháp cổ điển, trong đó đặc biệt là các ứng suất σ_z và τ_{xz} . Thay các phân tích dưới dạng đa thức (8) vào phương trình cân bằng (7) của dầm, ta thu được hệ phương trình vi phân cho các chuyển vị u và w_0 như sau:

$$h_*^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - tg \alpha h_* \frac{\partial u_0}{\partial \xi} - tg \alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + tg^2 \alpha h_* \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{h}{bE} q tg \alpha = 0, \quad (9)$$

$$h_*^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 10 tg \alpha h_*^3 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 17 tg^2 \alpha h_*^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 3 tg^3 \alpha h_* \frac{\partial w}{\partial \xi} + 3 h_*^3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi^3} - 6 tg \alpha h_*^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \frac{3 h q}{2 b E} = 0,$$

Trong đó: $h_* = h/l$, các điều kiện biên ở cạnh $x=l$ của dầm có các trường hợp như sau:

Trường hợp ngàm chặt:

$$u_0 = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0.$$

Trường hợp cạnh tự do, có đặt các tải trọng như lực tập trung, mô men uốn:

$$N_x = N, M_x = M, Q_x = Q$$

Trong đó:

$$N_x = 2Eh_* \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi} - tg \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right),$$

$$M_x = -\frac{2}{3} Eh_* h \left(h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - tg \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right),$$

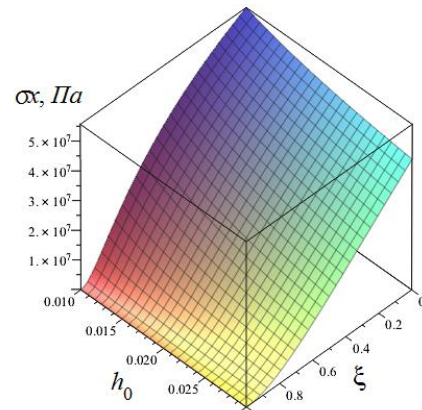
$$Q_x = -2Eh_* \left(\frac{1}{3} h_*^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{8}{3} tg \alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + tg^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + h_*^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} \right).$$

Hệ phương trình vi phân bậc cao (9) với các hệ số thay đổi (do tiết diện của dầm thay đổi) và các điều kiện biên được giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Sau khi tìm được các chuyển vị, thay vào (8) thu được các ứng suất σ_x , σ_z , τ_{xz} của dầm. Chương trình tính toán được lập trình bằng phần mềm Maple.

3. Kết quả và thảo luận

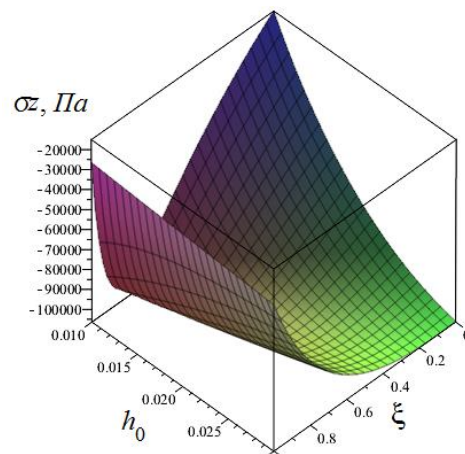
Khảo sát dầm có độ dày thay đổi, chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều $Q = 2 \cdot 10^4 Pa$. Cạnh $x=0$ của dầm được ngàm chặt, cạnh $x=l$ tự do. Kích thước chiều rộng, chiều dài, độ dày của dầm là: $b = 0,03(m)$, $l = 1(m)$, $h_m = 0,06(m)$. Hệ số Poisson $\mu = 0,3$, mô đun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^{11} Pa$.

Đồ thị ứng suất σ_x ở mặt phẳng trên của dầm được thể hiện trên Hình 2. Dễ thấy theo điều kiện biên, tại cạnh tự do ($\xi = 1$) thì ứng suất gần như bằng 0. Khi độ dày h_0 tăng lên 3 lần thì ứng suất giảm đáng kể (10-15%).



Hình 2. Đồ thị σ_x ở mặt phẳng trên của dầm

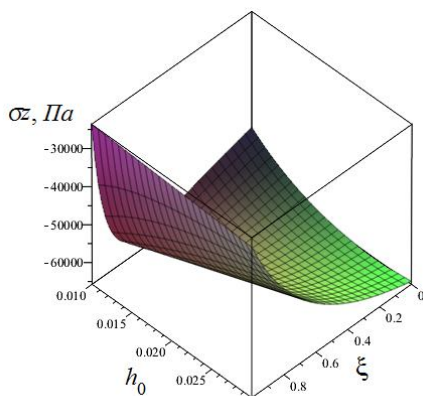
Đồ thị ứng suất σ_z ở mặt phẳng trên của dầm ($\xi = 1$) được thể hiện trên Hình 3. Giá trị σ_z thay đổi phụ thuộc vào h_0 và giá trị lớn nhất đạt khoảng $10^5 Pa$. Giá trị σ_z ở mặt phẳng dưới của dầm ($\xi = -1$) nhỏ hơn đáng kể so với mặt phẳng trên, giá trị lớn nhất giảm khoảng 25-30% (Hình 4). Khi độ dày của dầm thay đổi (góc α thay đổi), giá trị ứng suất τ_{xz} thay đổi nhiều hơn so với σ_x (Hình 5). Ở mặt phẳng dưới của dầm, giá trị τ_{xz} gần như bằng 0 (Hình 6).



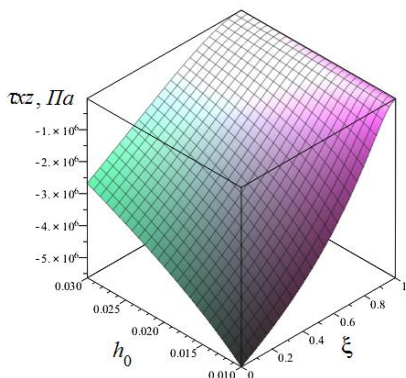
Hình 3. Đồ thị σ_z ở mặt phẳng trên của dầm

Như vậy tại vị trí ngàm chặt, phương pháp phi cổ điển cho kết quả tính toán trạng thái ứng suất biến dạng của dầm với các giá trị ứng suất σ_z và τ_{xz} chiếm một tỷ lệ nhất định so với σ_x . Điều này khác biệt vì ứng suất σ_z được bỏ qua trong phương pháp cổ điển.

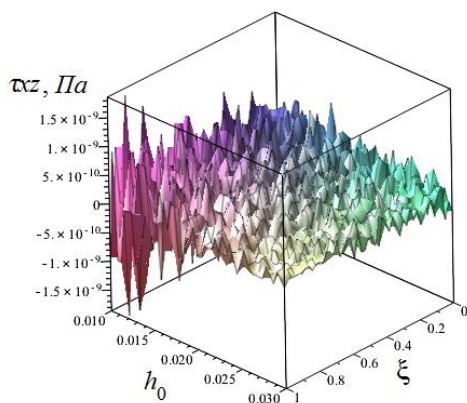
Kết quả nghiên cứu tính toán cho dầm có tiết diện thay đổi theo phương pháp phi cổ điển cũng phù hợp với các kết luận trong các tài liệu [2-6].



Hình 4. Đồ thị σ_z ở mặt phẳng dưới của dầm



Hình 5. Đồ thị τ_{xz} ở mặt phẳng trên của dầm



Hình 6. Đồ thị τ_{xz} ở mặt phẳng dưới của dầm

4. Kết luận

Trên cơ sở tính toán lý thuyết và ví dụ cụ thể trình bày trên ta có thể rút ra những kết luận sau:

1) Sử dụng phương pháp phân tích các thành phần chuyển vị của dầm dưới dạng đa thức bậc cao so với lý thuyết cổ điển, đã xây dựng được bài toán biên xác định trạng thái ứng suất biến dạng của dầm có độ dày thay đổi;

2) Đưa ra so sánh kết quả tính toán ứng suất của dầm theo lý thuyết cổ điển và phi cổ điển. Tại vùng lân cận biên, phương pháp phi cổ điển cho độ chính xác cao hơn: Các ứng suất pháp σ_z và τ_{xz} có sự thay đổi, tăng thêm đáng kể so với lý thuyết cổ điển;

3) Bài báo đã trình bày phương pháp phi cổ điển để nghiên cứu ứng suất dầm có tiết diện thay đổi. Kết quả tính toán có thể áp dụng để nghiên cứu độ bền các chi tiết dạng dầm, tấm, vỏ trong lĩnh vực cơ khí động lực, đóng tàu, hàng hải.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. P. Timoshenko, S. Voinovsky-Krieger (1966), *Plates and shells*, Moscow, 636p.
- [2] A.L. Goldenveizer (1976), *The Theory of Thin Elastic Shells*, Moscow, Nauka, 512p.
- [3] V. V. Vasiliev, S. A. Lurie (1990), *On the problem of constructing a non-classical theory of plates*, Izv. AN. MTT, No.2, pp.158-167.
- [4] V.V. Firsanov (2002), *Refinement of the classical theory of rectangular plates made of composite materials*, Mechanics of Composite Materials and Structures, Ed. IPRIM Russian Academy of Sciences, Vol.8, No.1, pp.28-64.
- [5] V.V. Firsanov (2018), *The stressed state of the "boundary layer" type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory*, Journal of machinery, manufacture and reliability, Vol.47, No.3, pp.241-248.
- [6] Doãn Quý Hiếu (2021), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng tấm chữ nhật có độ dày thay đổi theo lý thuyết phi cổ điển*, TNU Journal of Science and Technology, Số.226(11), tr.124-130. doi: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.4521>.

Ngày nhận bài:	14/4/2022
Ngày nhận bản sửa:	25/4/2022
Ngày duyệt đăng:	05/5/2022