

TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA MÔ HÌNH Ô TÔ
CÓ XÉT ĐẾN PHẦN TỬ ĐÀN NHÓT CẤP PHÂN SỐ
CALCULATE VIBRATION OF CAR MODEL IN WHICH VISCOELASTIC
MATERIAL CONTAIN FRACTIONAL ORDER DERIVATIVES

NGUYỄN ĐÌNH KHIÊM, HOÀNG MẠNH CƯỜNG*

Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

*Email liên hệ: cuonghm@vimaru.edu.vn

Tóm tắt

Trong bài báo này, nghiên cứu phương pháp tính toán số, tìm nghiệm của các hệ phương trình vi phân có chứa các thành phần đạo hàm cấp không nguyên. Ban đầu, một công thức định nghĩa về đạo hàm cấp phân số được trình bày, dựa vào định nghĩa này, một công thức xấp xỉ tính toán đạo hàm cấp phân số đã được xây dựng và lập trình tính toán. Sử dụng chương trình tính toán xây dựng được để tính toán dao động của mô hình ô tô trong đó có kể đến các thành phần đàn nhót cấp phân số.

Từ khóa: Đạo hàm cấp phân số, dao động, phương pháp số.

Abstract

This paper focus on research of numerical methods for solving systems of differential equations that contain fractional order derivatives. At first, the definitions of fractional order derivatives were presented, based on these definitions, an approximation formula for calculating fractional order derivatives was built and programmed. Finally, the program that has been built are used to calculate vibration of car model in which viscoelastic material contain fractional order derivatives.

Keywords: Fractional-order derivative, vibration, numerical method.

1. Mở đầu

Lý thuyết đạo hàm cấp không nguyên đã được đưa ra từ cuối thế kỷ XIX. Lúc đầu lý thuyết này là một lĩnh vực thuần túy của toán học. Tuy nhiên, một vài chục năm gần đây, với sự ra đời của nhiều vật liệu mới, người ta thấy rằng, đạo hàm và tích phân cấp phân số rất phù hợp cho sự mô tả tính chất của các vật liệu này [16, 18].

Có nhiều ứng dụng của đạo hàm cấp phân số trong lĩnh vực cơ học đã được quan tâm nghiên cứu,

trong các công trình [1, 4, 13, 14] đã đề cập đến việc thiết lập mô hình của tính chất cơ học các vật liệu. Các công trình [7, 9, 11] nghiên cứu mô hình trạng thái của những vật liệu đàn nhót và nhót dẻo dưới ảnh hưởng của ngoại lực. Các công trình [5] mô tả sự tắt dần của những hệ cơ học, [8] nghiên cứu mô hình của các hệ đàn nhót,...

Việc mô hình hóa và mô tả tính chất của các cơ hệ thông qua đạo hàm cấp phân số, tất nhiên, sẽ dẫn tới những phương trình vi phân có chứa các thành phần đạo hàm cấp phân số và dẫn tới sự cần thiết phải giải những phương trình như vậy.

Trong bài báo này, nhóm tác giả tập trung nghiên cứu tính toán các đạo hàm cấp không nguyên bằng phương pháp số, kết hợp với thuật toán Runge-Kutta bậc 4 thiết lập một chương trình tính toán số, tìm nghiệm của các hệ phương trình vi phân có chứa các thành phần đạo hàm cấp không nguyên. Sử dụng chương trình thiết lập được, tính toán dao động của mô hình ô tô, trong đó có kể đến các thành phần đàn nhót cấp phân số.

2. Đạo hàm cấp phân số trong các hệ dao động

2.1. Đạo hàm cấp phân số trong các phương trình động lực học

Xét mô hình động lực học có dạng như Hình 1, trong đó khối lượng m được liên kết với nền bằng một lò xo tuyến tính độ cứng k và một thành phần cản nhót cấp α ($0 < \alpha < 1$) độ cản c , chịu tác dụng của lực $F(t)$. Áp dụng định luật 2 Newton, ta có:

$$m\ddot{q}(t) = F(t) - R_1(t) - R_2(t) \quad (1)$$

Theo [19], lực đàn hồi R_1 và lực cản nhót R_2 là lực cản của cản nhót, được cho bởi công thức:

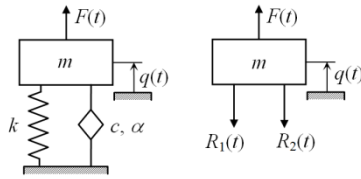
$$R_1(t) = kq(t), R_2(t) = cD_t^\alpha q(t) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được phương trình động lực học có dạng:

$$m\ddot{q}(t) + cD_t^\alpha q(t) + kq(t) = F(t) \quad (3)$$

Phương trình (3) là phương trình động lực học có chứa đạo hàm cấp phân số, từ đó cho thấy, trong các phương trình động lực học, đạo hàm cấp phân số xuất hiện là do thành phần cản cấp phân số có mặt

trong các mô hình dao động.



Hình 1. Mô hình dao động có cản nhớt cấp phân số

Để giải được các hệ phương trình vi phân có dạng như phương trình (3) bằng các phương pháp số, ta cần phải tính được các thành phần đạo hàm cấp không nguyên trong các phương trình đó.

2.2. Công thức tính toán số đối với đạo hàm cấp phân số

Theo tài liệu [10] đạo hàm cấp α , của hàm $f(t)$, được cho bởi công thức:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \quad (4)$$

Giả sử $f(t)$ là hàm liên tục trong khoảng $[0, T]$, ta chia lưới khoảng trên với bước chia h , với các điểm chia $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots$ như sau:

$$t_0 = 0, t_1, \dots, t_i, t_{i+1} = t_i + h, \dots \quad (5)$$

Từ (4) ta có đạo hàm cấp α của $f(t)$ tại thời điểm t_i có dạng:

$$D_t^\alpha f(t_i) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_i} \frac{\dot{f}(\tau) d\tau}{(t_i-\tau)^\alpha} + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_i^{-\alpha} \quad (6)$$

Xấp xỉ thành phần tích phân trong (6) bằng công thức hình thang [12], ta được:

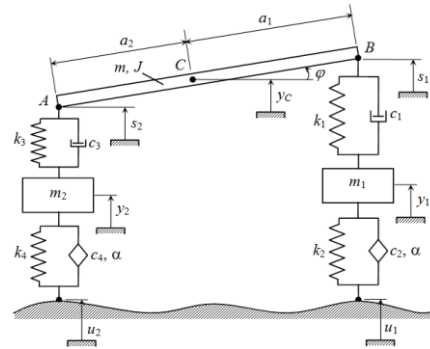
$$D_t^\alpha f(t_i) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(t_0) t_i^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\dot{f}(t_0) t_i^{1-\alpha} + \frac{h}{2} \ddot{f}(t_0) (t_i - t_0)^{1-\alpha} + h \sum_{j=1}^{i-1} \ddot{f}(t_j) (t_i - t_j)^{1-\alpha} \right) \quad (7)$$

Công thức (7) cho ta xấp xỉ của đạo hàm cấp α , tại thời điểm t_i .

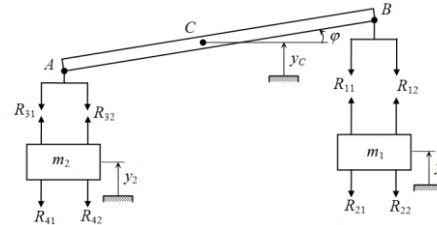
3. Phương trình động lực học của hệ dao động ô tô có kể đến phần tử cản cấp phân số

Xét mô hình dao động của ô tô như Hình 2, trong đó thân xe có khối lượng m được xem như một vật rắn chuyển động song phẳng, gọi J là mô men quán tính của thân xe đối trục đi qua khối tâm C , các bánh xe được mô hình hóa bằng các vật rắn có khối lượng m_1 và m_2 . Hệ thống treo của ô tô được mô hình hóa bằng các lò xo k_1, k_3 và các thành phần cản nhớt c_1, c_2, c_3, c_4 .

Liên kết giữa các bánh xe và mặt đường được mô hình hóa bởi các lò xo k_2, k_4 và các thành phần cản nhớt cấp phân số α ($0 < \alpha < 1$) c_2, c_4 . Biên dạng của mặt đường được mô hình hóa bởi các dịch chuyển u_1 và u_2 .



Hình 2. Mô hình dao động của ô tô



Hình 3. Các lực tác dụng lên hệ dao động

Bỏ qua dịch chuyển theo phương ngang của thân xe, khi đó các lực tác dụng lên hệ được cho như trên Hình 3, trong đó các thành phần lực đàn hồi $R_{11}, R_{21}, R_{31}, R_{41}$ và lực cản $R_{12}, R_{22}, R_{32}, R_{42}$, được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} R_{11} = k_1(y_C + a_1\varphi - y_1) \\ R_{12} = c_1(\dot{y}_C + a_1\dot{\varphi} - \dot{y}_1) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} R_{21} = k_2(y_1 - u_1) \\ R_{22} = c_2 D^\alpha (y_1 - u_1) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} R_{31} = k_3(y_C - a_2\varphi - y_2) \\ R_{32} = c_3(\dot{y}_C - a_2\dot{\varphi} - \dot{y}_2) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} R_{41} = k_4(y_2 - u_2) \\ R_{42} = c_4 D^\alpha (y_2 - u_2) \end{cases} \quad (11)$$

Áp dụng định luật 2 Newton cho các bánh xe, ta có:

$$m_1 \ddot{y}_1 = R_{11} + R_{12} - R_{21} - R_{22} \quad (12)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = R_{31} + R_{32} - R_{41} - R_{42} \quad (13)$$

Áp dụng nguyên lý D'Alembert cho thân xe, ta có:

$$m \ddot{y}_C = -R_{11} - R_{12} - R_{31} - R_{32} \quad (14)$$

$$J \ddot{\varphi} = -a_1(R_{11} + R_{12}) + a_2(R_{31} + R_{32}) \quad (15)$$

Thay (8), (9), (10), (11) vào các phương trình (12), (13), (14) và (15), ta được hệ các phương trình mô tả dao động của ô tô có dạng:

$$m\ddot{y}_C + (c_1 + c_3)\dot{y}_C + (c_1a_1 - c_3a_2)\dot{\phi} - c_1\dot{y}_1 - c_3\dot{y}_2 + (k_1 + k_3)y_C + (k_1a_1 - k_3a_2)\phi - k_1y_1 - k_3y_2 = 0 \quad (16)$$

$$J\ddot{\phi} = -a_1k_1(y_C + a_1\phi - y_1) - a_1c_1(\dot{y}_C + a_1\dot{\phi} - \dot{y}_1) + a_2k_3(y_C - a_2\phi - y_2) + a_2c_3(\dot{y}_C - a_2\dot{\phi} - \dot{y}_2) \quad (17)$$

$$m_1\ddot{y}_1 - c_1\dot{y}_C - c_1a_1\dot{\phi} + c_1\dot{y}_1 - k_1y_C - k_1a_1\phi + (k_1 + k_2)y_1 - k_2u_1 = -c_2D^\alpha(y_1 - u_1) \quad (18)$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_3\dot{y}_C + c_3a_2\dot{\phi} + c_3\dot{y}_2 - k_3y_C + k_3a_2\phi + (k_3 + k_4)y_2 - k_4u_2 = -c_4D^\alpha(y_2 - u_2) \quad (19)$$

Các phương trình (16), (17), (18) và (19) cho ta một hệ phương trình vi phân cấp 2, để đưa hệ này về hệ phương trình vi phân cấp 1, ta đặt:

$$\mathbf{q} = [y_C, \phi, y_1, y_2, \dot{y}_C, \dot{\phi}, \dot{y}_1, \dot{y}_2]^T \quad (20)$$

Khi đó ta được hệ phương trình vi phân có dạng:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D} + \mathbf{U} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \mathbf{q}, D^\alpha q_3, D^\alpha q_4, D^\alpha u_1, D^\alpha u_2) \quad (21)$$

Trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{E}_{4 \times 4} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_1 = - \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_3}{m} & \frac{k_1a_1 - k_3a_2}{m} & -\frac{k_1}{m} & -\frac{k_3}{m} \\ \frac{k_1a_1 - k_3a_2}{J} & \frac{k_1a_1^2 + k_3a_2^2}{J} & -\frac{k_1a_1}{J} & \frac{k_3a_2}{J} \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_1a_1}{m_1} & \frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_3}{m_2} & \frac{k_3a_2}{m_2} & 0 & \frac{k_3 + k_4}{m_2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_2 = - \begin{bmatrix} \frac{c_1 + c_3}{m} & \frac{c_1a_1 - c_3a_2}{m} & -\frac{c_1}{m} & -\frac{c_3}{m} \\ \frac{c_1a_1 - c_3a_2}{J} & \frac{c_1a_1^2 + c_3a_2^2}{J} & -\frac{c_1a_1}{J} & \frac{c_3a_2}{J} \\ -\frac{c_1}{m_1} & -\frac{c_1a_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 \\ -\frac{c_3}{m_2} & \frac{c_3a_2}{m_2} & 0 & \frac{c_3}{m_2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} & -\frac{c_2}{m_1}D^\alpha q_3 & -\frac{c_4}{m_2}D^\alpha q_4 \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1}, \frac{k_2u_1}{m_1} + \frac{c_2D^\alpha u_1}{m_1}, \frac{k_4u_2}{m_2} + \frac{c_4D^\alpha u_2}{m_2} \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

Hệ phương trình (21), là một hệ phương trình vi phân có các thành phần đạo hàm cấp phân số. Việc giải hệ phương trình này bằng phương pháp giải tích là hết sức khó khăn và việc sử dụng các phương pháp tính toán số quen thuộc cũng không thể áp dụng được mà cần phải được cải tiến cho phù hợp.

4. Phương pháp số và kết quả mô phỏng

4.1. Phương pháp số giải hệ phương trình vi phân có thành phần đạo hàm cấp không nguyên

Có nhiều thuật toán số có thể sử dụng để giải các hệ phương trình vi phân, trong phần này, nghiên cứu cải tiến phương pháp Runge-Kutta bậc 4 tính toán gần đúng nghiệm của các phương trình vi phân có các thành phần đạo hàm cấp phân số. Xét hệ phương trình vi phân có dạng như phương trình (21), theo tài liệu [12], để tìm nghiệm của hệ trong khoảng $t = [0, T]$, ta chia lưới khoảng trên thành n phần với các điểm chia như sau:

$$t_0 = 0, t_1, \dots, t_i, t_{i+1} = t_i + h, \dots, t_n = T \quad (27)$$

Khi đó, nghiệm gần đúng tại thời điểm t_{i+1} , được tính theo công thức sau:

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (28)$$

Trong đó:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(t_i), \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}(t_{i+1}) = \mathbf{q}(t_i + h) \quad (29)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left(t_i, \mathbf{u}(t_i), \mathbf{q}_i, D^\alpha q_3(t_i), D^\alpha q_4(t_i), D^\alpha u_1(t_i), D^\alpha u_2(t_i) \right) \quad (30)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f} \left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{u}(t_i + \frac{h}{2}), \mathbf{q}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, D^\alpha q_3(t_i + \frac{h}{2}), D^\alpha q_4(t_i + \frac{h}{2}), D^\alpha u_1(t_i + \frac{h}{2}), D^\alpha u_2(t_i + \frac{h}{2}) \right) \quad (31)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f} \left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{u}(t_i + \frac{h}{2}), \mathbf{q}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, D^\alpha q_3(t_i + \frac{h}{2}), D^\alpha q_4(t_i + \frac{h}{2}), D^\alpha u_1(t_i + \frac{h}{2}), D^\alpha u_2(t_i + \frac{h}{2}) \right) \quad (32)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f} \left(t_i + h, \mathbf{u}(t_i + h), \mathbf{q}_i + h\mathbf{k}_3, D^\alpha q_3(t_i + h), D^\alpha q_4(t_i + h), D^\alpha u_1(t_i + h), D^\alpha u_2(t_i + h) \right) \quad (33)$$

Trong các công thức (30), (31), (32) và (33), các thành phần đạo hàm cấp α (với $0 < \alpha < 1$) của q_3, q_4, u_1 và u_2 tại các thời điểm t_i và $t_i + h/2$ cần phải được tính theo công thức (7).

Dựa trên thuật toán cải tiến này, nhóm tác giả đã xây dựng được chương trình tính toán số, tìm nghiệm của các hệ phương trình vi phân có chứa các thành phần đạo hàm cấp phân số.

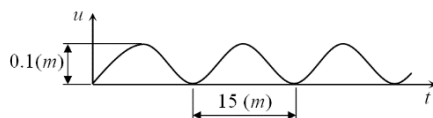
4.2. Kết quả mô phỏng số

Để tính toán số, các tham số của hệ thống được cho như trong Bảng 1.

Bảng 1. Giá trị các tham số của hệ dao động

Tham số	Giá trị	Đơn vị
m	1395	kg
J	642	kgm ²
m_1	80	kg
m_2	80	kg
c_1	1730	Ns/m
c_3	1730	Ns/m
c_2	10	Ns/m
c_4	10	Ns/m
k_1	43436	N/m
k_3	54294	N/m
k_2	284000	N/m
k_4	520000	N/m
a_1	1,30556	m
a_2	1,04444	m

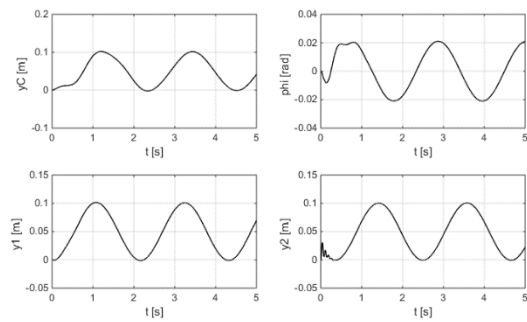
Biên dạng mặt đường là một hàm điều hòa có dạng như Hình 4.



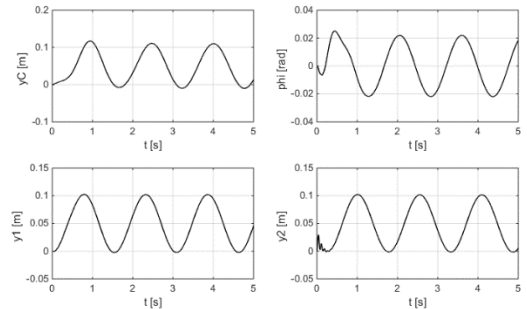
Hình 4. Biên dạng mặt đường

Với các số liệu như trên, sau khi tính toán, ta được kết quả dao động của xe trong một số tốc độ chuyển động được cho trong các Hình 5, 6, 7 và 8 trong đó, đồ thị của y_1 và y_2 theo thời gian, lần lượt mô tả dao động của trục bánh xe trước và bánh xe sau, đồ thị y_C mô tả dao động theo phương thẳng đứng của khối tâm thân xe và đồ thị φ mô tả dao động lắc của thân xe so với phương nằm ngang.

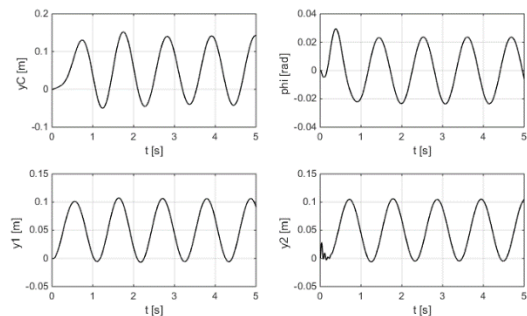
Từ các kết quả tính toán cho ta thấy, khi chuyển động với tốc độ 25km/h, khối tâm C của thân xe dao động lên xuống với biên độ 0,052m, thân xe dao động lắc với biên độ 0,021rad, khi chuyển động với tốc độ 35km/h, khối tâm C dao động với biên độ



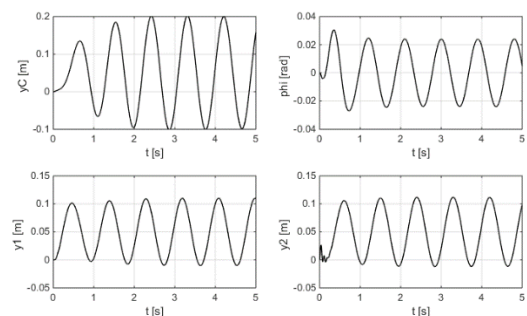
Hình 5. Dao động của xe ứng với tốc độ $v = 25\text{km/h}$



Hình 6. Dao động của xe ứng với tốc độ $v = 35\text{km/h}$



Hình 7. Dao động của xe ứng với tốc độ $v = 50\text{km/h}$



Hình 8. Dao động của xe ứng với tốc độ $v = 60\text{km/h}$

0,065m, thân xe dao động với biên độ 0,022rad, khi chuyển động với tốc độ 50km/h, khối tâm C dao động với biên độ 0,091(m), thân xe dao động với biên độ 0,023rad, khi chuyển động với tốc độ 60km/h, khối tâm C dao động với biên độ 0,15m, thân xe dao động với biên độ 0,024rad. Vậy, với tốc độ càng cao, thì biên độ và tần số dao động của thân

xe càng lớn, do đó khi di chuyển trên mặt đường có biên dạng điều hòa, ta cần giảm tốc độ để hạn chế ảnh hưởng không tốt đến người trên xe.

5. Kết luận

Trong bài báo này, nhóm tác giả đã nghiên cứu xây dựng chương trình tính toán số, tìm nghiệm của các hệ phương trình vi phân có chứa các thành phần đạo hàm cấp không nguyên, sử dụng chương trình thiết lập được, đã tính toán dao động của mô hình dao động ô tô, trong đó có kể đến các thành phần cản nhớt cấp phân số. Các kết quả thu được là các đồ thị mô tả dao động của thân xe và bánh xe trong một số tốc độ di chuyển khác nhau trên mặt đường mấp mô có dạng một hàm điều hòa.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: **DT22-23.47**.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Caputo, M., Mainardi, F. (1971), *Linear models of dissipation in anelastic solids*, Rivista del Nuovo Cimento, Vol.1, pp.161-198.
- [2] Oldham, K.B., Spanier, J. (1974), *The Fractional Calculus*, Academic, New York.
- [3] Lavoie, J. L., Osler, T. J. and Tremblay, R. (1976), *Fractional derivatives and special functions*, SIAM Rev., Vol.18, pp.240-268.
- [4] Torvik, P.J., Bagley, R.L. (1984), *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, J. Appl. Mech., Vol. 51, pp.294-298.
- [5] Gaul, L., Klein, P., Kempfle, S. (1991), *Damping description involving fractional operators*, Mech. Syst. Signal Process., Vol.5, pp.81-88.
- [6] Miller K. S. and Ross B. (1993), *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc, New York.
- [7] Chern, J.-T. (1993), *Finite element modeling of viscoelastic materials on the theory of fractional calculus*, Ph.D. thesis, Pennsylvania State University.
- [8] Shaw, S., Warby, M.K., Whiteman, J.R. (1997), *A comparison of hereditary integral and internal variable approaches to numerical linear solid elasticity*, In: Proceedings of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznan.
- [9] Diethelm, K., Freed, A.D. (1999), *The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order*, In: Heinzl, S., Plessner, T. (eds.) *Forschung und wissenschaftliches Rechnen: Beiträge zum Heinz-Billing-Preis 1998*, pp.57-71.
- [10] Podlubny, I. (1999), *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego.
- [11] Freed, A.D., Diethelm, K., Luchko, Y. (2002), *Fractional-order viscoelasticity (FOV): constitutive development using the fractional calculus (first annual report)*. Technical Memorandum 2002-211914, NASA Glenn Research Center, Cleveland.
- [12] Đinh Văn Phong (2006), *Phương pháp số trong cơ học*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [13] Caputo, M., Mainardi, F. (2007), *A new dissipation model based on memory mechanism*, Pure Appl. Geophys., 91, pp.134-147 (1971); reprinted in *Fract. Calc. Appl. Anal.*, Vol.10, pp.310-323.
- [14] Caputo, M. (2008), *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II*, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., Vol.13, pp.529-539 (1967); reprinted in *Fract. Calc. Appl. Anal.*, Vol. 11, pp.4-14.
- [15] Baleanu D., et al (eds) (2012). *Fractional Dynamics and Control*, Springer, New York.
- [16] T. Kaczorek, K. Rogowski (2014), *Fractional linear systems and electrical circuits*, Printing House of Bialystok University of Technology, Bialystok.
- [17] Nguyen Van Khang, Bui Thi Thuy, Truong Quoc Chien (2016), *Resonance oscillation of third order forced van der Pol system with fractional order derivative*, ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol.11, Issue 4, pp.0410301-0410305.
- [18] Boskovic M. C., Sekara T. M., Dakovic B., Lazarevic P. (2017), *Analysis of electrical circuits including fractional order elements*, IEEE-Proc. Of 6th Mediterranean Conference on embedded computing, Montenegro.
- [19] Nguyễn Văn Khang (2019), *Một vài ứng dụng đạo hàm cấp phân số trong cơ điện tử*, Tạp chí Kinh doanh và Công nghệ, Số 04/2019, tr.67-76.

Ngày nhận bài:	08/12/2022
Ngày nhận bản sửa lần 01:	21/12/2022
Ngày nhận bản sửa lần 02:	06/01/2023
Ngày duyệt đăng:	09/01/2023