LUẬT MẠNH SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ỨNG VỚI HÀM TIỀM NĂNG

Dương Xuân Giáp (1)**, Ngô Hà Châu Loan** (2)

1 *Viện Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Vinh*

2 *Khoa Cơ sở, Trường Đại học kinh tế Nghệ An*

Ngày nhận bài 3/4/2019, ngày nhận đăng 6/5/2019

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng khái niệm giới hạn riêng của mảng kép các số thực và chứng minh giới hạn dưới và giới hạn trên của mảng kép các số thực định nghĩa trong bài báo [3] tương ứng là giới hạn riêng bé nhất và lớn nhất. Từ đó, chúng tôi ứng dụng để thiết lập luật mạnh số lớn đối với mảng kép các biến ngẫu nhiên ứng với hàm tiềm năng. Kết quả này mở rộng kết quả của F. Maccheroni và M. Marinacci đăng trên tạp chí *The Annals of Probability* năm 2005 từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng kép.

1 Mở đầu

Ta bắt gặp trong thực tiễn những không gian đo với độ đo không có tính cộng tính (xem các tài liệu [2], [5], [8]). Từ đó, khái niệm không gian đo với hàm tiềm năng (capacity) được giới thiệu và được rất nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Một trong những hướng nghiên cứu đối với lớp không gian này là các định lý giới hạn và ứng dụng của chúng. Năm 1999, M. Marinacci [7] thiết lập luật số lớn cho hàm tiềm năng (capacity) đối với dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối và mô hình hóa cho lý thuyết quyết định kinh tế (bài báo được đăng trên tạp chí Journal of Economic Theory). Sau đó, năm 2005, F. Maccheroni và M. Marinacci [6] mở rộng kết quả trên cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một cùng phân phối và một số giả thiết khác đối với hàm tiềm năng (bài báo được đăng trên tạp chí *The Annals of Probability*). Đến năm 2014, P. Terán thiết lập luật số lớn cho hàm tiềm năng đối với dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một cùng phân phối với một số giả thiết yếu hơn [10]. Dưới các tên gọi khác nhau, hàm tiềm năng đã được nghiên cứu rộng rãi trong cả toán học thuần túy và ứng dụng.

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng khái niệm mảng con và giới hạn riêng của mảng kép các số thực và nghiên cứu các tính chất của chúng. Các khái niệm này khác với các khái niệm tương tự nêu ra trong bài báo [3], có nhiều tính chất tốt hơn và đặc biệt áp dụng được để mở rộng luật mạnh số lớn đưa ra bởi F. Maccheroni và M. Marinacci [6] từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng kép.

2 Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt bài báo này, nếu không nói gì thêm, chúng tôi luôn giả thiết rằng Ω là một không gian Polish ứng với metric d (không gian metric đầy đủ, khả ly) và $\mathcal{B}$ là σ-đại số

1) Email:dxgiap@gmail.com (D. X. Giáp)

Borel của nó. Ký hiệu $\mathbb{R}$ (tương ứng, $\mathbb{N}$) là tập tất cả các số thực (tương ứng, tập tất cả các số tự nhiên) và ký hiệu $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ là họ tất cả các tập con compact khác rỗng của $\mathbb{R}$. Trong phạm vi bài báo này, chúng tôi xem xét sự hội tụ của mảng kép ứng với max các chỉ số tiến tới vô cùng.

Ánh xạ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gọi là một *biến ngẫu nhiên* nếu nó là một hàm đo được (Borel).

Một hàm tập $\nu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ gọi là một *hàm tiềm năng hoàn toàn đơn điệu* (*totally monotone capacity*) nếu thỏa mãn 5 điều kiện sau:

(1) $\nu(\emptyset) = 0$ và $\nu(\Omega) = 1$;

(2) $\nu(A) \leq \nu(B)$ với mọi tập Borel $A \subset B$;

(3) $\nu(B_n) \downarrow \nu(B)$ với mọi dãy các tập Borel $B_n \downarrow B$;

(4) $\nu(G_n) \uparrow \nu(G)$ với mọi dãy các tập mở $G_n \uparrow G$;

(5) $\nu(\cup_{j=1}^n B_j) \geq \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,...,n\}} (-1)^{|J|+1} \nu(\cap_{j \in J} B_j)$ với mọi họ $B_1, ..., B_n$ các tập Borel.

Một hàm tập $\nu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ được gọi là *liên tục* nếu thỏa mãn điều kiện:

(6) $\nu(B_n) \uparrow \nu(\Omega)$ với mọi dãy các tập Borel $B_n \uparrow \Omega$.

Một hàm tập liên tục $\nu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ là hàm tiềm năng hoàn toàn đơn điệu khi và chỉ khi nó thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (5).

Giả sử ν là một hàm tiềm năng hoàn toàn đơn điệu trên $\mathcal{B}$. Như trong trường hợp xác suất cộng tính (không gian xác suất thông thường), ta nói mảng kép các biến ngẫu nhiên $\{X_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ là *độc lập đôi một* (ứng với ν) nếu với mọi $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ và mọi tập con mở G_1, G_2 của $\mathbb{R}$, ta có

$$\nu(X_{m_1 n_1} \in G_1, X_{m_2 n_2} \in G_2) = \nu(X_{m_1 n_1} \in G_1).\nu(X_{m_2 n_2} \in G_2),$$

và ta nói mảng đó là *cùng phân phối* nếu với mọi $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ và mọi tập con mở G của $\mathbb{R}$, ta có

$$\nu(X_{m_1 n_1} \in G) = \nu(X_{m_2 n_2} \in G).$$

Tích phân Choquet của một biến ngẫu nhiên bị chặn X (ứng với một hàm tiềm năng hoàn toàn đơn điệu ν) được định nghĩa bởi

$$\int X d\nu := \int_0^{+\infty} \nu(X > t)dt + \int_{-\infty}^0 [\nu(X > t) - 1]dt,$$

trong đó các tích phân ở vế phải đều là tích phân Riemann và chúng hoàn toàn được xác định do hàm $\nu(X > t)$ đơn điệu theo biến t.

Ký hiệu $\mathcal{K}_\Omega$ (tương ứng, $\mathcal{G}_\Omega$) là họ tất cả các tập con compact khác rỗng (tương ứng, tập con mở) của Ω. Khi đó, $\mathcal{K}_\Omega$ cũng là một không gian Polish ứng với khoảng cách Hausdorff

$$d_H(A, B) := \max\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(b, a)\}.$$

σ-đại số Borel trên không gian metric $(\mathcal{K}_\Omega, d_H)$ còn được sinh bởi lớp $\{K \in \mathcal{K}_\Omega : K \subseteq G\}_{G \in \mathcal{G}_\Omega}$.

Giả sử $(I, \mathcal{C}, \lambda)$ là một không gian xác suất đầy đủ và không có nguyên tử và giả sử $F : I \to \mathcal{K}_\Omega$ là một ánh xạ đa trị. Với mỗi $A \subset \Omega$, ký hiệu $F_{-1}(A) := \{s \in I : F(s) \subset A\}$. Khi đó F là biến ngẫu nhiên đa trị (ánh xạ đa trị đo được) khi và chỉ khi $F_{-1}(G) \in \mathcal{C}$ với mọi $G \in \mathcal{G}_\Omega$. *Phân phối dưới* $\nu_F : \mathcal{B} \to [0,1]$ được xác định bởi $\nu_F(B) = \lambda(F_{-1}(B))$ với mọi $B \in \mathcal{B}$.

Ký hiệu $m \vee n$ là giá trị lớn nhất (tương ứng, giá trị nhỏ nhất) của hai số nguyên m và n.

3 Kết quả chính

Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu một số định nghĩa và bổ đề cần thiết.

Hai định nghĩa sau đây là trích phát biểu dạng hai chỉ số ứng với trường hợp max các chỉ số tiến tới vô cùng của [3; Đinh nghĩa 3.1] và [3; Định nghĩa 3.2(a)]. *Giới hạn dưới* $\liminf\limits_{m\vee n\to\infty} x_{mn}$ và *giới hạn trên* $\limsup\limits_{m\vee n\to\infty} x_{mn}$ của mảng kép các số thực $\{x_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ khi max các chỉ số tiến tới vô cùng, được định nghĩa bởi

$$\liminf_{m\vee n\to\infty} x_{mn} := \sup_{k\geq 1} \inf_{m\vee n\geq k} x_{mn},$$

$$\limsup_{m\vee n\to\infty} x_{mn} := \inf_{k\geq 1} \sup_{m\vee n\geq k} x_{mn}.$$

Ta nói mảng kép $\{x_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ *hội tụ tới* $x \in \mathbb{R}$ (hay, x là *giới hạn* của mảng kép $\{x_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$) khi $m \vee n \to \infty$, ký hiệu $\lim\limits_{m\vee n\to\infty} x_{mn} = x$ hoặc $x_{mn} \to x$ khi $m \vee n \to \infty$, nếu

$$\liminf_{m\vee n\to\infty} x_{mn} = \limsup_{m\vee n\to\infty} x_{mn} = x.$$

Tiếp theo, chúng tôi phát biểu định nghĩa mảng con, từ đó chúng tôi xây dựng khái niệm giới hạn riêng của mảng kép các số thực. Một tập con vô hạn phần tử của một mảng kép các số thực được gọi là một *mảng con* của mảng kép các số thực đó.

Giới hạn (nếu có) của mảng con của mảng kép các số thực được gọi là một *giới hạn riêng* của mảng kép các số thực đó.

Bổ đề sau đây là một kết quả quan trọng để chứng minh kết quả chính. Đối với định nghĩa giới hạn riêng nêu trong [3; Định nghĩa 3.3], ta không thu được kết luận tốt như bổ đề dưới đây. Đối với mảng kép các số thực ứng với sự hội tụ khi max các chỉ số tiến tới vô cùng, giới hạn dưới và giới hạn trên tương ứng là giới hạn riêng bé nhất và lớn nhất của mảng kép các số thực đó.

Chứng minh. Xét mảng kép các số thực $\{x_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$.

Đầu tiên là chứng minh "giới hạn dưới $\leq$ giới hạn riêng $\leq$ giới hạn trên". Ta sẽ chứng minh "giới hạn dưới $\leq$ giới hạn riêng", ý còn lại chứng minh tương tự. Đặt $\liminf\limits_{m\vee n\to\infty} x_{mn} = \sup\limits_{k\geq 1} \inf\limits_{m\vee n\geq k} x_{mn} := a$ và đặt $\inf\limits_{m\vee n\geq k} x_{mn} := a_k$. Khi đó $a_k \uparrow a$ khi $k \to \infty$. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử b là một giới hạn riêng và $b < a$. Với $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$, do $a_k \uparrow a$ khi $k \to \infty$ nên tồn tại k_0 sao cho $|a_k - a| < \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$. Khi đó,

$$a_k - b = (a_k - a) + (a - b) = 2\varepsilon + (a_k - a) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

với mọi $k \geq k_0$, hay là $a_k > b + \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$. Từ đó ta suy ra $x_{mn} > b + \varepsilon$ với mọi $m \vee n \geq k_0$. Điều này mâu thuẫn với b là giới hạn riêng. Như vậy ta thu được kết luận "giới hạn dưới $\leq$ giới hạn riêng".

Tiếp theo là chứng minh $\liminf\limits_{m \vee n \to \infty} x_{mn}$ và $\limsup\limits_{m \vee n \to \infty} x_{mn}$ cũng là giới hạn riêng của mảng $\{x_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$. Không mất tính tổng quát, ta trình bày chứng minh cho $\liminf\limits_{m \vee n \to \infty} x_{mn}$ là giới hạn riêng, trường hợp $\limsup\limits_{m \vee n \to \infty} x_{mn}$ là giới hạn riêng ta chứng minh tương tự.

Từ $a_k \uparrow a$ khi $k \to \infty$ ta suy ra:

Với $s = 1$, tồn tại k_1 sao cho $|a_{k_1} - a| < \dfrac{1}{2 \times 1}$. Do $a_{k_1} = \inf\limits_{m \vee n \geq k_1} x_{mn}$ nên tồn tại m_1, n_1 sao cho $m_1 \vee n_1 \geq k_1$ và thỏa mãn

$$|x_{m_1 n_1} - a_{k_1}| < \frac{1}{2 \times 1}.$$

Từ đó ta có

$$|x_{m_1 n_1} - a| \leq |x_{m_1 n_1} - a_{k_1}| + |a_{k_1} - a| < \frac{1}{1}.$$

Tiếp theo, với $s = 2$, tồn tại $k_2 > m_1 \vee n_1$ sao cho $|a_{k_2} - a| < \dfrac{1}{2 \times 2}$. Do $a_{k_2} = \inf\limits_{m \vee n \geq k_2} x_{mn}$ nên tồn tại m_2, n_2 sao cho $m_2 \vee n_2 \geq k_2$ và thỏa mãn

$$|x_{m_2 n_2} - a_{k_2}| < \frac{1}{2 \times 2}.$$

Từ đó ta có

$$|x_{m_2 n_2} - a| \leq |x_{m_2 n_2} - a_{k_2}| + |a_{k_2} - a| < \frac{1}{2}.$$

Tiếp tục quá trình trên, với $s \geq 3$ bất kỳ, tồn tại $k_s > m_{s-1} \vee n_{s-1}$ sao cho $|a_{k_s} - a| < \dfrac{1}{2 \times s}$. Do $a_{k_s} = \inf\limits_{m \vee n \geq k_s} x_{mn}$ nên tồn tại m_s, n_s sao cho $m_s \vee n_s \geq k_s$ và thỏa mãn

$$|x_{m_s n_s} - a_{k_s}| < \frac{1}{2 \times s}.$$

Từ đó ta có

$$|x_{m_s n_s} - a| \leq |x_{m_s n_s} - a_{k_s}| + |a_{k_s} - a| < \frac{1}{s}.$$

Với cách thiết lập ở trên, ta có $m_s \vee n_s \geq k_s > m_{s-1} \vee n_{s-1}$ với mọi $s \geq 1$. Do đó, $\{x_{m_s n_s} : s \geq 1\}$ là tập con vô hạn phần tử của mảng kép $\{x_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ nên nó là một mảng con. Đồng thời, a chính là giới hạn của mảng con này nên a là một giới hạn riêng.

Từ đó, ta thu được điều phải chứng minh. □

Bổ đề tiếp theo là mở rộng [6; Claim 1] từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng kép. Để thiết lập được kết quả này, chúng tôi cần Bổ đề 3. Giả sử $\{K_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng kép các tập con compact của $\mathbb{R}$ thỏa mãn $K_{mn} \to [\alpha, \beta]$ theo khoảng cách Haussdorff khi $m \vee n \to \infty$. Khi đó,

$$\alpha \leq \liminf_{m \vee n \to \infty} k_{mn} \leq \limsup_{m \vee n \to \infty} k_{mn} \leq \beta$$

với mọi mảng kép các số thực $\{k_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ sao cho $k_{mn} \in K_{mn}$ với mọi $m \geq 1, n \geq 1$.

Chứng minh. Theo định nghĩa hội tụ theo khoảng cách Hausdorff, $K_{mn} \to [\alpha, \beta]$ khi $m \vee n \to \infty$ nếu và chỉ nếu

$$\max\left\{\max_{t_{mn} \in K_{mn}} \min_{r \in [\alpha,\beta]} |t_{mn} - r|, \max_{r \in [\alpha,\beta]} \min_{t_{mn} \in K_{mn}} |r - t_{mn}|\right\} \to 0 \text{ khi } m \vee n \to \infty.$$

Đặc biệt,

$$\max_{t_{mn} \in K_{mn}} \min_{r \in [\alpha,\beta]} |t_{mn} - r| \to 0 \text{ khi } m \vee n \to \infty. \tag{1}$$

Giả sử $\{k_{m_s n_l} : s \geq 1, l \geq 1\}$ là một mảng con của mảng kép $\{k_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\}$ (hoặc mảng con có dạng $\{k_{m_s n} : s \geq 1, n \in J\}$, hoặc có dạng $\{k_{mn_l} : l \geq 1, m \in J\}$ với $J \subset \mathbb{N}$ có hữu hạn phần tử) sao cho $k_{m_s n_l} \to a \in [-\infty, +\infty]$ khi $s \vee l \to \infty$ (hoặc $k_{m_s n} \to a$ khi $s \to \infty$, hoặc $k_{mn_l} \to a$ khi $l \to \infty$ với mỗi $m, n \in J$). Nếu $a \notin [\alpha, \beta]$ thì tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $|k_{m_s n_l} - r| > \varepsilon$ với mọi $r \in [\alpha, \beta]$ với $s \vee l$ đủ lớn, điều này dẫn tới

$$\min_{r \in [\alpha,\beta]} |k_{m_s n_l} - r| > \varepsilon \text{ với } s \vee l \text{ đủ lớn.}$$

Điều này mâu thuẫn với (1). Vì vậy, nếu a là một giới hạn riêng thì $a \in [\alpha, \beta]$. Theo Bổ đề 3, $\liminf_{m \vee n \to \infty} k_{mn}$ và $\limsup_{m \vee n \to \infty} k_{mn}$ cũng là giới hạn riêng nên ta có điều phải chứng minh. □

Sau đây là luật mạnh số lớn đối với mảng kép các biến ngẫu nhiên ứng với hàm tiềm năng. Kết quả này mở rộng [6; Định lý 1] từ trường hợp dãy sang trường hợp mảng kép. Giả sử ν là một hàm tiềm năng hoàn toàn đơn điệu trên $\mathcal{B}$ và $\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là một mảng kép các biến ngẫu nhiên bị chặn, độc lập đôi một, cùng phân phối. Khi đó, nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn

(i) ν liên tục,

(ii) các biến ngẫu nhiên X_{ij} hoặc liên tục hoặc là hàm đơn giản,

thì ta thu được

$$\begin{aligned}\nu\Bigg(\Bigg\{\omega \in \Omega : \int X_{11} d\nu \ &\leq \liminf_{m \vee n \to \infty} \frac{1}{mn} \sum_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} X_{ij}(\omega) \\ &\leq \limsup_{m \vee n \to \infty} \frac{1}{mn} \sum_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} X_{ij}(\omega) \leq -\int -X_{11} d\nu\Bigg\}\Bigg) = 1.\end{aligned}$$

Chứng minh. Phần chứng minh định lý trên, chúng ta tiến hành tương tự như trong chứng minh của F. Maccheroni và M. Marinacci (2005), kết hợp với các bổ đề được thiết lập ở trên và sử dụng luật số lớn đa trị mà chúng tôi đã thu được trong [9].

Sau đây ta chứng minh kết luận của định lý khi giả thiết (ii) được thỏa mãn. Trường hợp giả thiết (i) ta lập luận như trong chứng minh của F. Maccheroni và M. Marinacci [6]. Theo [6; Bổ đề 3], tồn tại một ánh xạ đa trị đo được $F : I \to \mathcal{K}_\Omega$ sao cho $\nu = \nu_F$, trong đó $(I, \mathcal{C}, \lambda)$ là một không gian xác suất đầy đủ. Theo như lập luận trong chứng minh của [6], $\{X_{ij} \circ F : i \geq 1, j \geq 1\}$ là mảng kép các biến ngẫu nhiên đa trị độc lập đôi một, cùng phân phối, trong đó $X_{ij} \circ F : I \to \mathcal{K}_\mathbb{R}$. Đồng thời, theo [6; Bổ đề 4], ta suy ra $\int X_{ij} \circ F d\lambda \in \mathcal{K}_\mathbb{R}$. Áp dụng [9; Định lý 3.7] cho trường hợp mảng kép các biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập con compact của không gian $\mathbb{R}$, ta thu được

$$\lambda\left(\left\{s \in I : \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}(F(s)) \to \int X_{11} \circ F d\lambda\right\}\right) = 1.$$

Theo [6; Bổ đề 4], ta có

$$\int X_{11} \circ F d\lambda = \left[\int X_{11} d\nu, -\int -X_{11} d\nu\right].$$

Đặt $a_{mn}(\omega) = \dfrac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}(\omega)$ và đặt

$$S_1 = \left\{s \in I : \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}(F(s)) \to \left[\int X_{11} d\nu, -\int -X_{11} d\nu\right]\right\},$$
$$S_2 = \left\{s \in I : \int X_{11} d\nu \leq \liminf_{m \vee n \to \infty} a_{mn}(\omega) \leq \limsup_{m \vee n \to \infty} a_{mn}(\omega) \leq -\int -X_{11} d\nu, \forall \omega \in F(s)\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{\omega \in \Omega : \int X_{11} d\nu \leq \liminf_{m \vee n \to \infty} a_{mn}(\omega) \leq \limsup_{m \vee n \to \infty} a_{mn}(\omega) \leq -\int -X_{11} d\nu\right\}.$$

Nếu $s \in S_1$ thì $\dfrac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}(F(s)) \to \left[\int X_{11} d\nu, -\int -X_{11} d\nu\right]$. Vì vậy, với mọi $\omega \in F(s)$, $a_{mn}(\omega) \in \dfrac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}(F(s))$. Áp dụng Bổ đề 3 ta có

$$\int X_{11} d\nu \leq \liminf_{m \vee n \to \infty} a_{mn}(\omega) \leq \limsup_{m \vee n \to \infty} a_{mn}(\omega) \leq -\int -X_{11} d\nu.$$

Từ đó, $S_1 \subset S_2$. Điều này suy ra

$$\nu(\Omega_2) = \lambda(\{s \in I : F(s) \subset \Omega_2\}) = \lambda(S_2) \geq \lambda(S_1) = 1.$$

Vì vậy, ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

4 Kết luận

Bài báo này đã thiết lập được luật mạnh số lớn cho mảng kép các biến ngẫu nhiên ứng với hàm tiềm năng. Kết quả này là một mở rộng dạng hai chỉ số kết quả của F. Maccheroni và M. Marinacci (năm 2005) đăng trên tạp chí *The Annals of Probability*. Để chứng minh được luật mạnh số lớn, chúng tôi đã xây dựng khái niệm giới hạn dưới, giới hạn trên, giới hạn riêng của mảng kép các số thực và thiết lập một số tính chất cần thiết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G. Choquet, *Theory of capacities*, Annales de l'institut Fourier (Grenoble), 5, 1954, 131-292.
[2] A. Dempster, *Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping*, The Annals of Mathematical Statistics, 38, 1967, 325-339.
[3] Dương Xuân Giáp, Ngô Hà Châu Loan, Bùi Đình Thắng và Tôn Nữ Minh Ngọc, *Giới hạn dưới, giới hạn trên của mảng các biến ngẫu nhiên và ứng dụng*, Tạp chí khoa học Đại học Sài Gòn, 22, 2016, 73-88.
[4] N. Etemadi, *An elementary proof of the strong law of large numbers*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorieverw.Gebiete, 55, 1981, 119-122.
[5] P. J. Huber and V. Strassen, *Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities*, The Annals of Statistics, 1, 1973, 251-263.
[6] F. Maccheroni and M. Marinacci, *A strong law of large numbers for capacities*, The Annals of Probability, 33, 2005, 1171-1178.
[7] M. Marinacci, *Limit laws for non-additive probabilities and their frequentist interpretation*, Journal of Economic Theory, 84, 1999, 145-195.
[8] H. T. Nguyen, *On random sets and belief functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 65, 1978, 531-542.
[9] C. Castaing, N. V. Quang and D. X. Giap, *Mosco convergence of strong law of large numbers for double arrays of closed valued random variables in Banach space*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 13, 2012, 615-636.
[10] P. Terán, *Laws of large numbers without additivity*, Transactions of the American Mathematical Society, 366, 2014, 5431-5451.

SUMMARY

STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR DOUBLE ARRAYS OF RANDOM VARIABLES WITH RESPECT TO CAPACITIES

In this paper, we introduce the concept of partially limit of double arrays of real numbers and prove that the lower limit and upper limit defined in [3], are minimum and maximum of partially limits, respectively. Therefore, we apply to establish strong law of large numbers for double arrays of random variables with respect to capacities. This result extends [6, Theorem 1] to the case of double arrays of random variables.