

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM CHỮ NHẬT BẰNG VẬT LIỆU FGM XÓP ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI WINKLER BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Phan Xuân Thục, Nguyễn Thị Quỳnh

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Vinh

Ngày nhận bài 16/6/2021, ngày nhận đăng 8/9/2021

Tóm tắt: Bài báo trình bày phương pháp sử dụng lý thuyết tấm cổ điển để tính toán tần số dao động riêng của tấm chữ nhật bằng vật liệu FGM xốp, liên kết khớp các cạnh đặt trên nền đàn hồi Winkler. Ba dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau: phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng sẽ được khảo sát. Độ tin cậy của lời giải giải tích cũng như chương trình tính được viết trên nền Matlab sẽ được kiểm chứng với một số kết quả đã công bố và với kết quả tính bằng phần mềm tính toán kết cấu SAP2000. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học của tấm, cũng như hệ số nền đến tần số dao động riêng của tấm sẽ được đánh giá.

Từ khóa: Phân tích dao động riêng; vật liệu FGM rỗng; nền đàn hồi Winkler; lý thuyết tấm cổ điển.

1. Mở đầu

Vật liệu FGM (Functionally Graded Material) được biết đến như là một loại vật liệu composite thể hệ mới có các tính chất cơ học biến đổi trơn và liên tục theo một phương bất kỳ trong kết cấu. Chính vì vậy sử dụng các kết cấu bằng vật liệu FGM sẽ tránh được sự bong tách, sự tập trung ứng suất tại bề mặt tiếp xúc giữa các pha vật liệu, điều thường xảy ra đối với vật liệu composite truyền thống. Một trong những phát triển gần đây nhất của loại vật liệu này là vật liệu FGM xốp (functionally graded porous material - FGPM) có các lỗ rỗng phân bố theo một quy luật nhất định trong cấu trúc vật liệu. Được xếp vào loại vật liệu nhẹ với khả năng hấp thụ năng lượng tốt, vật liệu FGPM được sử dụng để chế tạo các cấu kiện cách âm, cách nhiệt, chịu tải trọng va chạm trong kết cấu công trình như bản sàn, tường, mái...

Với nhiều ứng dụng quan trọng góp phần phát triển lĩnh vực khoa học vật liệu trong lĩnh vực kỹ thuật, cần có những hiểu biết đầy đủ về ứng xử cơ học của vật liệu và kết cấu FGPM. Với kết cấu dầm và tấm sử dụng vật liệu FGPM, một loạt các công bố về lĩnh vực này cho thấy sự quan tâm đáng kể của các nhà khoa học trong và ngoài nước.

Magnucki và cộng sự [1] đã phân tích ứng xử uốn và ổn định của tấm FGPM. Chen và cộng sự [2] sử dụng phương pháp Ritz để nghiên cứu ứng xử uốn và ổn định đàn hồi của dầm Timoshenko bằng vật liệu FGPM. Nghiên cứu tiếp theo của các tác giả này về dao động riêng và dao động cưỡng bức của dầm FGPM được công bố trong [3]. Wu và cộng sự [4] khảo sát ứng xử động lực học của dầm FGPM bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, Wattanasakulpong và cộng sự [5] đã phân tích dao động riêng dầm PFGM theo tiếp cận Chebyshev. Jabbari và cộng sự [6] đã khảo sát ổn định của tấm FGPM tròn bão hòa nước trong môi trường nhiệt sử dụng lý thuyết tấm mỏng. Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, Ebrahimi và Sajjad [7] phân tích tĩnh và dao động riêng của tấm FGPM bão hòa nước bằng phương pháp PTHH.

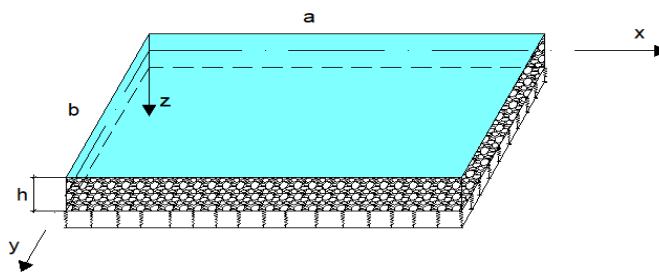
Chen và cộng sự [8] đã phân tích ứng xử uốn và ổn định của tấm FGPM sử dụng phương pháp Chebyshev-Ritz và lý thuyết tấm bậc nhất. Bằng phương pháp chuỗi Fourier cải tiến (improved Fourier series method), Zhao và cộng sự [9] đã nghiên cứu dao động riêng của tấm FGPM với các điều kiện biên khác nhau trên cơ sở lý thuyết tấm bậc nhất. Gao và cộng sự [10] đã phân tích ổn định động phi tuyến dầm PFGM với các điều kiện biên khác nhau sử dụng phương pháp Galerkin và Ruge-Kuta bậc bốn. Arefi và Meskini [11] phân tích dao động riêng của tấm sandwich với lớp lõi bằng vật liệu FGPM và lớp bề mặt bằng vật liệu áp điện theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.

Trong thực tế kỹ thuật, các kết cấu dầm và tấm làm việc trên nền đàn hồi là khá phổ biến như các loại móng, sàn tầng hầm... Vì thế phân tích ảnh hưởng của nền đến ứng xử của kết cấu đóng vai trò quan trọng. Mehmet và Waleed [12] phân tích dao động riêng của dầm FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. Hassen và cộng sự [13] đã khảo sát ảnh hưởng của biến dạng uốn và biến dạng cắt ngang đến ứng xử cơ học của dầm đặt trên nền đàn hồi hai hệ số. Fahsi và cộng sự [14] đã đánh giá ảnh hưởng của lỗ rỗng đến ứng xử uốn, dao động và ổn định của dầm FGPM đặt trên nền đàn hồi theo lý thuyết tựa 3D. Tran và cộng sự [15] sử dụng phương pháp PTHH trơn (edge-based smoothed finite element method) phân tích dao động riêng của tấm FGPM đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Zenkour và Radwan [16] phân tích ứng xử uốn của tấm FGM có vi bọt rỗng trong môi trường nhiệt, đặt trên nền đàn hồi. Kaddari và cộng sự [17] nghiên cứu ứng xử uốn và dao động riêng của tấm FGPM đặt trên nền đàn hồi theo lý thuyết tựa đàn hồi 3D.

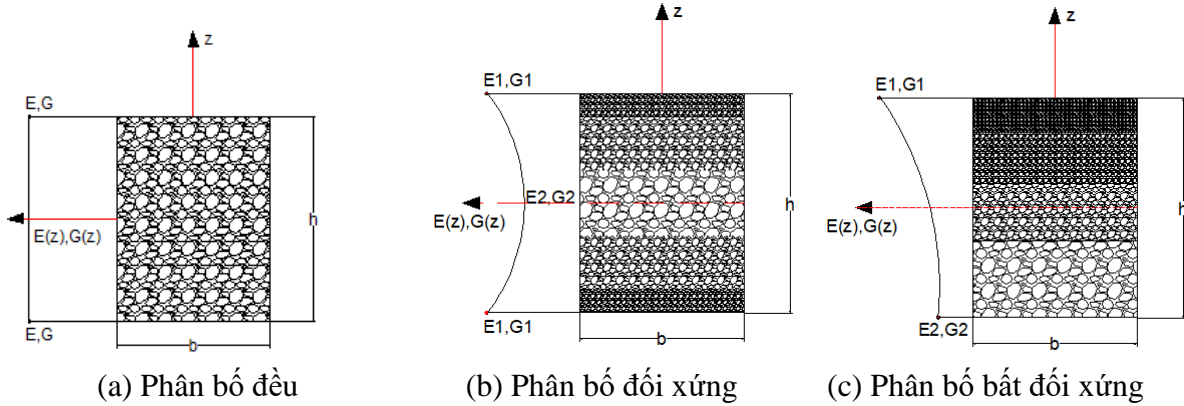
Từ các phân tích tổng quan các nghiên cứu về ứng xử cơ học của kết cấu sử dụng vật liệu FGM xốp, có thể thấy rằng vẫn còn những vấn đề còn bỏ ngỏ. Mục tiêu bài báo là thiết lập lời giải giải tích tính toán tần số dao động riêng của tấm chữ nhật FGPM bốn biên tựa khớp đặt trên nền đàn hồi Winkler. Trên cơ sở chương trình tính được viết trên nền Matlab, ảnh hưởng của các tham số vật liệu (dạng phân bố và hệ số lỗ rỗng), tham số nền và kích thước tấm đến tần số dao động riêng sẽ được khảo sát.

2. Mô hình tấm bằng vật liệu FGM xốp

Xét tấm bằng vật liệu FGM rỗng có chiều dài a , chiều rộng b và chiều dày h . Vật liệu rỗng được đặc trưng bởi quy luật phân bố lỗ rỗng trong không gian vật liệu, là hàm của tọa độ chiều dày kết cấu và thường được mô tả theo ba dạng: phân bố đều (dạng 1), phân bố không đều đối xứng (dạng 2) và phân bố không đều bất đối xứng (dạng 3). Các đặc trưng cơ học của vật liệu như mô đun đàn hồi E và G , hệ số Poisson, khối lượng riêng cũng là hàm của tọa độ chiều dày kết cấu và được mô tả theo các công thức (1), (2), và (3) [3].



Hình 1: Minh họa tấm FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Winkler



Hình 2: Minh hoạ sự phân bố vật liệu rỗng với các dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau

Dạng 1: Phân bố đều

$$\left\{ \begin{aligned} \{E, G\} &= \{E_1, G_1\} (1 - e_o \chi); \quad \rho(z) = \rho_1 \sqrt{1 - e_o \chi}; \quad \chi = \frac{1}{e_o} = \frac{1}{e_o} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_o} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2; \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Dạng 2: Phân bố không đều đối xứng

$$\left\{ \begin{aligned} \{E(z), G(z)\} &= \{E_1, G_1\} \left[1 - e_o \cos \left(\pi \frac{z}{h} \right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos \left(\pi \frac{z}{h} \right) \right]; \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Dạng 3: Phân bố không đều bất đối xứng

$$\left\{ \begin{aligned} \{E(z), G(z)\} &= \{E_1, G_1\} \left[1 - e_o \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right]; \end{aligned} \right. \quad (3)$$

trong đó E_1, G_1, ρ_1 lần lượt là các giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng; E_2, G_2, ρ_2 là các giá trị nhỏ nhất tương ứng. Các hệ số rỗng e_o cho mô đun đàn hồi và hệ số rỗng e_m cho khối lượng riêng tính theo công thức

$$e_o = 1 - \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{G_2}{G_1}; \quad e_m = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \sqrt{1 - e_o} \quad (4)$$

3. Cơ sở lý thuyết

3.1. Lý thuyết tấm cổ điển

Trường chuyển vị theo thuyết tấm cổ điển được giả thiết dưới dạng [18]

$$u(x, y, z, t) = u_o(x, y, t) - z \frac{\partial w_o}{\partial x}; \quad v(x, y, z, t) = v_o(x, y, t) - z \frac{\partial w_o}{\partial y}; \quad (5)$$

$$w(x, y, z, t) = w_o(x, y, t)$$

trong đó: $u_o(x, y, z, t)$; $v_o(x, y, z, t)$; $w_o(x, y, z, t)$ là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình.

Các thành phần biến dạng được suy ra từ quan hệ chuyển vị - biến dạng

$$\{\varepsilon_x; \varepsilon_y; \gamma_{xy}\} = \{\varepsilon_{x_0}; \varepsilon_{y_0}; \gamma_{xy_0}\} + z \{k_x; k_y; k_{xy}\} \quad (6)$$

trong đó

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_{y_0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \quad \gamma_{xy_0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \quad k_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \quad k_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; \quad k_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Các thành phần ứng suất được xác định theo định luật Hooke

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

trong đó: $Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; \quad Q_{12} = \frac{E(z)\nu}{1-\nu^2}; \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$

Các thành phần nội lực được xác định từ các biểu thức định nghĩa như sau:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

trong đó

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz; \quad B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z dz; \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz \quad (9)$$

3.2. Hệ phương trình chuyển động theo các thành phần chuyển vị

Áp dụng nguyên lý Hamilton, hệ phương trình cho bài toán dao động của tấm trên nền đàn hồi Winkler biểu diễn dưới dạng [18]

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - kw_0 = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

Với K là hệ số nền đàn hồi Winkler, các mô men quán tính

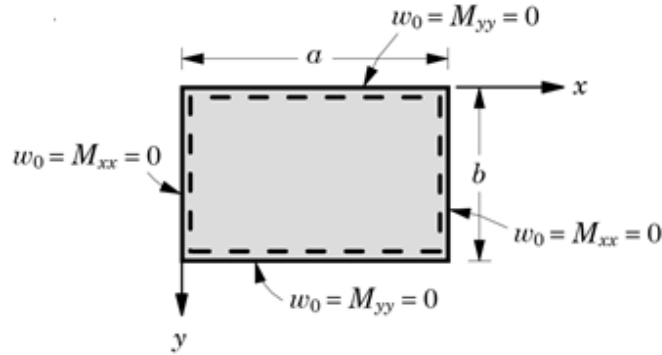
$$\{I_0, I_1, I_2\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, z^2\} \rho(z) dz$$

Thay (6) vào (8) sau đó thay vào (10) ta nhận được hệ phương trình chuyển động theo các thành phần chuyển vị

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x} \\
 & A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y} \\
 & B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) + 2 \left(B_{66} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 & - D_{11} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - k w_0 = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{11}$$

3.3 Lòai giải Navier

Xét tấm chữ nhật với chiều dài a , chiều rộng b và chiều dày h , tựa khớp theo chu vi như hình 3. Điều kiện biên được thể hiện dưới dạng



Hình 3: Minh hoạ tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu vi

$$w_0(0, y) = 0; \quad w_0(a, y) = 0; \quad w_0(x, 0) = 0; \quad w_0(x, b) = 0$$

$$M_{xx}(0, y) = 0; \quad M_{xx}(a, y) = 0; \quad M_{yy}(x, 0) = 0; \quad M_{yy}(x, b) = 0$$

Theo Navier, nghiệm chuyển vị của phương trình (11) được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau:

$$u_0(x, y, t) = u_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y; \quad v_0(x, y, t) = v_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y$$

$$w_0(x, y, t) = w_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \tag{12}$$

Trong đó : $\alpha = \frac{m\pi}{a}$; $\beta = \frac{n\pi}{b}$; m, n là số nửa bước hình sin theo phương x, y; ω_{mn} là tần số dao động riêng tương ứng với dạng dao động (m, n). Thay các thành phần chuyển vị trong (12), vào hệ phương trình cân bằng động (11) ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

trong đó

$$S_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2; S_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta; S_{13} = -B_{11}\alpha^3 - B_{12}\alpha\beta^2 - 2B_{66}\alpha\beta^2; S_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{11}\beta^2;$$

$$S_{23} = B_{22}\beta^3 - B_{12}\alpha^2\beta - 2B_{66}\alpha^2\beta; S_{33} = k + D_{11}\alpha^4 + D_{12}\beta^4 + 2D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2$$

$$m_{11} = m_{22} = I_0; m_{12} = m_{21} = 0; m_{13} = -\alpha I_1; m_{23} = -\beta I_1; m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)$$

Giải bài toán tìm trị riêng của phương trình $[S] - \omega^2 [M] = 0$ ta nhận được tần số dao động riêng của tấm bằng vật liệu xếp đặt trên nền đàn hồi.

4. Kiểm chứng và khảo sát số

4.1. Ví dụ kiểm chứng

Để kiểm chứng mô hình lý thuyết cũng như chương trình tính tự viết trên nền Matlab, tần số dao động riêng cho tấm chữ nhật đẳng hướng không có nền đàn hồi được tính toán với các thông số đầu vào về vật liệu và kích thước tấm cho trên bảng 1. Bảng 2 trình bày kết quả tính toán tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên với các tỉ số kích thước b/a khác nhau. Kết quả theo nghiệm Navier của bài báo được so sánh với kết quả của Reddy [18] và của phần mềm tính toán kết cấu SAP2000, sử dụng phần tử THINPLATE với lưới chia 100x100.

Bảng 1: Các tham số vật liệu và kích thước tấm chữ nhật đẳng hướng

$h(m)$	a/h	b/a	$E_1(N/m^2)$	ν	e_0
0.1	100	0.5; 1; 1.5; 2; 2.5; 3	2.1×10^{11}	0.33	0

Tần số dao động riêng, hệ số nền không thứ nguyên của tấm xác định theo công

thức [7]:
$$\bar{\omega} = \omega \cdot \frac{a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho \times h}{D_{22}}}; K_w = K_0 \frac{D_1}{a^4}$$

Kết quả trên Bảng 2 cho thấy rằng sai lệch giữa các kết quả nhận được theo nghiệm giải tích của bài báo so với kết quả của Reddy và tính bằng SAP 2000 là rất ít (sai khác lớn nhất so với Reddy là 0.0862%, và so với SAP 2000 là 0.0693%). Như vậy nghiệm giải tích mà bài báo đã thiết lập cũng như chương trình tính tự viết trên nền Matlab là tin cậy được.

Bảng 2: Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật vật liệu đẳng hướng

b/a	Nguồn				Bài báo
	Reddy [7]	SAP			
	$\bar{\omega}$	f (HZ)	$\omega = 2\pi f$ (rad)	$\bar{\omega}$	
0.5	4.999	38.286	240.558	4.998	4.999
1.0	2.000	15.312	96.208	1.999	1.999
1.5	1.444	11.060	69.492	1.443	1.444
2.0	1.250	9.571	60.136	1.249	1.249
2.5	1.160	8.881	55.800	1.159	1.159
3.0	1.111	8.510	53.469	1.111	1.111

4.2. Các khảo sát số

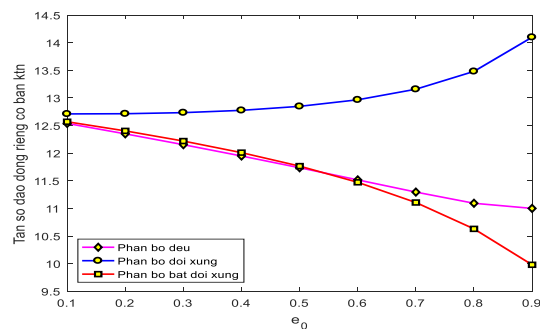
Trong phần này, ảnh hưởng của các tham số vật liệu (dạng phân bố lỗ rỗng, hệ số rỗng), tham số kích thước (tỉ số b/a) và tham số nền đến tần số dao động riêng của tấm bằng vật liệu FGM xếp trên nền đàn hồi Winkler sẽ được khảo sát cụ thể.

4.2.1. Ảnh hưởng của dạng phân bố lỗ rỗng và hệ số mật độ lỗ rỗng

Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật ($b/a = 2$; $a/h = 20$; $K_0 = 10$) bằng vật liệu FGM xếp với dạng phân bố lỗ rỗng và hệ số mật độ lỗ rỗng thay đổi được trình bày trong Bảng 3. Đồ thị biểu diễn sự biến thiên của tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên theo hệ số mật độ lỗ rỗng với ba dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau (phân bố đều - dạng 1; phân bố không đều đối xứng - dạng 2; phân bố không đều bất đối xứng - dạng 3) được biểu diễn trên Hình 4.

Bảng 3: Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật bằng vật liệu xếp với các hệ số mật độ lỗ rỗng e_0 thay đổi

e_0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Dạng 1	12.54	12.35	12.15	11.95	11.74	11.52	11.30	11.09	11.00
Dạng 2	12.71	12.71	12.73	12.78	12.85	12.97	13.16	13.48	14.10
Dạng 3	12.57	12.40	12.22	12.01	11.77	11.47	11.11	10.63	9.98



Hình 4: Biến thiên tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật bằng vật liệu xếp theo hệ số mật độ lỗ rỗng

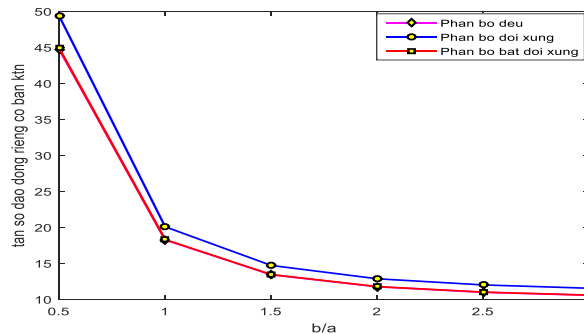
Kết quả trên Bảng 3 và đồ thị trên Hình 4 cho thấy mật độ phân bố lỗ rỗng làm thay đổi tần số dao động riêng của tấm. Trong khi tần số dao động riêng tăng khi hệ số rỗng tăng đối với phân bố không đều đối xứng (dạng 2) thì đối với phân bố đều (dạng 1) và không đều bất đối xứng (dạng 3) tần số dao động riêng lại giảm. Dạng phân bố lỗ rỗng ảnh hưởng đáng kể đến giá trị tần số dao động riêng, hệ số mật độ lỗ rỗng càng lớn thì ảnh hưởng của dạng phân bố lỗ rỗng lên tần số dao động riêng của tấm FGM xốp càng rõ rệt. Khi hệ số mật độ phân bố lỗ rỗng bé thì tần số dao động riêng của hai dạng 1 và 3 là xấp xỉ nhau.

4.2.2. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước các cạnh b/a

Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật ($e_0 = 0,5$; $a/h = 20$; $K_0 = 10$) bằng vật liệu FGM xốp với tỷ lệ kích thước b/a thay đổi thể hiện trong Bảng 4. Hình 5 là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên theo tỷ số kích thước các cạnh b/a .

Bảng 4: Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng với các tỷ số kích thước các cạnh b/a khác nhau

b/a	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Dạng 1	44.74	18.24	13.40	11.74	10.97	10.56
Dạng 2	49.36	20.07	14.70	12.85	12.00	11.53
Dạng 3	44.89	18.30	13.44	11.77	11.00	10.58



Hình 5: Biểu đồ biểu diễn tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng theo tỉ số kích thước b/a

Quan sát kết quả trên Bảng 4 và đồ thị trên Hình 5 ta thấy khi tỉ số kích thước b/a tăng thì tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm FGM xốp giảm. Sự thay đổi tần số là cùng xu thế với cả ba dạng phân bố lỗ rỗng. Tần số dao động riêng của hai dạng phân bố lỗ rỗng: phân bố đều và phân bố không đều bất đối xứng có sai lệch không đáng kể.

4.2.3. Ảnh hưởng của hệ số nền

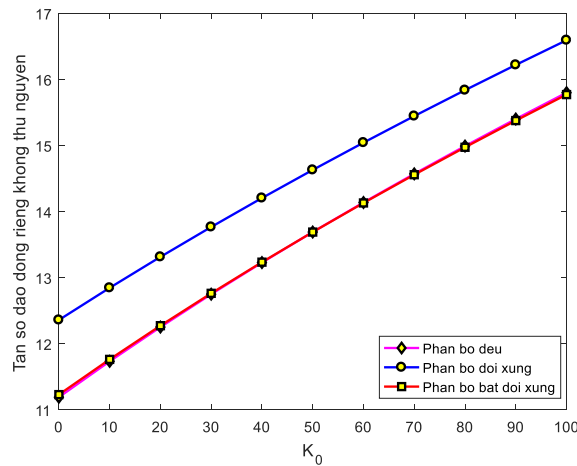
Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật ($b/a = 2$; $a/h = 20$; $e_0 = 0.5$) với các dạng phân bố lỗ rỗng và hệ số nền không thứ nguyên thay đổi được trình bày trên Bảng 5. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật biến thiên theo hệ số nền không thứ nguyên biểu diễn bằng đồ thị trên Hình 6.

Như thực tế kỹ thuật, kết quả nhận được cho thấy khi của độ cứng nền càng

cao (hệ số nền không thứ nguyên tăng) thì tần số dao động riêng của tấm FGM xấp xỉ càng tăng.

Bảng 5: Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật ($b/a = 2$; $a/h = 20$; $e_0 = 0,5$) với các hệ số nền không thứ nguyên khác nhau

K_0	0	10	20	30	50	60	80	100
Dạng 1	11.19	11.73	12.25	12.75	13.23	13.69	14.13	14.57
Dạng 2	12.36	12.84	13.31	13.76	14.20	14.63	15.04	15.44
Dạng 3	11.23	11.76	12.27	12.76	13.23	13.69	14.13	14.56



Hình 6: Biến thiên tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm chữ nhật vật liệu rỗng theo hệ số nền không thứ nguyên

5. Kết luận

Trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển, bài báo sử dụng dạng nghiệm Navier để tính toán tần số dao động riêng của tấm mỏng bằng vật liệu FGM xấp xỉ đặt trên nền đàn hồi Winkler. Kết quả cho thấy sự ảnh hưởng rõ rệt của ba dạng phân bố lỗ rỗng: đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng cũng như hệ số mật độ lỗ rỗng đến tần số dao động riêng không thứ nguyên được làm rõ qua các ví dụ số. Bên cạnh đó, ảnh hưởng của hệ số nền và tham số kích thước tấm cũng được phân tích chi tiết. Các nhận xét trên khía cạnh kỹ thuật thu được sẽ là nguồn tham khảo hữu ích cho công tác thiết kế, thi công và bảo trì các kết cấu sử dụng vật liệu FGM xấp xỉ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] K. Magnucki, M. Malinowski, and J. Kasprzak, "Bending and buckling of a rectangular porous plate," *Steel and Composite Structures*, Vol. 6, No. 4, pp. 319-333, 2006.
- [2] D. Chen, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam," *Composite Structures*, Vol. 133, pp. 54-61, 2015.

- [3] D. Chen, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams," *International journal of mechanical sciences*, Vol. 108, pp. 14-22, 2016.
- [4] D. Wu, A. Liu, Y. Huang, Y. Huang, Y. Pi, and W. Gao, "Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis," *Engineering Structures*, Vol. 165, pp. 287-301, 2018.
- [5] N. Wattanasakulpong, A. Chaikittiratana, and S. Pornpeerakeat, "Chebyshev collocation approach for vibration analysis of functionally graded porous beams based on third-order shear deformation theory," *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 34, No. 6, pp. 1124-1135, 2018.
- [6] M. Jabbari, M. Hashemitaheeri, A. Mojahedin, and M. Eslami, "Thermal buckling analysis of functionally graded thin circular plate made of saturated porous materials," *Journal of thermal stresses*, Vol. 37, No. 2, pp. 202-220, 2014.
- [7] F. Ebrahimi and S. Habibi, "Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate," *Steel Compos. Struct*, Vol. 20, No. 1, pp. 205-225, 2016.
- [8] D. Chen, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Buckling and bending analyses of a novel functionally graded porous plate using Chebyshev-Ritz method," *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 157-170, 2019.
- [9] J. Zhao, Q. Wang, X. Deng, K. Choe, R. Zhong, and C. Shuai, "Free vibrations of functionally graded porous rectangular plate with uniform elastic boundary conditions," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 168, pp. 106-120, 2019.
- [10] K. Gao, Q. Huang, S. Kitipornchai, and J. Yang, "Nonlinear dynamic buckling of functionally graded porous beams," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp. 1-12, 2019.
- [11] M. Arefi and M. Meskini, "Application of hyperbolic shear deformation theory to free vibration analysis of functionally graded porous plate with piezoelectric face-sheets," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 71, No. 5, pp. 459-467, 2019.
- [12] M. Avcar and W. K. M. Mohammed, "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation," *Arabian Journal of Geosciences*, Vol. 11, No. 10, p. 232, 2018.
- [13] H. A. Atmane, A. Tounsi, and F. Bernard, "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 13, No. 1, pp. 71-84, 2017.
- [14] B. Fahsi, R. B. Bouiadjra, A. Mahmoudi, S. Benyoucef, and A. Tounsi, "Assessing the Effects of Porosity on the Bending, Buckling, and Vibrations of Functionally Graded Beams Resting on an Elastic Foundation by Using a New Refined Quasi-3D Theory," *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 55, No. 2, pp. 219-230, 2019.
- [15] T. T. Tran, Q.-H. Pham, and T. Nguyen-Thoi, "An Edge-Based Smoothed Finite Element for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous (FGP) Plates on Elastic Foundation Taking into Mass (EFTIM)," *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2020, 2020.
- [16] A. Zenkour and A. Radwan, "Bending response of FG plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment with porosities," *Composite Structures*, Vol. 213, pp. 133-143, 2019.

- [17] M. Kaddari *et al.*, “A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: Bending and free vibration analysis,” *Computers and Concrete*, Vol. 25, No. 1, pp. 37-57, 2020.
- [18] J. N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press, 2006.

SUMMARY

FREE OSCILLATION ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATE OF POROUS FGM MATERIAL PLACED ON A WINKLER ELASTIC BASE BY ANALYTICAL METHOD

Phan Xuan Thuc, Nguyen Thi Quynh

Department of Construction, Vinh University

Received on 16/6/2021, accepted for publication on 8/9/2021

In this paper, classical plate theory is used to analyse free oscillation of rectangular plates made of porous FGM material, edge joints on Winkler elastic base. Three different types of pore distribution: uniform distribution, symmetric irregular distribution and asymmetrical irregular distribution are investigated. The reliability of the analytical solution as well as the calculation program written on Matlab are verified with some published results and with the results calculated by the SAP2000 structural calculation software. The influence of the material parameters, the geometrical dimensions of the plate, as well as the background coefficient on the free oscillation frequency of the plate are evaluated.

Keyword: Free oscillation analysis; porous FGM material; Winkler elastic base; classical plate theory.