

# Thuật toán điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện cho hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt với vùng chết và nhiễu ngoài

## Event-triggered robust optimal control algorithm for strict-feedback nonlinear systems with dead-zone and external disturbance

Nguyễn Tấn Lũy, Trần Hữu Toàn, Đặng Quang Minh  
ĐH Công nghiệp TP Hồ Chí Minh

Email: nguyentanluy@iuh.edu.vn, tranhuutoan@iuh.edu.vn, dangquangminh@iuh.edu.vn

### Abstract

The paper proposes a novel event-triggered robust optimal control algorithm for strict-feedback nonlinear systems (SNSs) affected by dead-zone and external disturbance. An event-triggered feed-forward control (EFFC) law is designed on the basis of backstepping techniques and on the framework of an event-triggering mechanism to transform the control problem of a strict-feedback nonlinear system to equivalent control problem of an affine nonlinear system. Subsequently, an event-triggered robust optimal control (EROC) law is designed in order to reject the dead-zone effect and external disturbance. Compared with the existing control algorithm, which samples states periodically, EFFC and EROC only sample the states when a triggering error exceeds the defined threshold, and thus mitigate the computational and communication complexity. In addition, EFFC and EROC also remove the drift dynamic identification process, persistent excitation condition. By Lyapunov analysis, it is guaranteed that the closed dynamics is stable, the approximation error is uniformly ultimately bounded, and the cost function converges to the sub-optimal value. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is confirmed through examples of controlling linear systems, Euler-Lagrange systems and Van der Pol oscillator nonlinear systems with saturated inputs.

### Keywords

Event-triggered control, dead-zone control,  $H_\infty$  optimal control

### Tóm tắt<sup>1</sup>

Bài báo đề xuất thuật toán điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện cho hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt bị ảnh hưởng bởi vùng chết và nhiễu ngoài. Luật điều khiển truyền thẳng kích hoạt sự kiện EFFC (Event-triggered Feed-forward Control) được thiết kế, dựa vào kỹ thuật cuốn chiếu và cơ chế kích hoạt sự kiện, để chuyển đổi bài toán điều khiển hệ phi tuyến truyền ngược thành bài toán điều khiển hệ phi tuyến affine tương đương. Tiếp theo, luật điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện EROC (Event-triggered Robust Optimal Control) được thiết kế để loại hiệu ứng vùng chết và nhiễu ngoài. So với các giải thuật điều khiển lấy mẫu trạng thái theo chu kỳ, giải thuật EFFC và EROC chỉ lấy mẫu trạng thái và phát sinh tín hiệu điều khiển mới nếu sai số kích hoạt vượt quá ngưỡng cho phép, và do đó, làm giảm độ phức tạp tính toán và truyền thông. Ngoài ra thuật toán EFFC và EROC còn loại bỏ được thủ tục nhận dạng hàm phi tuyến không rõ trong hệ thống, điều kiện kích thích liên tục. Chứng minh Lyapunov cho thấy rằng động học kín ổn định, sai số xấp xỉ bị chặn và hàm chi phí hội tụ về giá trị cận tối ưu. Cuối cùng, hiệu quả của giải thuật đề xuất được kiểm chứng

thông qua các ví dụ về điều khiển hệ tuyến tính, Euler-Lagrange và mở rộng cho hệ phi tuyến dao động Van der Pol có ngõ vào ràng buộc bão hòa.

### Chữ viết tắt

EFFC	Event-triggered Feed-forward Control
EROC	Event-triggered Robust Optimal Control
HJI	Hamilton-Jacobi-Isaacs
RL	Reinforcement Learning
NN	Neural Network
ADP	Adaptive Dynamic Programming
SNSs	Strict-feedback Nonlinear Systems
PE	Persistent Excitation
CL	Concurrent Learning
UUB	Uniformly Ultimately Bounded

### 1. Phần mở đầu

Hệ thống phi tuyến ở dạng liên hệ ngược nghiêm ngặt được biểu diễn theo nhiều cách khác nhau và có rất nhiều ứng dụng khác nhau trong thực tế 0-[5]. Trong điều khiển thích nghi, bộ điều khiển được thiết kế dựa vào kỹ thuật cuốn chiếu 0-[3]. Trong điều khiển tối ưu, bộ điều khiển tối thiểu hàm chi phí được thiết kế sau khi áp dụng kỹ thuật cuốn chiếu để chuyển hệ thống về hệ phi tuyến affine tương đương [4], [5]. Tuy nhiên, khi khảo sát các hệ phi tuyến nói trên, ràng buộc ngõ vào và nhiễu ngoài chưa được xem xét.

Gần đây điều khiển tối ưu bền vững được đề xuất cho hệ phi tuyến liên hệ ngược nghiêm ngặt có nhiễu ngoài [6]-[9]. Trong đó phương pháp qui hoạch động

<sup>1</sup> Phiên bản nâng cao của báo cáo mã số 19, tham dự “Hội nghị - Triễn lãm quốc tế lần thứ 5 về Điều khiển và Tự động hóa VCCA-2019” diễn ra tại Hà Nội trong 2 ngày 06-07/09/2019; *Phản biện*: Phan Xuân Minh, Vũ Ngọc Phát, Nguyễn Phùng Quang.

thích nghi (Adaptive Dynamic Programming-ADP) kết hợp với lý thuyết điều khiển  $H_\infty$  [10] để xấp xỉ luật điều khiển tối ưu và luật nhiễu xấu nhất đồng thời tối thiểu hàm chi tiêu chất lượng  $H_\infty$ . Nghiệm của bài toán phụ thuộc nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI). Do phương trình này không có nghiệm giải tích nên thuật toán xấp xỉ nghiệm online được đề xuất dựa vào kỹ thuật học củng cố (Reinforcement Learning-RL) và mạng thần kinh (Neural Network-NN). Tuy nhiên, thuật toán này sử dụng cơ chế kích hoạt thời gian nên chưa giảm được chi phí tính toán và truyền thông. Ngoài ra thuật toán chưa giải quyết vấn đề ràng buộc ngõ vào.

Bên cạnh nhiễu ngoài, ngõ vào của hệ phi tuyến thực tế thường bị ràng buộc bởi tính chất vật lý của cơ cấu chấp hành như bão hoà, vùng chết, từ trễ,... Các ràng buộc này làm suy giảm chất lượng điều khiển hoặc thậm chí gây mất ổn định hệ kín [11]. Thuật toán điều khiển tối ưu được đề xuất trong [8], [9], [11] nhằm giải quyết vấn đề ngõ vào bão hoà. Trong đó, chi phí năng lượng bão hoà được biểu diễn dưới dạng hàm xác định dương không toàn phương. Tuy nhiên, các thuật toán này không thể điều khiển hệ phi tuyến với ràng buộc vùng chết, một trong những ràng buộc phức tạp nhất làm cho hệ thống mất khả năng điều khiển [12]. Nếu các phương pháp điều khiển kinh điển không thể khử được ảnh hưởng vùng chết, bộ bù vùng chết dựa vào NN được sử dụng [13]. Hầu hết các bộ bù vùng chết được thiết kế theo phương pháp điều khiển thích nghi không tối thiểu bất kỳ phiếm hàm chi tiêu chất lượng. Theo hiểu biết của nhóm tác giả, đến nay thuật toán điều khiển tối ưu loại bỏ ảnh hưởng của vùng chết chưa được nghiên cứu.

Những năm gần đây, cộng đồng điều khiển đang tập trung vào điều khiển bất sự kiện [14]-[17]. So với các thuật toán điều khiển truyền thống lấy mẫu theo chu kỳ, thuật toán điều khiển kích hoạt sự kiện có nhiều ưu điểm. Một trong những ưu điểm nổi trội là bộ điều khiển chỉ cập nhật tham số và sinh ra tín hiệu điều khiển khi và chỉ khi sai số giữa trạng thái lấy mẫu được giữ trước đó và trạng thái hiện tại vượt quá ngưỡng cho phép [16]; từ đó giảm tải được chi phí tính toán và truyền thông. Thuật toán điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện cho hệ phi tuyến affine với nhiễu ngoài được phát triển mạnh cùng với sự phát triển của ADP và RL [17], [18]. Trong đó, luật điều khiển tối ưu kích hoạt sự kiện được xấp xỉ đồng thời với luật nhiễu kích hoạt theo chu kỳ. Ngoài ra, thuật toán [18] còn xử lý hiện tượng bão hoà ngõ vào. Tuy nhiên, cho đến nay, các thuật toán kích hoạt sự kiện chưa giải quyết bài toán loại bỏ ảnh hưởng vùng chết cho hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt.

Bài báo này lần đầu tiên đề xuất thuật toán tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện cho hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt bị ảnh hưởng bởi vùng chết và nhiễu ngoài. Các đóng góp mới được liệt kê như sau:

1. Thiết kế luật EFFC để chuyển đổi bài toán điều khiển hệ phi tuyến truyền ngược thành bài toán điều khiển hệ phi tuyến affine tương đương; thiết kế luật EROC để loại bỏ ảnh hưởng của vùng chết.

2. Thiết kế thuật toán EFFC và EROC để loại bỏ thủ tục nhận dạng, loại bỏ điều kiện kích thích hệ thống PE (Persistent Excitation) trong điều khiển thích nghi [19]. Chứng minh sự ổn định của hệ kín sử dụng lý thuyết Lyapunov. Chứng minh sai số xấp xỉ bị chặn và hàm chi phí hội tụ về giá trị cận tối ưu.

Tiếp theo bài báo được bố cục như sau. Phần 2 mô tả bài toán và chuyển đổi hệ thống, Phần 3 thiết kế thuật toán EFFC và EROC, Phần 4 kiểm chứng thuật toán và Phần 5 kết luận bài báo.

## 2. Mô tả bài toán và chuyển đổi hệ thống

### 2.1 Hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt với vùng chết và nhiễu ngoài

Xét hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt được biểu diễn bởi phương trình không gian trạng thái

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1) + g_1(\bar{x}_1)x_2 + k_1(\bar{x}_1)d_1 \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2) + g_2(\bar{x}_2)x_3 + k_2(\bar{x}_2)d_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(\bar{x}_m) + g_m(\bar{x}_m)u_m + k_m(\bar{x}_m)d_m \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

trong đó  $x_h \in \mathfrak{R}^{n_h}$  ( $h=1, \dots, m$ ) là véc tơ trạng thái với  $\bar{x}_h = [x_1^T, \dots, x_h^T]^T$ ,  $f_h(\bar{x}_h) \in \mathfrak{R}^{n_h}$ ,  $g_h(\bar{x}_h) \in \mathfrak{R}^{n_h \times n_{h+1}}$  và  $k_h(\bar{x}_h) \in \mathfrak{R}^{n_h \times n_h}$  là các hàm phi tuyến trơn, trong đó  $f_h(\bar{x}_h)$  không biết.  $y \in \mathfrak{R}^{n_1}$  là ngõ ra của hệ thống,  $d_h \in L_2[0, \infty) \subset \mathfrak{R}^{n_h}$ ,  $u_m = D(\pi_m) \in \mathfrak{R}^{n_{m+1}}$  lần lượt là nhiễu ngoài và tín hiệu điều khiển với  $\pi_m \in \mathfrak{R}^{n_{m+1}}$  là ngõ vào của vùng chết. Hàm ánh xạ  $D(\pi_m)$  của hệ thống (1) được xác định bởi

$$D(\pi_m) = \begin{cases} m^r(\pi_m - b^r), & \pi_m \geq b^r \\ 0, & -b^l < \pi_m < b^r \\ m^l(\pi_m + b^l), & \pi_m \leq -b^l \end{cases} \quad (2)$$

trong đó  $m^r > 0$ ,  $m^l > 0$  lần lượt là độ dốc trái và phải, và  $b^r > 0$ ,  $b^l > 0$  lần lượt là các điểm rẽ nhánh trái và phải [20].  $D(\pi_m)$  có thể được biểu diễn

$$u_m = m\pi_m - \tau_b \quad (3)$$

trong đó

$$m = \begin{cases} m^r, \pi_m \geq 0 \\ m^l, \pi_m < 0 \end{cases}, \tau_b = \begin{cases} mb^r, \pi_m \geq b^r \\ m\pi_m, -b^l < \pi_m < b^r \\ -mb^l, \pi_m \leq -b^l \end{cases} \quad (4)$$

#### Chú ý:

- Với cơ cấu chấp hành cụ thể, ta có thể ước lượng được tham số  $m$  [21]. Vì vậy, không mất tính tổng quát bài báo này xem  $m$  là tham số rõ.

Để thiết kế thuật toán ta sử dụng các giả thiết sau:

- + Giả thiết 1 ([4], [5], [8]):  $f_h(\bar{x}_h)$  Lipschitz,  $g_h(\bar{x}_h) \neq 0$ ,  $k_h(\bar{x}_h) \neq 0$  và tồn tại các hằng số dương  $b_g$  và  $b_k$  sao cho  $\|g_h(\bar{x}_h)\| \leq b_g$ ,

$$\|k_h(\bar{x}_h)\| \leq b_k, \quad h=1, \dots, m.$$

+ Giả thiết 2:  $\|\tau_b\| \leq \rho^*$  với  $\rho^*$  là hằng số dương.

- Giả thiết 2 là thực tế bởi vì  $\tau_b$  bị ràng buộc.

## 2.2 Chuyển đổi hệ thống

Thiết kế thuật toán điều khiển tối ưu thực hiện dễ dàng trên hệ phi tuyến affine nhưng rất khó khăn trên hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt [4], [5]. Do đó, phần này sẽ trình bày thủ tục chuyển đổi hệ thống nhưng dựa vào kích hoạt sự kiện khác với [4], [5].

Theo cơ chế kích hoạt sự kiện [16], khi điều kiện kích hoạt xảy ra tại thời điểm  $t_k \in T$ , với  $T$  là tập chứa các giá trị tăng đơn điệu  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots\}$ ,  $\forall k \in N$ , trạng thái được lấy mẫu và giữ cho đến thời điểm tiếp theo  $t_{k+1} \in T$ ,  $\underline{x}_h = x_h(t_k)$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k \in N$ .

Định nghĩa biến mới như sau:

$$\begin{cases} z_1 = y - y_0 \\ z_l = x_l - \underline{x}_{ld}, l = 2, \dots, m \end{cases} \quad (5)$$

trong đó  $y_0$  là quỹ đạo tham chiếu tron bị chặn, và  $\underline{x}_{ld} = x_{ld}(t_k)$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k \in N$  là tín hiệu điều khiển kích hoạt sự kiện. Sai số giữa trạng thái hiện tại và trạng thái kích hoạt trước đó được định nghĩa như sau:

$$e_h = x_h - \underline{x}_h, t_k \leq t < t_{k+1}, e_h(t_k) = 0 \quad (6)$$

Định nghĩa  $\underline{z}_h = z_h(t_k)$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k \in N$ , từ (5) và (6) ta có:

$$e_h = z_h - \underline{z}_h \quad (7)$$

Tín hiệu điều khiển ảo và tín hiệu thực kích hoạt sự kiện được phân rã thành

$$\begin{cases} \underline{x}_{ld} = \underline{x}_{ld}^a + \underline{x}_{ld}^* \\ \underline{u}_m = \underline{u}_m^a + \underline{u}_m^* \end{cases} \quad (8)$$

trong đó  $\underline{x}_{ld}^a$  và  $\underline{u}_m^a$  là luật điều khiển truyền thẳng và  $\underline{x}_{ld}^*$ ,  $\underline{u}_m^*$  là luật điều khiển hồi tiếp kích hoạt sự kiện được đề cập ở phần sau. Định nghĩa véc tơ:

$$\underline{u} = \underline{u}^a + \underline{u}^* \quad (9)$$

trong đó  $\underline{u}^a = [\underline{x}_{ld}^{aT}, \underline{u}_m^{aT}]^T$ ,  $\underline{u}^* = [\underline{x}_{ld}^{*T}, \underline{u}_m^{*T}]^T$ ,  $l=2, \dots, m$ .

Ta thiết kế thuật toán điều khiển truyền thẳng kích hoạt sự kiện thông qua kỹ thuật cuốn chiếu sau đây.

- Bước 1: Sử dụng (5) và (6) và lấy đạo hàm và để ý (1) ta có:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\dot{y}_0 + f_1(\bar{x}_1) + g_1(\bar{x}_1)\underline{x}_2 \\ &+ g_1(\bar{x}_1)(\underline{x}_{2d}^a + \underline{x}_{2d}^*) - g_1(\bar{x}_1)\underline{x}_{2d} + k_1(\bar{x}_1)d_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Thiết kế luật điều khiển truyền thẳng như sau:

$$g_1(\bar{x}_1)\underline{x}_{2d}^a = \dot{y}_0 - \beta \underline{z}_1 \quad (11)$$

Động học (11) trở thành

$$\dot{z}_1 = f_1(\bar{x}_1) + g_1(\bar{x}_1)\underline{x}_{2d}^* + g_1(\bar{x}_1)\underline{z}_2 + k_1(\bar{x}_1)d_1 - \beta \underline{z}_1 \quad (12)$$

- Bước 2, ..., m-1: Sử dụng (5) và (6) và lấy đạo hàm và để ý (1) ta có:

$$\begin{aligned} \dot{z}_h &= -\dot{x}_{hd} + f_h(\bar{x}_h) + g_h(\bar{x}_h)(\underline{x}_{(h+1)d}^a + \underline{x}_{(h+1)d}^*) \\ &+ g_h(\bar{x}_h)\underline{x}_{h+1} - g_h(\bar{x}_h)\underline{x}_{(h+1)d} + k_h(\bar{x}_h)d_h \end{aligned} \quad (13)$$

với luật điều khiển truyền thẳng được thiết kế

$$g_h(\bar{x}_h)\underline{x}_{(h+1)d}^a = \dot{x}_{hd} - \beta \underline{z}_h \quad (14)$$

Động học (14) trở thành

$$\begin{aligned} \dot{z}_h &= f_h(\bar{x}_h) + g_h(\bar{x}_h)\underline{x}_{(h+1)d}^* + g_1(\bar{x}_1)\underline{z}_{h+1} \\ &+ k_h(\bar{x}_h)d_h - \beta \underline{z}_h \end{aligned} \quad (15)$$

- Bước m: Sử dụng (5) và (6) và lấy đạo hàm, lại để ý (1) ta có:

$$\begin{aligned} \dot{z}_m &= -\dot{x}_{md} + f_m(\bar{x}_m) + g_m(\bar{x}_m)(\underline{u}_m^a + \underline{u}_m^*) \\ &+ k_m(\bar{x}_m)d_m \end{aligned} \quad (16)$$

Thiết kế luật điều khiển truyền thẳng như sau:

$$g_m(\bar{x}_m)\underline{x}_{md}^a = \dot{x}_{md} - \beta \underline{z}_m \quad (17)$$

Khi đó động học (16) trở thành

$$\dot{z}_m = f_m(\bar{x}_m) + g_m(\bar{x}_m)\underline{u}_m^* + k_m(\bar{x}_m)d_m - \beta \underline{z}_m \quad (18)$$

**Bổ đề 1:** Nếu thiết kế luật điều khiển truyền thẳng kích hoạt sự kiện (11), (14) và (17) cho hệ phi tuyến phân hồi nghiêm ngặt (1) với điều kiện kích hoạt:

$$e_h \leq \kappa \|z_h\| \quad (19)$$

trong đó  $\beta \geq b_g + \kappa$ ,  $0 < \kappa < 1$ , thì việc giải bài toán điều khiển cho hệ thống (1) và hệ thống (20) sau đây là tương đương

$$\dot{z} = f(z) + g(z)\underline{u}^* + k(z)d \quad (20)$$

trong đó

$$\begin{aligned} z &= [z_1^T, \dots, z_m^T]^T, f(z) = [f_1^T(\bar{x}_1), \dots, f_m^T(\bar{x}_m)]^T \\ \underline{u}^* &= [\underline{u}_1^{*T}, \dots, \underline{u}_m^{*T}]^T, d = [d_1^T, \dots, d_m^T]^T \\ g(z) &= \text{diag}\{g_h(\bar{x}_h)\}, k(z) = \text{diag}\{k_h(\bar{x}_h)\} \end{aligned}$$

**Chứng minh:** Chọn hàm Lyapunov

$$J = \sum_{h=1}^m \frac{1}{2} z_h^T z_h \quad (21)$$

Đạo hàm (21) kết hợp với (12), (15) và (18) ta có:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\beta \sum_{h=1}^m z_h^T z_h + \sum_{h=1}^m z_h^T (f_h + g_h \underline{u}_h^* + k_h d_h) \\ &+ \sum_{h=2}^{m-1} z_h^T g_h z_{h+1} \end{aligned} \quad (22)$$

Lại có

$$\begin{aligned} \sum_{h=2}^{m-1} z_h^T g_h z_{h+1} &\leq \frac{1}{2} \sum_{h=2}^{m-1} z_h^T \|g_h\| z_h + \frac{1}{2} \sum_{h=2}^{m-1} z_{h+1}^T \|g_h\| z_{h+1} \\ &\leq \sum_{h=1}^m z_h^T \|g_h\| z_h \end{aligned}$$

Từ đó (22) có thể được viết thành

$$\begin{aligned} \dot{J} &\leq -\beta \sum_{h=1}^m z_h^T z_h + \beta \sum_{h=1}^m z_h^T e_h \\ &+ \sum_{h=1}^m z_h^T (f_h + g_h \underline{u}_h^* + k_h d_h) + \sum_{h=1}^m z_h^T \|g_h\| z_h \end{aligned} \quad (23)$$

Thay (19) vào (23) ta được

$$\dot{J} \leq \sum_{h=1}^m z_h^T (f_h + g_h \underline{u}_h^* + k_h d_h) \quad (24)$$

Mặt khác nếu chọn hàm Lyapunov  $J_1 = \sum_{h=1}^m (z_h^T z_h) / 2$  cho hệ thống (20), sau đó lấy đạo hàm sử dụng (20) ta có:

$$\dot{J}_1 = \sum_{h=1}^m z_h^T (f_h + g_h \underline{u}_h^* + k_h d_h) \quad (25)$$

So sánh (24) và (25) ta thấy rằng nếu thiết kế được luật điều khiển ổn định hệ kín (20) thì  $\dot{J}_1 < 0$  hay  $\dot{J} < 0$ , từ đó hệ kín (1) cũng ổn định. Ta có điều phải chứng minh.

### 3. Điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện

#### 3.1 Hàm chỉ tiêu chất lượng bám $H_\infty$

Dựa vào Bổ đề 1, để giải quyết bài toán điều khiển hệ thống (1) theo yêu cầu, ta cần thiết kế luật điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện cho hệ kín (20).

Sử dụng cách biểu diễn vùng chết (3) cho (20),  $\underline{u}^* = m \underline{\pi}^* - \underline{\tau}_b^*$ , ta có

$$\dot{z} = f(x) + h(x) \underline{v}^* - g(x) \underline{\psi}^* + k(x) d \quad (26)$$

trong đó  $\underline{v}^* = [\underline{x}_{vd}^{*T}, \underline{\tau}^{*T}]^T$ ,  $\underline{\psi}^* = [0, \underline{\tau}_b^{*T}]^T$ ,  $h(x) = mg(x)$ ,

$\underline{\pi}^*$  là tín hiệu điều khiển tối ưu kích hoạt sự kiện,  $\underline{\tau}_b^*$  là tín hiệu bù nhiễu vùng chết xấu nhất.

Để thiết kế thuật toán điều khiển tối ưu ta định nghĩa hàm chi phí:

$$J(z, \underline{v}^*) = \int_0^\infty (z^T Q z + \underline{v}^{*T} S \underline{v}^*) dt \quad (27)$$

Trong điều khiển bền vững  $H_\infty$ , hàm chi phí (27) bị chặn trên bởi độ lợi  $L_2$  [22]:

$$\int_0^\infty (z^T Q z + \underline{v}^{*T} S \underline{v}^*) dt \leq \int_0^\infty (U(\underline{\psi}^*) + \gamma^2 d^T d) dt \quad (28)$$

trong đó  $Q$  là ma trận xác định dương,  $S$  là ma trận chéo xác định dương,  $\gamma > \gamma^* > 0$ , với  $\gamma^*$  là giá trị nhỏ nhất sao cho (26) luôn ổn định. Bởi vì  $\underline{\psi}^*$  bị chặn, năng lượng của nó có thể biểu diễn bởi một hàm không toàn phương bán xác định dương  $U(\underline{\psi}^*)$  [23]

$$U(\underline{\psi}^*) = 2\rho \int_0^{\underline{\psi}^*} \tanh^{-1}(s / \rho) R ds \quad (29)$$

trong đó  $R$  là ma trận chéo xác định dương,  $\rho \leq \rho^*$  là hệ số giảm ảnh hưởng. Từ (28), ta định nghĩa hàm chỉ tiêu chất lượng bám  $H_\infty$

$$J(z(0), \underline{v}^*, \underline{\psi}^*, d) = \int_0^\infty (z^T Q z + \underline{v}^{*T} S \underline{v}^* - U(\underline{\psi}^*) - \gamma^2 d^T d) dt \quad (30)$$

Lý thuyết trò chơi kết hợp với ADP được sử dụng

để tìm giá trị tối ưu bền vững  $V^*(z(0))$  thỏa điều kiện

$$V^*(z(0)) = \min_{\underline{v}^*} \max_{\underline{\psi}^*} \max_{d^*} J(z(0), \underline{v}^*, \underline{\psi}^*, d) \quad (31)$$

Nếu điểm yên ngựa  $(\underline{v}^*, \underline{\psi}^*, d^*)$  tồn tại thì bài toán điều khiển tối ưu bền vững được giải, trong đó  $\underline{v}^*$  là luật điều khiển tối ưu kích hoạt sự kiện,  $\underline{\psi}^*$  luật tối ưu kích hoạt sự kiện loại bỏ ảnh hưởng vùng chết và  $d^*$  nhiễu ngoài xấu nhất.

**Chú ý:** Hàm chi phí (30) và hàm đánh giá tối ưu (31) được định nghĩa khác so với các công trình đã có, từ đó thuật toán điều khiển thiết kế trong phần tiếp theo là hoàn toàn mới.

#### 3.2 Thuật toán điều khiển

Định nghĩa hàm đánh giá:

$$V(z) = \int_t^\infty (z^T Q z + \underline{v}^T S \underline{v} - U(\underline{\psi}) - \gamma^2 d^T d) dt \quad (32)$$

Sử dụng công thức Leibniz ta có phương trình HJI

$$\begin{aligned} H(z, \nabla V^*, \underline{v}, \underline{\psi}, d) &= z^T Q z + \underline{v}^T S \underline{v} - U(\underline{\psi}) - \gamma^2 d^T d \\ &+ (\nabla V^*)^T (f(x) + (h(x) \underline{v} - g(x) \underline{\psi} + k(x) d)) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

trong đó  $\nabla V^*(z) = \partial V^*(z) / \partial z$ . Sử dụng điều kiện dừng cho (33) ta có:

$$\underline{v}^* = -\frac{1}{2} S^{-1} h^T(x) \nabla V^*(z) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \underline{\psi}^* &= -\rho \tanh(N^*), \quad N^* \\ &= \frac{1}{2\rho} R^{-1} g^T(x) \nabla V^*(z) \end{aligned} \quad (35)$$

$$d^* = \frac{1}{2\gamma^2} k^T(x) \nabla V^*(z) \quad (36)$$

Nghiệm của phương trình (33) cho (34), (35) và (36) không thể giải bằng giải tích, ta thiết kế thuật toán dựa vào ADP kết hợp với NN để xấp xỉ nghiệm này.

Theo định lý xấp xỉ bậc cao Weierstrass [24], nghiệm tron  $V^*$  khả vi bậc nhất có thể được xấp xỉ bởi NN như sau:

$$V^*(z) = W^T \phi(z) + \varepsilon(z) \quad (37)$$

$$\nabla V^*(z) = \nabla \phi^T(z) W + \nabla \varepsilon(z) \quad (38)$$

trong đó  $\phi(z)$  là hàm tác động,  $W \in \mathbb{R}^h$  là trọng số NN lý tưởng, với  $h$  là số tế bào lớp ẩn,  $\nabla$  là toán tử đạo hàm riêng phần, và  $\varepsilon(z)$  là sai số xấp xỉ. Tính chất xấp xỉ hàm được giới thiệu sau đây.

**Tính chất 1** [24]: Nếu chọn  $\phi(z)$  là tập cơ sở độc lập tuyến tính có các phần tử là hàm toàn phương, xuyên tâm, dạng hàm tanh hoặc sigmoid thì  $\|\phi(z)\| \leq b_\phi$ ,  $\|\nabla \phi(z)\| = \|\partial \phi(z) / \partial z\| \leq b_{\nabla \phi}$ , khi đó  $V^*, \nabla V^*$  được

xấp xỉ đều trong một tập đóng cho trước. Đặc biệt, khi  $h \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\nabla \varepsilon = \partial \varepsilon / \partial (z) \rightarrow 0$ , với  $h$  hữu hạn,  $\|\varepsilon\| < b_\varepsilon$ ,  $\|\nabla \varepsilon\| \leq b_{\nabla \varepsilon}$ , trong đó  $b_\varepsilon$ ,  $b_{\nabla \varepsilon}$  là các hằng số dương. Ngoài ra,  $\nabla \phi(z)$  còn liên tục Lipschitz với hằng số dương  $L_{\nabla \phi}$

$$\|\nabla \phi(z) - \nabla \phi(\underline{z})\| \leq L_{\nabla \phi} \|z - \underline{z}\| = L_{\nabla \phi} \|\underline{e}\| \quad (39)$$

Sử dụng (38) cho (33) ta có sai số của phương trình HJI (33)

$$\begin{aligned} \varepsilon_H = & z^T Qz + \underline{v}^T S\underline{v} - U(\underline{\psi}) - \gamma^2 d^T d \\ & + W^T \nabla \phi \left( f(x) + (h(x)\underline{v} - g(x)\underline{\psi} + k(x)d) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

trong đó  $\underline{v}$ ,  $\underline{\psi}$  và  $d$  được định nghĩa

$$\underline{v} = -\frac{1}{2} S^{-1} h^T(x) \left( \nabla \phi^T(\underline{z}) W + \nabla \varepsilon(\underline{z}) \right) \quad (41)$$

$$\underline{\psi} = -\rho \tanh \left( \frac{1}{2\rho} R^{-1} g^T(x) \left( \nabla \phi^T(\underline{z}) W + \nabla \varepsilon(\underline{z}) \right) \right) \quad (42)$$

$$d = \frac{1}{2\gamma^2} k^T(x) \left( \nabla \phi^T(\underline{z}) W + \nabla \varepsilon(\underline{z}) \right) \quad (43)$$

**Chú ý:** Theo thuộc tính 1, tồn tại tập đóng để  $\varepsilon_H$  bị chặn sao cho  $\forall b_{\varepsilon H} > 0, \exists N(b_{\varepsilon H}) : \sup_{\delta \in \Omega} \|\varepsilon_H\| \leq b_{\varepsilon H}$ . Hơn nữa,  $\varepsilon_H$  sẽ hội tụ đều đến zero khi  $h \rightarrow \infty$ .

Trọng số lý tưởng  $W$  không có sẵn, ta xấp xỉ hàm đánh giá bởi trọng số NN xấp xỉ

$$\hat{V} = \hat{W}^T \phi \quad (44)$$

Vì vậy luật điều khiển tối ưu kích hoạt sự kiện, luật tối ưu kích hoạt sự kiện loại bỏ ảnh hưởng của vùng chết và luật nhiễu ngoài xấu nhất được xấp xỉ:

$$\hat{\underline{v}} = -\frac{1}{2} S^{-1} h^T(\underline{x}) \nabla \phi^T(\underline{z}) \hat{W} \quad (45)$$

$$\hat{\underline{\psi}} = -\rho \tanh(\hat{N}), \hat{N} = \frac{1}{2\rho} R^{-1} g^T(\underline{x}) \nabla \phi^T(\underline{z}) \hat{W} \quad (46)$$

$$\hat{d} = \frac{1}{2\gamma^2} k^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) \hat{W} \quad (47)$$

Từ đó phương trình HJI (33) trở thành HJI xấp xỉ

$$\begin{aligned} \hat{H}(z, \hat{W}) = & z^T Qz + \hat{\underline{v}}^T S\hat{\underline{v}} - U(\hat{\underline{\psi}}) - \gamma^2 \hat{d}^T \hat{d} \\ & + \hat{W}^T \nabla \phi \left( f(x) + (h(x)\hat{\underline{v}} - g(x)\hat{\underline{\psi}} + k(x)\hat{d}) \right) \end{aligned} \quad (48)$$

Từ (40) và (48), ta cần thiết kế luật chỉnh định trọng số NN để  $\hat{W} \rightarrow W$ . Yêu cầu này sẽ thỏa nếu tối

thiểu được hàm sai số  $e_{\hat{H}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\hat{H}}^T \varepsilon_{\hat{H}}$ , với

$$\varepsilon_{\hat{H}} = \int_{t-T}^t \hat{H}(z, \hat{W}) d\tau \quad (49)$$

trong đó  $T > 0$ . Dựa vào thuật toán Levenberg-Marquardt, luật chỉnh định trọng số NN được đề xuất:

$$\dot{\hat{W}} = -\alpha \Delta \phi \left( \Delta \phi^T \hat{W} + \hat{r} \right) \quad (50)$$

trong đó  $\alpha > 0$  là tốc độ học và  $\Delta \phi$  và  $\hat{r}$  được định

nghĩa:

$$\begin{cases} \Delta \phi = \int_{t-T}^t \nabla \phi \left( f(x) + (h(x)\underline{v} - g(x)\underline{\psi} + k(x)d) \right) d\tau \\ = \int_{t-T}^t \nabla \phi \dot{z} d\tau = \phi(z(t)) - \phi(z(t-T)) \\ \hat{r} = \int_{t-T}^t \left( z^T Qz + \hat{\underline{v}}^T S\hat{\underline{v}} - U(\hat{\underline{\psi}}) - \gamma^2 \hat{d}^T \hat{d} \right) d\tau \end{cases} \quad (51)$$

Để bảo đảm  $\hat{W}$  hội tụ về  $W$  ta cần phải kích thích hệ thống bằng cách thêm nhiễu nhỏ (ông) vào tín hiệu điều khiển (điều kiện PE [19]). Tuy nhiên điều kiện này khó xác định online. Trong bài báo này, kỹ thuật học đồng thời (Concurrent Learning-CL) được sử dụng để giảm sự cần thiết phải dùng điều kiện PE. Trong CL dữ liệu quá khứ được thêm vào (50):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}} = & -\alpha \Delta \phi \left( \Delta \phi^T \hat{W} + \hat{r} \right) - \alpha \sum_{l=1}^P \Delta \phi_l \left( \Delta \phi_l^T \hat{W} + \hat{r}_l \right) \\ = & -\alpha \Delta \phi \left( \Delta \phi^T \hat{W} + \hat{r} \right) - \alpha \Delta \bar{\phi} \left( \Delta \bar{\phi}^T \hat{W} + \bar{r} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

trong đó  $\Delta \bar{\phi} = \{\Delta \phi_l\}_{l=1}^P$  và  $\bar{r} = \{\hat{r}_l\}_{l=1}^P$  là tập dữ liệu được lưu trữ tại các thời điểm trong quá khứ  $t_l$ ,  $l = 1, \dots, P$ ,  $\Delta \phi_l = \Delta \phi(z(t_l))$  và  $\hat{r}_l = \hat{r}(t_l)$ ,  $P$  là số lượng dữ liệu cần lưu trữ. Để ma trận  $\Delta \phi \Delta \phi^T$  xác định dương và không suy biến ta cần điều kiện sau:

**Điều kiện 1 [25]:**  $P$  véc tơ thành phần trong tập  $\Delta \bar{\phi} = \{\Delta \phi_l\}_{l=1}^P$  phải độc lập tuyến tính.

Để xác định thời điểm kích hoạt trạng thái cho (45) và (46), ta thiết kế luật kích hoạt:

$$\begin{aligned} E = & (1-\beta) \times \\ & \frac{(1-\eta) \lambda_{\min}(Q) \|z\|^2 + \lambda_{\min}(S) \|\hat{\underline{v}}\|^2 - U(\hat{\underline{\psi}}) - \gamma^2 \|\hat{d}\|^2}{\left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \lambda_{\min}(Q) + Y^2 \|\hat{W}\|^2} \end{aligned} \quad (53)$$

trong đó  $0 < \eta, \beta < 1$ ,  $\lambda_{\min}(X)$  là giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận  $X$ , và  $Y^2$  được định nghĩa ở phần chứng minh Định lý 1.  $\|E\|$  được gọi là ngưỡng. Chú ý chu kỳ kích hoạt mới sẽ bắt đầu khi sai số kích hoạt vượt quá ngưỡng cho phép, đó là  $\|e\| \geq \|E\|$ .

### 3.3 Chứng minh hội tụ và ổn định

Dựa vào các bước thiết kế nêu trên, ta dễ dàng xây dựng thuật toán điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện. Tính ổn định và hội tụ của thuật toán được chứng minh thông qua định lý sau đây:

**Định lý 1:** Xét hệ phi tuyến phản hồi nghiêm ngặt (1) chuyển sang hệ tương đương (20). Định nghĩa hàm đánh giá (32), luật điều khiển tối ưu kích hoạt sự kiện (45), luật tối ưu kích hoạt sự kiện loại bỏ ảnh

hường của vùng chết (46) và luật nhiễu ngoài xấu nhất kích hoạt thời gian (47). Định nghĩa luật cập nhật trọng số NN (52) và điều kiện kích hoạt (53).

Thuật toán điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện bảo đảm rằng: động học kín (20) ổn định tiệm cận và sai số NN bị chặn theo tiêu chuẩn UUB [26].

**Chứng minh:** Chọn hàm Lyapunov:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \quad (54)$$

trong đó

$$\begin{cases} L_1 = V^*(\underline{z}) \\ L_2 = \int_{t-T}^t V^*(z(\tau)) d\tau \\ L_3 = \frac{1}{2} \int_{t-T}^t \text{trace}(\tilde{W}^T \tilde{W}) d\tau \end{cases} \quad (55)$$

với  $V^*$  là hàm đánh giá tối ưu. Ta xét đạo hàm theo thời gian của (54) trong hai trường hợp: trong khoảng thời gian giữ mẫu và tại thời điểm kích hoạt.

Trường hợp 1:  $\dot{L}_1 = 0$  do  $V^*(\underline{z})$  là hằng số và

$$\dot{L}_2 = \int_{t-T}^t (\nabla V^*)^T \dot{z}(\tau) d\tau \quad (56)$$

Sử dụng (45) và (46) cho động học (26) ta có:

$$\dot{z} = f(x) + h(x)\hat{v} - g(x)\hat{\psi} + k(x)\hat{d} \quad (57)$$

Sử dụng (34)-(36) cho (33), rút số hạng  $(\nabla V^*)^T f(x)$  sau đó kết hợp với (57) ta có:

$$\dot{L}_2 = \int_{t-T}^t \dot{\tilde{L}}_2 d\tau \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}}_2 = & -z^T Qz - \underline{v}^{*T} S\underline{v}^* + U(\underline{\psi}^*) + \gamma^2 d^{*T} d^* \\ & - \nabla V^{*T} (h\underline{v}^* - g\underline{\psi}^* + k\hat{d}^*) \\ & + \nabla V^{*T} (h\underline{v} - g\underline{\psi} + k\hat{d}) \end{aligned} \quad (59)$$

Thay  $\underline{\psi}^*$  từ (35) vào (29) ta có

$$\begin{aligned} U(\underline{\psi}^*) = & 2\rho \tanh^{-T} \left( \frac{\underline{\psi}^*}{\rho} \right) R \underline{\psi}^* + \rho^2 \bar{R} \ln \left( \bar{1} - \frac{\underline{\psi}^{*2}}{\rho^2} \right) \\ = & (\nabla V^*)^T g \tanh \left( \frac{1}{2\rho} (b+c) R^{-1} g^T \nabla V^* \right) \\ & + \rho^2 \bar{R} \ln \left( \bar{1} - \tanh^2 \left( \frac{1}{2\rho} (b+c) R^{-1} g^T \nabla V^* \right) \right) \end{aligned} \quad (60)$$

trong đó  $\bar{R}$  là véc tơ hàng chứa các phần tử đường chéo của ma trận  $R$ , và  $\bar{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$  có kích thước

phù hợp để nhân. Từ đó  $\dot{\tilde{L}}_2$  có thể viết thành

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}}_2 = & -z^T Qz - \underline{v}^{*T} S\underline{v}^* + \gamma^2 d^{*T} d^* \\ & - \rho^2 \bar{R} \ln \left( \bar{1} - \tanh^2 \left( \underline{N}^* \right) \right) \\ & - \nabla V^{*T} (h\underline{v}^* + k\hat{d}^* + h\underline{v} - g\underline{\psi} + k\hat{d}) \end{aligned} \quad (61)$$

Ta biến đổi các số hạng trong (61) thành

$$\begin{aligned} \rho^2 \bar{R} \ln \left( \bar{1} - \tanh^2 \left( \underline{N}^* \right) \right) = & \int_{\underline{\psi}}^{\underline{\psi}^*} 2\rho \tanh^{-T} (s/\rho) R ds \\ & + U(\underline{\psi}) - \rho \nabla V^{*T} g \tanh \left( \underline{N}^* \right) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\nabla V^{*T} g \hat{\psi} = \int_{\underline{\psi}}^{\underline{\psi}^*} 2\rho \underline{N}^{*T} R ds \quad (63)$$

$$-\rho(b+c) \nabla V^{*T} g \tanh \left( \underline{N}^* \right) \quad (64)$$

$$k^T \nabla V^* = 2\gamma^2 d^* \quad (64)$$

$$2\gamma^2 d^{*T} \hat{d} - \gamma^2 d^{*T} d^* \leq \gamma^2 \hat{d}^T \hat{d} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} z^T Qz = & \underline{z}^T Q\underline{z} - 2\underline{z}^T Q\underline{e} + \underline{e}^T Q\underline{e} \\ \geq & (1-\eta) \underline{z}^T Q\underline{z} - \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \underline{e}^T Q\underline{e} \end{aligned} \quad (66)$$

$$g^T \nabla V^* = -2S\underline{v}^* \quad (67)$$

Thay (62)- (67) vào (61) ta có

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}}_2 \leq & -(1-\eta) \lambda_{\min}(Q) \|\underline{z}\|^2 + \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \lambda_{\min}(Q) \|\underline{e}\|^2 \\ & + \underline{v}^{*T} S\underline{v}^* - 2\underline{v}^{*T} S\underline{v} + U(\underline{\psi}) + \xi + \gamma^2 \|\hat{d}\|^2 \end{aligned} \quad (68)$$

trong đó  $\xi = \int_{\underline{\psi}}^{\underline{\psi}^*} 2\rho \left( \tanh^{-1}(s/\rho) + \underline{N}^* \right)^T R ds$ . Bằng

cách đổi biến  $s = -\rho \tanh(v)$ ,  $\xi$  có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} \xi \leq & \int_{\underline{N}}^{\underline{N}^*} 2\rho^2 (v - \underline{N}^*)^T R dv \\ = & \rho^2 \left( \underline{N}^* - \underline{N} \right)^T R \left( \underline{N}^* - \underline{N} \right) \leq \rho^2 \|R\| \|\underline{N}^* - \underline{N}\|^2 \end{aligned} \quad (69)$$

thay  $\nabla V^*(z)$  từ (38) vào  $\underline{N}^*$  (35) sau đó sử dụng  $\hat{N}$  (46), chú ý  $\tilde{W} = W - \hat{W}$  ta có

$$\begin{aligned} \xi \leq & \rho^2 \|R\| \left\| \frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) \hat{W} - \frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) \hat{W} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) (\tilde{W} + \nabla \varepsilon(z)) \right\|^2 \\ \leq & \frac{1}{2} \rho^2 \|R\| \|R^{-1}\|^2 \left( \left\| g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) - g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) \right\|^2 \|\hat{W}\|^2 \right. \\ & \left. + \left\| g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) (\tilde{W} + \nabla \varepsilon(z)) \right\|^2 \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Sử dụng Tính chất 1, Giả thiết 2 và 3, chú ý bất đẳng thức  $(ab - cd)^2 \leq 2a^2(b-d)^2 + 2d^2(a-c)^2$ , ta có

$$\begin{aligned} & \left\| g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) - g^T(x) \nabla \phi^T(\underline{z}) \right\|^2 \\ & \leq 2 \|g(x)\|^2 \|\nabla \phi(\underline{z}) - \nabla \phi(\underline{z})\|^2 \\ & \quad + 2 \|\nabla \phi(\underline{z})\|^2 \|g(x) - g(x)\|^2 \\ & \leq 2b_g^2 L_{\nabla \phi}^2 \|\underline{e}\|^2 + 4b_{\nabla \phi}^2 b_g^2 \end{aligned} \quad (71)$$

Thay (34), (37), (67) vào bất đẳng thức (71) để biến đổi các số hạng trong (68)

$$\begin{aligned} \underline{v}^{*T} S \underline{v}^* - 2 \underline{v}^{*T} S \hat{v} &\leq \left\| \sqrt{S^T} (\underline{v}^* - \hat{v}) \right\|^2 - \left\| \sqrt{S^T} \hat{v} \right\|^2 \\ &\leq \left\| S^{-1} \left[ b_h^2 L_{\bar{v}\phi}^2 \|\underline{e}\|^2 - \lambda_{\min}(S) \|\hat{v}\|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_1 \|\tilde{W}\|^2 + \mu_2 \|\tilde{W}\| + 2\bar{m}^2 b_g^2 b_{\bar{v}\phi}^2 \right] \right\|^2 \end{aligned} \quad (72)$$

trong đó  $\mu_1 = m^2 b_g^2 b_{\bar{v}\phi}^2 \|S^{-1}\|$ ,  $\mu_2 = \mu_1 b_{\bar{v}\phi}^2$ . Dựa vào (70)-(72) ta viết lại (68) như sau

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &\leq -(1-\eta) \lambda_{\min}(Q) \|\underline{z}\|^2 - \lambda_{\min}(S) \|\hat{v}\|^2 + U(\hat{v}) \\ &\quad + \gamma^2 \|\hat{d}\|^2 + \left( \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \lambda_{\min}(Q) + Y^2 \|\hat{W}\|^2 \right) \|\underline{e}\|^2 \\ &\quad + \mu_3 \|\tilde{W}\|^2 + \mu_4 \|\tilde{W}\| + \lambda_1 \end{aligned} \quad (73)$$

trong đó  $\mu_4 = \mu_3^2 b_{\bar{v}\phi}^2 (\|S^{-1}\| + \|R^{-1}\|)$ ,  $\lambda_1 = 2b_{\bar{v}\phi}^2 b_g^2 (m^2 + 1)$   
 $\mu_3 = \rho^2 b_{\bar{v}\phi}^2 b_g^2 (m^2 \|S^{-1}\| + \|R^{-1}\|)$ ,  $Y^2 = \rho^2 L_{\bar{v}\phi}^2 b_g^2 (m^2 \|S^{-1}\| + \|R^{-1}\|)$ .

Chú ý rằng  $R$  là ma trận chéo nên,  $\|R\| \|R^{-1}\| = 1$ .

Từ (52) động học sai số xấp xỉ NN có thể viết

$$\dot{\tilde{W}} = -\alpha \Delta \phi (\Delta \phi^T \tilde{W} - \varepsilon_H) - \alpha \sum_{l=1}^P \Delta \phi_l^T (\Delta \phi_l^T \tilde{W} - \varepsilon_H(t_l)) \quad (74)$$

trong đó  $\varepsilon_H(t_l) = \int_{t_l-T}^{t_l} \nabla \mathcal{E}^T \dot{z} d\tau$ . Đạo hàm  $L_3$  trong

(55) sử dụng (74) với  $\sup_{t_l > 0} \|\varepsilon_H(t_l)\| \leq b_{\varepsilon H}$

$$\dot{L}_3 = \int_{t-T}^t \left( -\alpha \tilde{W}^T \Pi \tilde{W} + \alpha \tilde{W}^T \left( \Delta \phi \varepsilon_H + \sum_{l=1}^P \Delta \phi_l \varepsilon_H(t_l) \right) \right) d\tau \quad (75)$$

trong đó  $\Pi = \Delta \phi \Delta \phi^T + \sum_{l=1}^P \Delta \phi_l \Delta \phi_l^T > 0$  (thỏa mãn điều kiện 1). Sử dụng bất đẳng thức Young ta có:

$$\dot{L}_3 \leq -(\alpha-1) \lambda_{\min}(\Pi) \int_{t-T}^t \|\tilde{W}\|^2 d\tau + \frac{\alpha^2}{4} (P+1) \int_{t-T}^t b_{\varepsilon H}^2 d\tau \quad (76)$$

Thay (76) và (68) vào (54) ta có:

$$\begin{aligned} \dot{L} &< \int_{t-T}^t \left[ -(1-\eta) \lambda_{\min}(Q) \|\underline{z}\|^2 - \lambda_{\min}(S) \|\hat{v}\|^2 + U(\hat{v}) \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 \|\hat{d}\|^2 + \left( \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \lambda_{\min}(Q) + Y^2 \|\hat{W}\|^2 \right) \|\underline{e}\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 - \mu_5 \left( \|\tilde{W}\| - \frac{\mu_6}{\mu_5} \right)^2 \right] d\tau \end{aligned} \quad (77)$$

trong đó  $\mu_5 = \alpha - \mu_3 - 1$ . Chọn  $\alpha > \mu_3 + 1$  thì  $\mu_5 > 0$ ,

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_6^2 \mu_5, \mu_6 = \frac{\alpha^2}{4} (P+1) b_{\varepsilon H}^2. \text{ Đặt}$$

$$b_{\tilde{W}} = \sqrt{\lambda_2 / \mu_5} + \mu_6 / \mu_5 \quad (78)$$

và sử dụng điều kiện kích hoạt (53) cho (76) ta có:

$$\begin{aligned} \dot{L} &< -\frac{1}{T} \beta \left( (1-\eta) \lambda_{\min}(Q) \|\underline{z}\|^2 + \lambda_{\min}(S) \|\hat{v}\|^2 \right. \\ &\quad \left. - U(\hat{v}) - \gamma^2 \|\hat{d}\|^2 \right) < 0, \forall t \end{aligned} \quad (79)$$

miễn là

$$\|\tilde{W}\| \geq b_{\tilde{W}} \quad (80)$$

Từ (79) và (80) ta thấy rằng nếu sai số xấp xỉ NN

$\tilde{W}$  vượt quá biên của tập đóng  $b_{\tilde{W}}$  thì  $\dot{L} < 0$  hệ kín ổn định và  $\tilde{W}$  bị kéo vào trong tập đóng. Hay nói cách khác  $\tilde{W}$  bị chặn theo tiêu chuẩn UUB [26].

Trường hợp 2: xét hệ thống tại thời điểm kích hoạt  $t = t_k, \forall k \in \mathbb{N}$ , lấy sai phân hàm Lyapunov (54):

$$\begin{aligned} \Delta L &= V^*(\underline{z}(t_k)) - V^*(\underline{z}(t_{k-1})) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} V^*(\underline{z}(t)) dt \\ &\quad - \int_{t_{k-1}}^{t_k} V^*(z(t^-)) dt + \frac{1}{2} \tilde{W}^T(t_k) \tilde{W}(t_k) \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{W}^T(t^-) \tilde{W}(t^-) \end{aligned} \quad (81)$$

Bởi vì  $\dot{L} < 0$  (77) và tính liên tục của cả trạng thái lẫn sai số xấp xỉ nên ta có

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} V^*(\underline{z}(t)) dt \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} V^*(z(t^-)) dt \quad (82)$$

$$\tilde{W}^T(t_k) \tilde{W}(t_k) \leq \tilde{W}^T(t^-) \tilde{W}(t^-) \quad (83)$$

Từ đó  $\Delta L$  được viết thành

$$\begin{aligned} \Delta L &\leq V^*(\underline{z}(t_k)) - V^*(\underline{z}(t_{k-1})) \\ &\leq V^*(z(t^-)) - V^*(\underline{z}(t_{k-1})) \\ &\leq -K^* \|z(t^-) - \underline{z}(t_{k-1})\| = -K^* \|\underline{e}(t_{k-1})\| \end{aligned} \quad (84)$$

trong đó  $K^*$  thuộc hàm lớp  $\kappa$ . Vì vậy hàm Lyapunov (54) tiếp tục suy giảm tại  $t = t_k, k \in \mathbb{N}$ .

Vậy kết hợp (54) và (84) ta thấy động học kín (26) ổn định tiệm cận. Ta có điều phải chứng minh.

#### 4. Ví dụ

Để kiểm chứng tính hiệu quả của thuật toán đề xuất, ví dụ mô phỏng điều khiển được giới thiệu trong phần này:

1. Hệ tuyến tính,
2. hệ thống Euler-Lagrange trong không gian biến khớp và
3. hệ phi tuyến dao động Van der Pol với ngõ vào ràng buộc bão hòa.

Chú ý: các hệ thống này chứa nhiễu ngoài, và động học nội không biết. Hệ thống 1 và 3 được so sánh với phương pháp điều khiển với chu kỳ lấy mẫu

cố định.

**4.1 Hệ tuyến tính**

Xét hệ tuyến tính  $\dot{x} = Ax + Bu + Kd$  sử dụng trong [27] như sau:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d \quad (85)$$

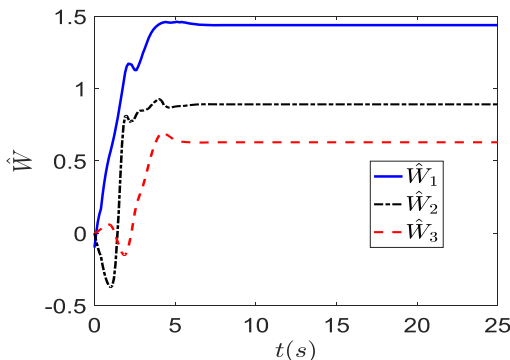
Nhằm so sánh với nghiệm xấp xỉ bởi thuật toán trong bài báo với nghiệm giải tích, chọn tham số của vùng chết trong mô phỏng  $b^l = b^r = 0, m^l = m^r = 1$ . Với  $h(x) = 0$ , phương trình (48) trở thành:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P + \frac{1}{\gamma^2} PKK^T P = 0 \quad (86)$$

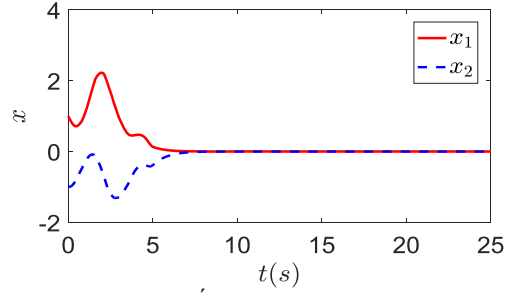
trong đó  $Q, R$  là các ma trận đơn vị,  $\gamma = 5$ . Nghiệm giải tích (Riccati) cho (86) là  $P = \begin{bmatrix} 1.4289 & 0.4428 \\ 0.4428 & 0.7010 \end{bmatrix}$ .

Giả sử ma trận  $A$  không biết, nghiệm (86) được xấp xỉ sử dụng thuật toán kích hoạt sự kiện. Chọn hàm tác động  $\phi(x) = [x_1^2 \ x_1 x_2 \ x_2^2]^T$ , thì véc tơ trọng số NN tối ưu là  $W^* = [1.4289 \ 0.8856 \ 0.7010]^T$ . Chu kỳ lấy mẫu và thời hằng tích phân được chọn  $T = 0.1s$ , hằng số học  $\alpha = 15$ . Nhiễu nhỏ được cộng vào tín hiệu điều khiển để kích thích trạng thái hệ thống trong giây đầu tiên. Kích thước chông dữ liệu cho CL là  $p = 20$ . Tham số của điều kiện kích hoạt (53) được chọn  $L = 2, \eta = 0.6$ .

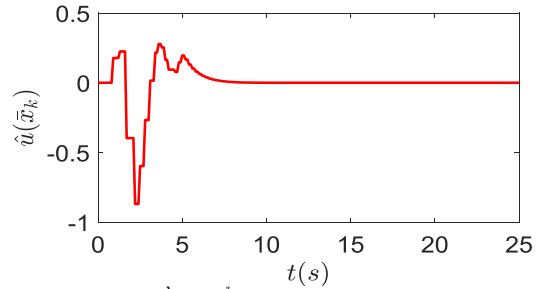
Hình 1 biểu diễn sự hội tụ trọng số NN bắt đầu từ giá trị khởi tạo zero đến giá trị tối ưu xấp xỉ  $\hat{W} = [1.4384 \ 0.8905 \ 0.7083]^T$ . Ta có thể nhận thấy rằng  $\hat{W}$  đã hội tụ xấp xỉ đến  $W^*$ . Trạng thái và tín hiệu điều khiển kích hoạt sự kiện được biểu diễn trên H. 2 và H. 3. Khi sai số kích hoạt  $\|e_k\|$  trên H. 4 vượt quá ngưỡng  $\|e_T\|$  mẫu mới sẽ được lấy và sai số kích hoạt sẽ trở về zero. Khi tham số NN hội tụ, ngưỡng  $e_T$  cũng giảm dần về gần zero. Hình 5 biểu diễn khoảng thời gian giữa hai lần kích hoạt với giá trị nhỏ nhất là  $\bar{\tau}_{k \min} = 0.2s$ . Chú ý rằng bộ điều khiển kích hoạt sự kiện chỉ có 105 lần cập nhật tham số so với 250 lần của bộ điều khiển lấy mẫu theo chu kỳ.



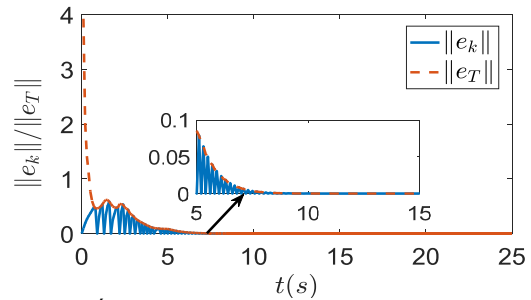
H. 1 Trọng số NN hội tụ đến giá trị tối ưu



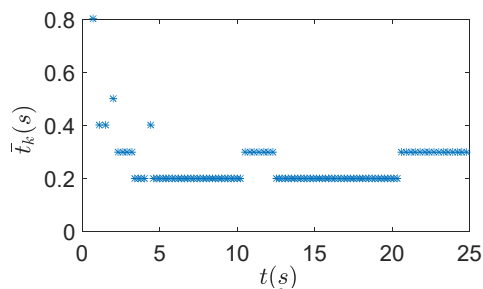
H. 2 Trạng thái hệ thống



H. 3 Tín hiệu điều khiển kích hoạt sự kiện



H. 4 Sai số và ngưỡng kích hoạt sự kiện



H. 5 Thời gian giữa hai lần kích hoạt

**4.2 Hệ Euler-Lagrange trong không gian biến khớp**

Xét lớp hệ thống Euler-Lagrange được biểu diễn dưới dạng hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt [28]:

$$\begin{cases} \dot{q} = g_q(q, \vartheta) \\ \dot{\vartheta} = f_\vartheta(q, \vartheta) + g_\vartheta(q, \vartheta)\tau + k_\vartheta(q, \vartheta)\bar{\tau}_d \end{cases} \quad (87)$$

với,  $\vartheta = [v, \omega]^T$  lần lượt là biến khớp và biến vận tốc trong hệ tọa độ suy rộng,  $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$  là ngõ vào điều khiển giả sử bị ràng buộc bởi vùng chết.  $\bar{\tau} = [\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2]^T$  là nhiễu ngoài.  $f_\vartheta(q, \vartheta)$  là hàm động học phi tuyến

tròn không biết trước,  $g_q(q)$ ,  $g_g(q, \vartheta)$  và  $k_g(q, \vartheta)$  là các hàm phi tuyến tròn thoả Giả thiết 1. (Các tham số của (87) xem trong [28]). Tham số vùng chết được chọn  $m = 1.2$  và  $b^l = b^r = 0.8$ ,  $\rho = 0.25$ .

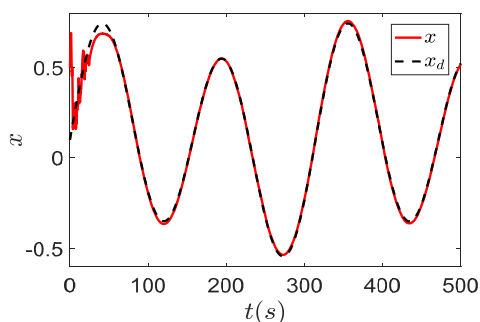
**Chú ý:** Mặc dù [28] xử lý hệ (87), tuy nhiên vùng chết chưa được xem xét và cơ chế kích hoạt sự kiện chưa được áp dụng.

Khởi tạo  $\hat{W}_1(0) = \hat{W}_2(0) = \dots = \hat{W}_{15}(0) = 0$ . Hàm  $\phi(x)$  được chọn là tổ hợp toàn phương của  $q$  và  $\mathcal{G}$  [28]. Khởi tạo  $q(0) = [0.5, -0.25, 0]^T$ ,  $\mathcal{G}(0) = 0$ ,  $\gamma = 5$ .

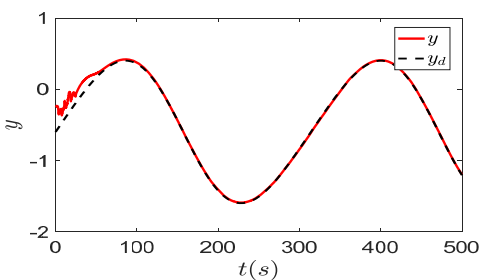
$\eta = \beta = 0.8$ . Quỹ đạo tham chiếu  $q_d = [x_d, y_d, \theta_d]^T$  với  $\dot{\theta}_d = \omega_d$ ,  $\dot{x}_d = v_d \cos(\theta_d)$ ,  $\dot{y}_d = v_d \sin(\theta_d)$ , trong đó

$$q_d = \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\cos^2 t + 4\cos^2(2t)} \\ (2\sin t \cos(2t) - 4\sin(2t) \cos t) / (\cos^2 t + 4\cos^2(2t)) \end{bmatrix}$$

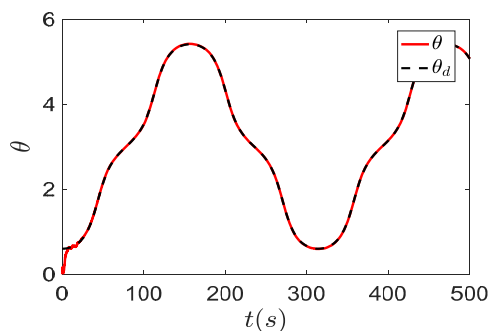
Bài toán đặt ra là thiết kế thuật toán điều khiển kích hoạt sự kiện để  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_d - q\| = 0$  và tối thiểu hàm đánh giá được định nghĩa theo phương trình (32).



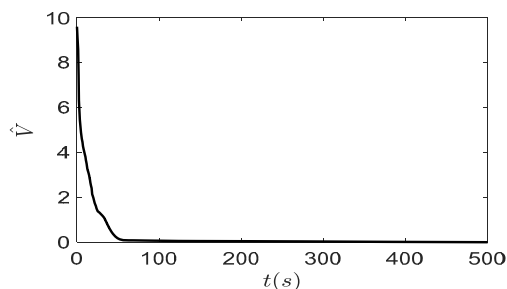
H. 6 Chất lượng bám x



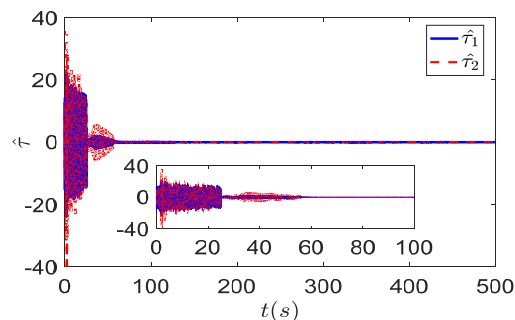
H. 7 Chất lượng bám y



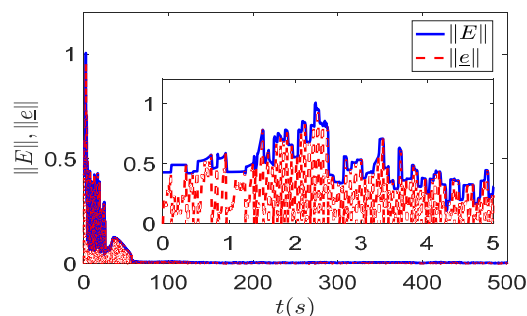
H. 8 Chất lượng bám theta



H. 9 Hàm chi phí xấp xỉ



H. 10 Tín hiệu điều khiển vùng chết



H. 11 Sai số kích hoạt và ngưỡng

Hình 6-8 biểu diễn chất lượng bám  $q$  theo  $q_d$  với chi phí giảm về giá trị cận tối ưu sau thời gian 60s (H. 9). Tín hiệu điều khiển sau vùng chết được biểu diễn trên H. 10. Có thể thấy rằng hiệu ứng vùng chết được loại bỏ triệt để sau khi tham số hệ thống hội tụ. Sai số kích hoạt và ngưỡng định nghĩa bởi (53) được trình bày trên H. 11. Ta thấy rằng, khi sai số kích hoạt vượt quá ngưỡng, sai số này trở về không và chu kỳ kích hoạt mới lại bắt đầu. Tổng số lần lấy mẫu là 2485 ít hơn so với 5000 lần lấy mẫu với phương pháp điều khiển theo chu kỳ lấy mẫu 0.1s. Chú ý rằng số lần lấy mẫu sẽ ít hơn nữa nếu điều chỉnh tham số  $\eta, \beta$  để có biên độ ngưỡng lớn hơn. Từ đó hiệu suất tính toán sẽ tăng lên. Tuy nhiên, cần phải cân bằng giữa số lần lấy mẫu và chất lượng điều khiển.

### 4.3 Mở rộng cho hệ phi tuyến ràng buộc bão hòa

Thuật toán đề xuất có thể mở rộng cho hệ phi tuyến affine ràng buộc bão hòa. Khi đó động học trong hệ thống (26) có  $\underline{v}^* = 0$  và ta bỏ qua luật điều khiển (45) và số hạng  $\underline{v}$  trong (53). Để kiểm chứng ta xét hệ

dao động Van der Pol [29] có nhiễu ngoài  $d(t)$  biểu diễn bởi hệ affine  $\dot{x} = f(x) + g(x)u + k(x)d$ , trong đó

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2(1-x_1^2) - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}; k(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(4x_1 - 1)x_2 \end{bmatrix}$$

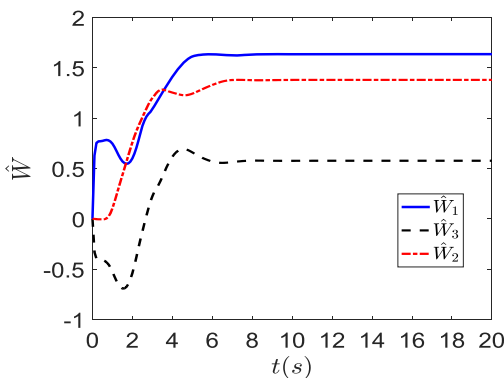
với ngõ vào điều khiển bị bão hòa với  $|\psi| < \rho = 0.1$ .

**Chú ý:** Cho dù hệ thống (88) không có nhiễu, nó vẫn có chu kỳ tới hạn không ổn định không điều khiển được và điểm cân bằng quanh gốc không ổn định [29].

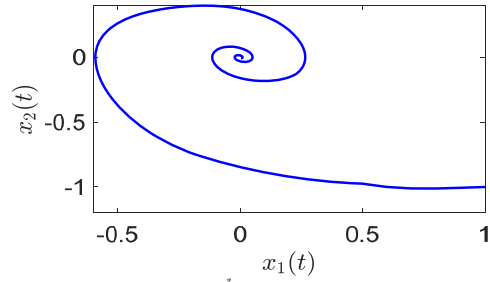
Chọn  $Q(x) = \|x\|^2$ ,  $R = 0.2$ ,  $\gamma = 5$ . Véc tơ trạng thái khởi tạo  $x(0) = [1 \ -1]^T$ ,  $W = [W_1 \ W_2 \ W_3]^T$  là trọng số NN được khởi tạo bằng zero. Hàm tác động chọn  $\phi(x) = [x_1^2 \ x_1x_2 \ x_2^2]^T$ , hệ số học  $\alpha = 125$ , tốc độ lấy mẫu được thiết lập 0.1s, thời hằng tích phân  $T = 0.1$  s. Kích thước chùng dữ liệu  $p = 20$ . Chọn nhiễu nhỏ kích thích hệ thống ban đầu khi chùng dữ liệu trống  $\chi = \sin^2(t)\cos(2t) + \sin^2(1.5t)\cos(0.1t) + \sin^2(-0.1t) \times \cos(2t) + \sin^5(t)$ . Nhiễu này bị loại ngay khi phép toán lấy hạng của chùng trả về giá trị 3. Tham số điều kiện kích hoạt (53) được chọn  $L = 0.5$ ,  $\eta = 0.25$ .

Hình 12 biểu diễn sự hội tụ của trọng số NN đến giá trị tối ưu sau 7s với  $\hat{W} = [1.6113 \ 0.5639 \ 1.3503]^T$ . Quỹ đạo mặt phẳng pha trên H. 13 cho thấy thuật toán đề xuất đã đưa được trạng thái của hệ kín về gốc. Trên H. 14, sai số kích hoạt  $\|e_k\|$  và ngưỡng  $\|e_T\|$  hội tụ về gần zero và sai số luôn nằm bên dưới biên độ ngưỡng. Khoảng thời gian giữa hai lần kích hoạt liên tiếp được biểu diễn trên H. 15, trong đó khoảng thời gian nhỏ nhất  $\bar{t}_{k \min} = 0.4$  s.

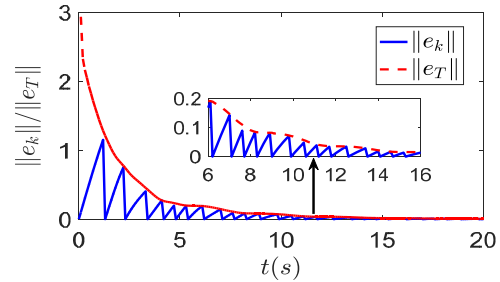
Nhằm so sánh chất lượng điều khiển khi tham số bộ điều khiển cập nhật theo sự kiện và theo chu kỳ lấy mẫu cố định, thuật toán điều khiển tối ưu  $H_\infty$  theo chu kỳ lấy mẫu cố định [27] được áp dụng. Cả hai thuật toán điều sử dụng trạng thái khởi tạo như nhau.



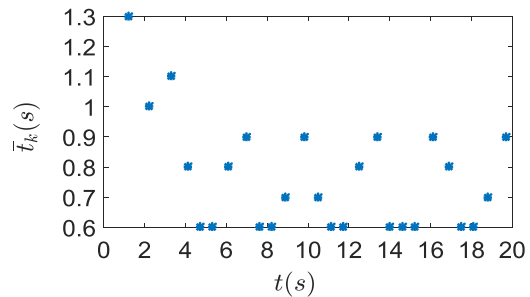
H. 12 Trọng số NN hội tụ đến giá trị tối ưu



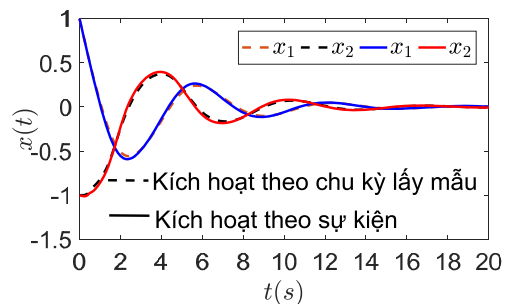
H. 13 Quỹ đạo mặt phẳng pha



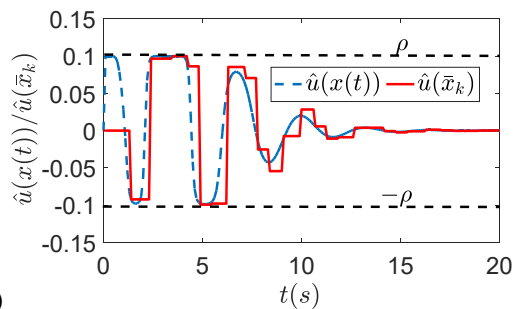
H. 14 Sai số và ngưỡng kích hoạt sự kiện



H. 15 Thời gian giữa hai lần kích hoạt

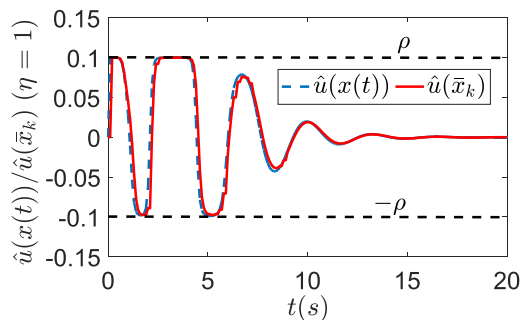


a)



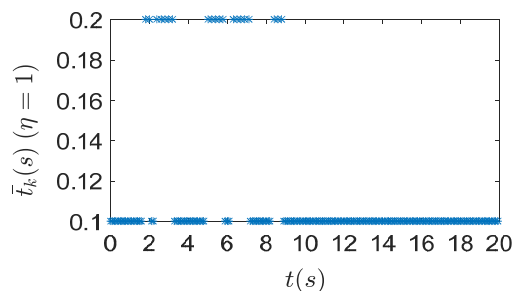
b)

H. 16 So sánh chất lượng điều khiển giữa bộ điều khiển kích hoạt sự kiện và chu kỳ lấy mẫu cố định: a) Quỹ đạo trạng thái; b) Tín hiệu điều khiển



H. 17 Tín hiệu điều khiển kích hoạt sự kiện với  $\eta = 1$

Quy đạo trạng và tín hiệu điều khiển của cả hai thuật toán được biểu diễn trên H. 16. Ta có thể thấy rằng hai thuật toán đều cung cấp tín hiệu điều khiển tối ưu  $H_\infty$  bị ràng buộc bão hòa khi đạt đến giới hạn lớn nhất và nhỏ nhất. Mặc dù tín hiệu điều khiển phát sinh bởi bộ điều khiển kích hoạt sự kiện không trơn như tín hiệu điều khiển phát sinh theo chu kỳ lấy mẫu cố định nhưng hiệu quả tính toán rất đáng quan tâm, đó là bộ điều khiển chỉ cập nhật có 27 lần (H. 15) so với 200 lần (chu kỳ lấy mẫu cố định 0.1s). Điều này sẽ đặc biệt có ý nghĩa hơn nữa khi áp dụng cho các ứng dụng với băng thông bị giới hạn và nguồn tài liệu chia sẻ.



H. 18 Thời gian giữa hai lần kích hoạt khi  $\eta = 1$

Tiếp theo để đánh giá sự ảnh hưởng của hệ số  $\eta$  đến chất lượng kích hoạt sự kiện, ta thay đổi  $\eta = 1$ . Quan sát điều kiện (53) ta thấy khi  $\eta = 1$  biên độ ngưỡng  $\|e_T\|$  nhỏ hơn và thời gian giữa hai lần cập nhật tham số bộ điều khiển sẽ tăng lên. Thật vậy, tín hiệu điều khiển kích hoạt sự kiện trên H. 17 gần với tín hiệu điều khiển theo chu kỳ lấy mẫu cố định. Tuy nhiên theo H. 18 điều bất lợi là số lần kích hoạt tăng lên đến 181 so với 27 khi  $\eta = 0.25$  (xem H. 15). Điều này sẽ làm tăng chi phí tính toán và truyền thông.

### 5. Kết luận

Bài báo cung cấp thuật toán điều khiển tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện cho hệ phi tuyến truyền ngược nghiêm ngặt với sự hiện diện vùng chết ngõ vào và nhiễu ngoài. Luật điều khiển truyền thẳng kích hoạt sự kiện được thiết kế để chuyển hệ phi tuyến phản hồi nghiêm ngặt sang hệ phi tuyến affine. Sau đó, luật điều khiển hồi tiếp tối ưu bền vững kích hoạt sự kiện được đề xuất để loại bỏ ảnh hưởng vùng chết và nhiễu

ngoài trong khi tối thiểu hàm chỉ tiêu chất lượng bám  $H_\infty$ .

Mặc dù thuật toán dựa vào kỹ thuật qui hoạch động thích nghi nhưng không sử dụng điều kiện kích thích và thủ tục nhận dạng hệ thống. Các ví dụ về điều khiển kích hoạt hệ tuyến tính, hệ thống Euler-Lagrange trong không gian biến khớp, hệ phi tuyến dao động Van der Pol với ràng buộc bão hòa ngõ vào cho thấy hiệu quả của thuật toán đề xuất. Thiết kế bộ điều khiển tối ưu kích hoạt sự kiện phân tán sẽ là hướng ưu tiên tiếp theo.

### Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.04-2019.25

### Tài liệu tham khảo

- [1] Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P (1995) *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York
- [2] Zhang T, Ge SS, Hang CC (2000) *Adaptive neural network control for strict-feedback nonlinear systems using backstepping design*. Automatica 36(12), pp. 1835-1846
- [3] Khalil HK (2002) *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall
- [4] Zargarzadeh H, Dierks T, Jagannathan S (2015) *Optimal control of nonlinear continuous-time systems in strict-feedback form*. IEEE Trans. on Neural Networks and Learning Systems 26(10), pp. 2535-2549
- [5] Sun K, Sui S, Tong S (2017) *Fuzzy adaptive decentralized optimal control for strict feedback nonlinear large-scale systems*. IEEE Trans. on Cybernetics 48(4), pp. 1326-1339
- [6] Tan LN (2017) *Distributed optimal integrated tracking control for separate kinematic and dynamic uncertain non-holonomic mobile mechanical multi-agent systems*. IET Control Theory and Applications 11(18), pp. 3249-3260
- [7] Tan LN (2018) *Omnidirectional vision-based distributed optimal tracking control for mobile multi-robot systems with kinematic and dynamic disturbance rejection*. IEEE Trans. on Industrial Electronics 65(7), pp. 5693-5703
- [8] Tan LN (2018) *Distributed  $H_\infty$  optimal tracking control for strict-feedback nonlinear large-scale systems with disturbances and saturating actuators*. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, pp. 1-13
- [9] Sun J, Liu C (2018) *Distributed Zero-sum Differential Game for Multi-agent Systems in Strict-feedback Form with Input Saturation and Output Constraint*. Neural Network 106, pp. 8-19
- [10] Basar T, Bernhard P (1995)  *$H_\infty$ -optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach*. Birkhäuser

- [11] Vamvoudakis KG, Miranda MF, Hespanha JP (2016) *Asymptotically stable adaptive-optimal control algorithm with saturating actuators and relaxed persistence of excitation*. IEEE Trans. on Neural Networks and Learning Systems 27(11) pp. 2386-2398
- [12] He W, David AO, Yin Z, Sun C (2016) *Neural network control of a robotic manipulator with input deadzone and output constraint*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics: Systems 46(6), pp. 759-770
- [13] Selmic RR, Lewis FL (2000) *Deadzone compensation in motion control systems using neural networks*. IEEE Trans. on Automatic Control 45(4), pp. 602-613
- [14] Narayanan V, Jagannathan S (2018) *Event-triggered distributed control of nonlinear interconnected systems using online reinforcement learning with exploration*. IEEE Trans. on Cybernetics 48(9), pp. 1-14
- [15] Zhu Y, Zhao D, He H, Ji J (2017) *Event-triggered optimal control for partially unknown constrained-input systems via adaptive dynamic programming*. IEEE Trans. on Industrial Electronics 64(5), pp. 4101-4109
- [16] Tabuada, P (2007) *Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks*. IEEE Trans. on Automatic Control 52(9), pp. 1680-1685
- [17] Zhang Q, Zhao D, Zhu Y (2017) *Event triggered  $H_\infty$  control for continuous time nonlinear system via concurrent learning*. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Systems 47(7) pp. 1071-1081
- [18] Mu C, Wang K (2018) *Approximate-optimal control algorithm for constrained zero-sum differential games through event triggering mechanism*. Nonlinear Dynamics. doi: 10.1007/s11071-018-4713-0
- [19] Ioannou P, Fidan B (2006) *Adaptive control tutorial (Advances in Design and Control)*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 3600 University City Science Center, Philadelphia, PA 19104-2688
- [20] Zhou Q, Zhao S, Li H, Lu R, Wu C (2018) *Adaptive neural network tracking control for robotic manipulators with dead zone*. IEEE Trans. on Neural Networks and Learning Systems, DOI: 10.1109/TNNLS.2018.2869375
- [21] Tan Y, Dong R, Li R (2009) *Recursive identification of sandwich systems with dead zone and application*. IEEE Trans. on Control Systems Technology 17(4), pp. 945-951
- [22] Jiao Q, Modares H, Xu S., Lewis F, Vamvoudakis, KG (2016) *Multi-agent zero-sum differential graphical games for disturbance rejection in distributed control*. Automatica 69, pp. 24-34
- [23] Abu-Khalaf M, Lewis FL (2005) *Nearly optimal control laws for nonlinear systems with saturating actuators using a neural network HJB approach*. Automatica 41(5), pp. 779-791
- [24] Hornik K, Stinchcombe M, White H (1990) *Universal approximation of an unknown mapping and its derivatives using multilayer feedforward networks*. Neural Networks 3(5), pp. 551-560
- [25] Chowdhary G, Johnson E (2010) *Concurrent learning for convergence in adaptive control without persistency of excitation*. In: 49th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC), pp. 3674-3679
- [26] Lewis FL, Jagannathan S, Yesildirek A (1999) *Neural network control of robot manipulators and nonlinear systems*. Taylor and Francis, Philadelphia, PA
- [27] Modares, H, Lewis, FL, Naghibi-Sistani, MB (2012) *Online solution of nonquadratic two-player zero-sum games arising in the  $H_\infty$  control of constrained input systems*. Intern. Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 28 (3-5), pp. 232-254
- [28] Luy NT, Thanh NT, & Tri HM (2014) *Reinforcement learning-based intelligent tracking control for wheeled mobile robot*. Trans. of the Institute of Measurement and Control 36(7), pp. 868-877
- [29] Vamvoudakis KG, Miranda MF, Hespanha JP (2016) *Asymptotically stable adaptive-optimal control algorithm with saturating actuators and relaxed persistence of excitation*. IEEE Trans. on Neural Networks and Learning Systems, 27(11), pp. 2386-2398