

Thiết kế các bộ điều khiển cho con lắc ngược quay

Design of controllers for the rotary inverted pendulum

Nguyễn Thu Hà*, Nguyễn Công Anh

Trường Điện - Điện tử, Đại học Bách Khoa Hà Nội
*Corresponding author E-mail: ha.nguyenthu3@hust.edu.vn
DOI: <https://doi.org/10.64032/mca.v29i2.303>

Abstract

The rotary inverted pendulum is a typical nonlinear control system widely studied in the field of automatic control, and is commonly used to test and evaluate various control algorithms. Due to its inherent instability and strong nonlinearity, controlling this system presents significant challenges, requiring effective control strategies to maintain the pendulum in the upright equilibrium position. Numerous control methods have been applied to this system, including classical algorithms such as PID, state feedback, and Linear Quadratic Regulator (LQR), as well as modern approaches like fuzzy control and model predictive control (MPC). This study focuses on the design, simulation, and performance comparison of two primary controllers: LQR and fuzzy PID. The control algorithms are validated through MATLAB Simulink simulations and real-time experiments using the Quanser QUBE-Servo 2 module. Evaluation criteria include stability, adaptability, and sensitivity to disturbances. The results show that the LQR controller delivers high performance with minimal oscillations and a short settling time, while the fuzzy PID controller demonstrates better adaptability to varying environmental conditions and unexpected disturbances.

Keywords: Rotary inverted pendulum; LQR; Fuzzy logic control; MATLAB Simulink; Quanser QUBE-Servo2.

Bảng các ký hiệu

Ký hiệu	Đơn vị	Mô tả
L_p	m	Chiều dài thanh con lắc
m_p	kg	Khối lượng thanh con lắc
r	m	Chiều dài cánh tay quay
m_r	kg	Khối lượng cánh tay quay
K_t	Nm/A	Hằng số mômen của động cơ
K_m	Vs/rad	Hằng số sức điện động của động cơ
V_m	V	Điện áp cấp cho động cơ DC
R_m	Ω	Điện trở phản ứng của động cơ
L_m	H	Điện cảm của rotor động cơ
b_r	Nms/rad	Hệ số ma sát tương đương của cánh tay quay
b_p	Nms/rad	Hệ số ma sát tương đương của con lắc
θ	rad	Góc quay của cánh tay quay
α	rad	Góc quay của con lắc

Từ viết tắt

LQR	Linear Quadratic Regulator
MPC	Model Predictive Control
PID	Proportional-Integral-Derivative

Tóm tắt

Hệ con lắc ngược quay là một hệ thống điều khiển phi tuyến điển hình trong nghiên cứu điều khiển tự động, thường được

sử dụng để kiểm tra và đánh giá các thuật toán điều khiển khác nhau. Do đặc tính không ổn định và phi tuyến mạnh, việc điều khiển hệ thống này đặt ra nhiều thách thức, đòi hỏi các chiến lược điều khiển hiệu quả nhằm duy trì con lắc ở vị trí cân bằng thẳng đứng. Nhiều phương pháp điều khiển đã được áp dụng cho hệ thống này, bao gồm các thuật toán kinh điển như PID, phản hồi trạng thái và điều khiển tối ưu tuyến tính (LQR), cũng như các phương pháp hiện đại như điều khiển mờ và điều khiển dự báo mô hình. Nghiên cứu này tập trung vào việc thiết kế, mô phỏng và so sánh chất lượng của hai bộ điều khiển chính: LQR và PID mờ. Các thuật toán điều khiển được kiểm chứng thông qua mô phỏng bằng MATLAB Simulink và thực nghiệm thời gian thực trên mô-đun Quanser QUBE-Servo2. Các tiêu chí đánh giá bao gồm độ ổn định, khả năng thích nghi và độ nhạy với nhiễu. Kết quả cho thấy bộ điều khiển LQR mang lại hiệu năng cao với dao động nhỏ và thời gian ổn định ngắn, trong khi bộ điều khiển PID mờ thể hiện khả năng thích nghi tốt hơn với điều kiện môi trường thay đổi và các nhiễu loạn không mong muốn.

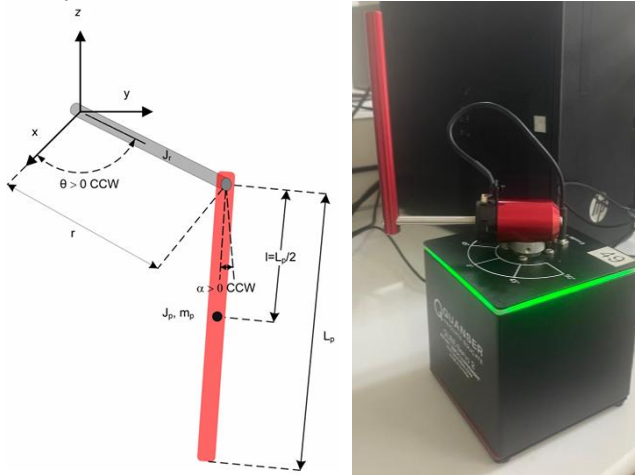
1. Giới thiệu

Con lắc ngược là một bài toán kinh điển trong lĩnh vực điều khiển, đại diện cho hệ phi tuyến và luôn ở trạng thái mất ổn định. Việc nghiên cứu điều khiển con lắc ngược không chỉ mang ý nghĩa học thuật mà còn ứng dụng trong nhiều hệ thống thực tế như robot hai chân, xe tự cân bằng [1][2]. Trong những năm qua, nhiều phương pháp điều khiển đã được đề xuất để ổn định con lắc ngược như bộ điều khiển LQR [3], PID kinh điển [4], điều khiển mờ [5], [6], trượt [7], kết hợp điều khiển mờ và điều khiển trượt [8], và điều khiển dự báo (MPC) [9]. Bài báo trình bày mô hình toán học của hệ con lắc ngược quay,

tiếp theo là quá trình thiết kế và đánh giá chất lượng của các bộ điều khiển được đề xuất là bộ điều khiển LQR và PID mờ bằng mô phỏng và thực nghiệm. Phương pháp LQR cho phép thiết kế bộ điều khiển tuyến tính tối ưu bằng cách tối thiểu hóa một hàm chi phí bậc hai, còn điều khiển PID mờ có ưu điểm trong xử lý phi tuyến và dễ triển khai khi mô hình hệ thống không hoàn toàn chính xác [10][11]. Các công trình trước đây đã triển khai các thuật toán nêu trên chủ yếu trong môi trường mô phỏng hoặc trên các mô hình thực nghiệm tự thiết kế. Mô hình thực nghiệm được sử dụng trong bài báo này là mô hình con lắc ngược quay QUBE-Servo2 của hãng Quanser, đây là một thiết bị chuẩn hóa và được sử dụng rộng rãi trong các phòng thí nghiệm điều khiển trên toàn thế giới [12].

2. Mô hình toán học của con lắc ngược quay

Hệ con lắc ngược quay bao gồm một thanh dài L_p đồng chất có khối lượng m_p , gắn trên một đầu thanh nằm ngang dài r , có khối lượng là m_r , đầu còn lại của thanh gắn với trục động cơ DC đặt thẳng đứng. Góc quay của cánh tay tròn trên mặt phẳng ngang được ký hiệu là θ , trong khi góc quay của con lắc quanh phương thẳng đứng là α . Toàn hệ được đặt trong hệ trục $Oxyz$ như Hình 1.



Hình 1. Hệ con lắc ngược quay.

Phương trình động lực học cho hệ con lắc ngược quay được xác định bằng nguyên lý Euler-Lagrange:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - P(q(t)) \quad (1)$$

Với K là động năng của hệ, phụ thuộc vào cả vị trí $q(t)$ và tốc độ $\dot{q}(t)$ của hệ, P là thế năng của hệ và chỉ phụ thuộc vào vị trí của hệ. Như vậy để xây dựng mô hình toán học cho hệ con lắc ngược quay, ta cần tính thế năng P và động năng K của hệ và mô hình hóa cho cả động cơ DC để tính mô men τ .

Ta có phương trình vi tích phân cho động cơ DC theo định luật Kirchoff:

$$V_m - R_m i_m - L_m \frac{di_m}{dt} - K_m \dot{\theta} = 0 \quad (2)$$

Giả sử độ tự cảm của động cơ L_m rất bé so với điện trở R_m , khi đó ta có thể bỏ qua thành phần điện cảm, mặt khác, ta lại có $\tau = K_t i_m$ hay $i_m = \frac{\tau}{K_t}$, thay vào (2)

ta được:

$$\tau = \frac{K_t}{R_m} (V_m - K_m \dot{\theta}) \quad (3)$$

2.1. Mô hình cho hệ cánh tay và con lắc ngược

Trước tiên ta cần xác định các tọa độ và tốc độ góc cho hệ. Đặt các hệ trục tọa độ lên cánh tay và con lắc như Hình 1 Trọng tâm con lắc nằm ở chính giữa thanh, cách cánh tay quay một khoảng $l = \frac{L_p}{2}$, tọa độ của trọng tâm con lắc theo hệ tọa độ $Oxyz$ là:

$$\begin{cases} OG_x = r \cos(\theta) - l \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ OG_y = r \sin(\theta) + l \sin(\alpha) \cos(\theta) \\ OG_z = l \cos(\alpha) \end{cases} \quad (4)$$

Do cánh tay quay chỉ quay theo phương ngang nên thế năng của hệ chỉ phụ thuộc vào độ cao của trọng tâm con lắc. Chọn mốc thế năng tại vị trí mà trọng tâm con lắc xuống thấp nhất ($\alpha = 0, z = -l$), ta có:

$$P = m_p g h = m_p g l (1 - \cos(\alpha)) \quad (5)$$

Động năng của hệ bao gồm động năng của cánh tay tròn quay và động năng của thanh con lắc. Trong đó, chuyển động của con lắc bao gồm cả chuyển động quay quanh khớp nối và chuyển động tịnh tiến do bị kéo theo quỹ đạo tròn của cánh tay tròn. Do đó, tổng động năng của hệ được tính bởi:

$$K = K_r + K_p \quad (6)$$

Trong đó:

K_r là động năng của cánh tay quay:

$$K_r = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \quad (7)$$

K_p là động năng của con lắc, bao gồm động năng quay quanh trục của chính nó và động năng tịnh tiến do chuyển động cùng với cánh tay:

$$K_p = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_p (r^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\alpha) + 2m_p r l \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos(\alpha)) \quad (8)$$

Với J_r, J_p lần lượt là mô men quán tính tương đương của tay quay và con lắc; J_r được tính từ trục quay động cơ đến đầu cánh tay, con J_p được tính từ đầu tay quay đến tâm con lắc:

$$\begin{cases} J_r = \frac{1}{3} m_r r^2 \\ J_p = \frac{1}{3} m_p l^2 \end{cases} \quad (9)$$

Ta có thể viết lại dưới dạng ma trận, ta được phương trình động học cho hệ con lắc ngược quay:

$$M_1[\ddot{\theta} \ \ddot{\alpha}]^T + M_2[\dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T + M_3 = M_4 u \quad (10)$$

Tín hiệu điều khiển u là điện áp đặt vào động cơ V_m , các ma trận M_1, M_2, M_3, M_4 được xác định bởi:

$$M_1 = \begin{bmatrix} J_r + m_p r^2 + m_p l^2 \sin^2(\alpha) & m_p r l \cos(\alpha) \\ m_p r l \cos(\alpha) & J_p + m_p l^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} b_r + m_p l^2 \sin(2\alpha) \dot{\alpha} + \frac{K_t K_m}{R_m} & -m_p r l \sin(\alpha) \dot{\alpha} \\ -\frac{1}{2} m_p l^2 \sin(2\alpha) \dot{\theta} & b_p \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{R_m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Giải phương ta thu được nghiệm có dạng:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = M_1^{-1} \left(-M_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} - M_3 + M_4 u \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} H \left(-M_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} - M_3 + M_4 u \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Ở đây,

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(M_1) \\ &= J_r J_p + J_r m_p l^2 + J_p m_p r^2 + J_p m_p l^2 \sin^2(\alpha) \\ &\quad + m_p^2 l^4 \sin^2(\alpha) - m_p^2 r^2 l^2 \cos^2(\alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

$$H = \begin{bmatrix} J_p + m_p l^2 & -m_p r l \cos(\alpha) \\ -m_p r l \cos(\alpha) & J_r + m_p r^2 + m_p l^2 \sin^2(\alpha) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Nghiệm giải từ phương trình vi phân (15) chính là mô hình động học cho hệ con lắc ngược quay.

2.2. Mô hình tuyến tính

Từ mô hình phi tuyến (15), đặt biến trạng thái của hệ thống $x = [q \ \dot{q}]^T = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$, khi đó:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M_1^{-1}(-M_2 \dot{q} - M_3 + M_4 u) \end{bmatrix} \\ &\triangleq F(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Khi hệ ổn định quanh vị trí cao nhất của con lắc ($x = x_0 = [0 \ \pi \ 0 \ 0]^T$, $u = u_0 = 0$), sử dụng khai triển chuỗi Taylor để tuyến tính hóa mô hình quanh điểm làm việc. Với biến trạng thái:

$$\hat{x} = x - x_0 = [\theta \ (\alpha - \pi) \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$$

Biến đầu ra $y = [\theta \ \alpha]^T$ và tín hiệu điều khiển $\hat{u} = u = V_m$, ta có mô hình không gian trạng thái tại lân cận điểm $x = x_0 = [0 \ \pi \ 0 \ 0]^T$ hay $\hat{x} = \hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ là:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u} \\ y = C\hat{x} + D \end{cases} \quad (19)$$

Với A, B, C, D là những ma trận tuyến tính được biểu diễn theo các công thức sau:

$$A = \begin{bmatrix} \Theta & I \\ -M_1^{-1} \frac{\partial M_3}{\partial q} & -M_1^{-1} M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (20)$$

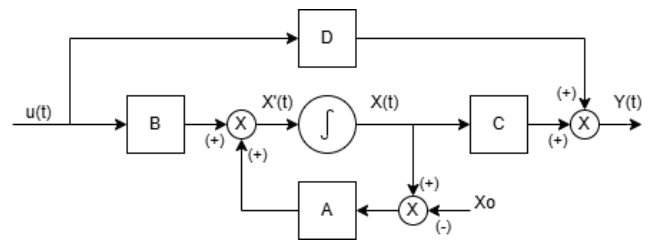
$$B = \begin{bmatrix} \Theta \\ M_1^{-1} M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{m_p^2 g r l^2}{\Delta_0}; \\ A_{33} &= \frac{-(J_p + m_p l^2) \left(b_r + \frac{K_t K_m}{R_m} \right)}{\Delta_0} \\ A_{34} &= \frac{-m_p r l b_p}{\Delta_0}; A_{42} = \frac{m_p g l (J_r + m_p r^2)}{\Delta_0} \\ A_{43} &= \frac{-m_p r l \left(b_r + \frac{K_t K_m}{R_m} \right)}{\Delta_0}; \\ A_{44} &= \frac{-b_p (J_r + m_p r^2)}{\Delta_0}; B_3 = \frac{\frac{K_t}{R_m} (J_p + m_p l^2)}{\Delta_0}; \\ B_4 &= \frac{\frac{K_t}{R_m} m_p r l}{\Delta_0}; \Delta_0 = J_r J_p + J_r m_p l^2 + J_p m_p r^2 \end{aligned}$$

Sơ đồ khối mô hình không gian trạng thái của hệ được thể hiện trong Hình 2.



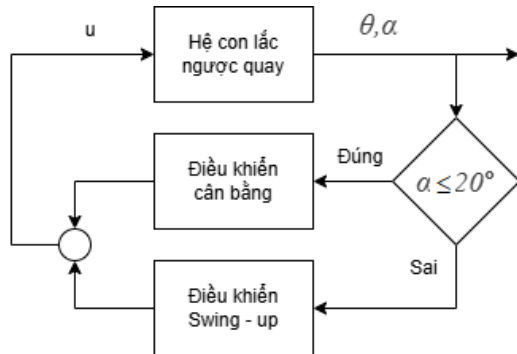
Hình 2. Sơ đồ khối mô hình không gian trạng thái.

3. Thiết kế bộ điều khiển cho con lắc ngược quay

Bộ điều khiển con lắc được chia thành hai phần giai đoạn là giai đoạn tăng năng lượng (Swing-up) và giai đoạn ổn định (Stablization):

- Giai đoạn Swing-up: Trong giai đoạn này, bộ điều khiển sẽ tập trung làm tăng năng lượng của con lắc (tổng động năng và thế năng) đến mức năng lượng tham chiếu bằng cách cung cấp mô men lực tác động vào hệ.

- Giai đoạn ổn định: Khi con lắc đến gần vị trí cân bằng (góc nghiêng so với phương thẳng đứng $\leq 20^\circ$), bộ điều khiển Swing-up được chuyển sang một bộ điều khiển cân bằng ổn định như LQR, PID mờ.
- Nguyên lý hoạt động của thuật toán có thể mô tả qua sơ đồ Hình 3.



Hình 3. Sơ đồ cấu trúc điều khiển Swing-up cho hệ con lắc ngược.

Bộ điều khiển Swing-up đóng vai trò đưa con lắc từ trạng thái thấp nhất lên gần vị trí cân bằng không ổn định. Trong mô phỏng, ngưỡng chuyển mạch giữa chế độ Swing-up và cân bằng được đặt tại $\alpha \leq 20^\circ$, đây là giới hạn giúp đảm bảo con lắc đã đạt đủ năng lượng để chuyển sang giai đoạn cân bằng.

Trong các nghiên cứu gần đây, một hướng tiếp cận mới là sử dụng **bộ chuyển mạch mờ**, trong đó tỷ lệ đóng góp giữa Swing-up và cân bằng (LQR hoặc PID mờ) được điều chỉnh mượt dựa trên góc α và tốc độ góc của con lắc. Cách này giúp giảm rung lắc tại biên giới chuyển đổi và cải thiện khả năng thích nghi với nhiễu. Đây là một hướng nghiên cứu mở tiềm năng có thể triển khai trong tương lai.

3.1. Thiết kế bộ điều khiển Swing Up

Để đưa con lắc từ vị trí treo xuống lên vị trí thẳng đứng, nhiều chiến lược điều khiển đã được nghiên cứu và áp dụng. Một trong những phương pháp phổ biến là điều khiển năng lượng, trong đó năng lượng toàn phần của con lắc được điều chỉnh để đạt giá trị tương ứng với trạng thái cân bằng thẳng đứng. Phương pháp này được trình bày chi tiết trong nghiên cứu của Åström [13][14]. Trong một nghiên cứu khác, Wiklund, Kristenson và Åström đã giới thiệu một chiến lược mới để đưa con lắc lên vị trí thẳng đứng bằng cách sử dụng phản hồi để điều khiển năng lượng của con lắc, đặt giá trị tham chiếu cho năng lượng tiềm năng tương ứng với vị trí thẳng [15]. Đối với con lắc ngược quay (rotary inverted pendulum), Sukontanakarn và Parnichkun đã phát triển một hệ thống điều khiển tối ưu thời gian thực, sử dụng mô hình cơ học dựa trên phương pháp Euler-Lagrange và thiết kế thuật toán điều khiển để tự động và cân bằng con [16]. Quy ước góc quay thanh con lắc $\alpha > 0$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, mốc thế năng tại vị trí thấp nhất của con lắc ($\alpha = 0, z = -l$) phương trình động lực học của con lắc dựa trên cân bằng mômen lực là:

$$J_p \ddot{\alpha} + m_p g l \sin(\alpha) + m_p u l \cos(\alpha) = 0 \quad (23)$$

Năng lượng toàn phần:

$$E = K_\omega + P = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + m_p g l (1 - \cos(\alpha)) \quad (24)$$

Phương trình (24) cho thấy sự biến thiên của năng lượng con lắc tỷ lệ với gia tốc kích thích từ cánh tay, do đó có thể điều khiển năng lượng của con lắc đến giá trị mong muốn E_r bằng bộ điều khiển tỷ lệ k :

$$u = k(E - E_r) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (25)$$

Trong đó, k là tín hiệu điều khiển và có thể điều chỉnh, giá trị năng lượng mong muốn E_r được chọn tương ứng với vị trí mà con lắc nằm trong khoảng $|\alpha - \pi| \leq 20^\circ$ so với vị trí cao nhất. Ta định nghĩa hàm Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} (E - E_r)^2 \quad (26)$$

Đạo hàm Lyapunov ta có:

$$\dot{V} = (E - E_r) \dot{E} = -m_p l \cos(\alpha) \dot{\alpha} (E - E_r) u \quad (27)$$

Thay bộ điều khiển (25) vào (27) thì

$$\dot{V} = -k m_p l (E - E_r)^2 \cos^2(\alpha) \dot{\alpha}^2 \quad (28)$$

$\dot{V} < 0$ khi $\cos(\alpha) \dot{\alpha} \neq 0$, nhưng do con lắc không thể đứng yên tại $\alpha = \pm 90^\circ$ nên bộ điều khiển vẫn có thể đưa năng lượng đạt giá trị mong muốn E_r . Để năng lượng thay đổi nhanh hơn ta có thể sử dụng hàm $\text{sign}(\cos(\alpha) \dot{\alpha})$ thay cho $\cos(\alpha) \dot{\alpha}$. Luật điều khiển (25) trở thành:

$$u = k(E - E_r) \text{sign}(\cos(\alpha) \dot{\alpha}) \quad (29)$$

Tuy nhiên, hàm dấu có thể gây ra hiện tượng rung (chattering) khi tín hiệu đổi dấu với tần số cao, ta có thể làm giảm hiệu ứng này với hàm bão hòa sat :

$$u = \text{sat}_{u_{\max}}(k(E - E_r) \text{sign}(\cos(\alpha) \dot{\alpha})) \quad (30)$$

Điều khiển bão hòa giúp thay đổi chậm khi sai lệch nhỏ và nhanh khi sai lệch lớn. Khi con lắc đứng yên ($\dot{\alpha} = 0$), cần kích thích ban đầu để bắt đầu điều khiển Swing-up.

3.2. Thiết kế bộ điều khiển cân bằng cho con lắc ngược quay

3.2.1. Bộ điều khiển tối ưu LQR

LQR là thuật toán phản hồi trạng thái tối ưu, tìm ma trận K để tối ưu chỉ tiêu chất lượng J . Mô hình hệ trong không gian trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (31)$$

Trong đó, $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T, y = [\theta \ \alpha]^T, u = V_m$, các ma trận A, B, C, D được xác định theo.

Chọn bộ điều khiển phản hồi trạng thái $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$, ta có luật điều khiển:

$$u = -Kx \tag{32}$$

Hàm mục tiêu cần tối ưu:

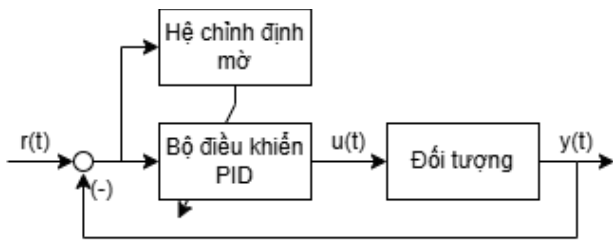
$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T (Q + K^T R K) x dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T S x dt \end{aligned} \tag{33}$$

Bộ điều khiển tối ưu được xác định bởi phương trình Riccati:

$$PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P = Q \tag{34}$$

3.2.2. Bộ điều khiển PID mờ

Hệ mờ cải thiện độ chính xác điều khiển mà không cần điều chỉnh trực tiếp tham số PID [17]. Sơ đồ hệ thống điều khiển sử dụng bộ PID mờ thể hiện trên Hình 1.



Hình 4. Sơ đồ bộ điều khiển PID mờ

Bộ điều khiển PID mờ là một bộ điều khiển mờ lai trong đó bộ điều khiển không trực tiếp tạo ra tín hiệu điều khiển mà nó phân tích các tính chất của sai lệch đầu vào và từ đó đưa ra chiến lược điều khiển cho bộ PID. Xét tín hiệu điều khiển của một bộ PID:

$$u(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \dot{e}(t) \right) \tag{35}$$

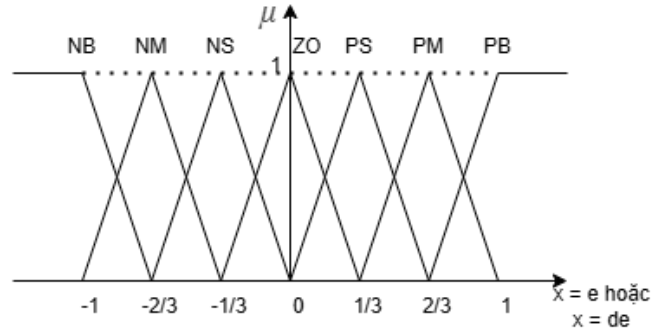
Khi đó, đầu vào của hệ mờ là sai lệch $e(t)$ và đạo hàm sai lệch $\dot{e}(t)$ và đầu ra của hệ mờ là các thông số P và D của bộ điều khiển. Khi các thông số P và D của bộ điều khiển được chỉnh định trong khoảng $[k_{p,min}, k_{p,max}], [k_{d,min}, k_{d,max}]$, để dễ mờ hóa các đầu ra, ta có thể chuẩn hóa các giá trị trên về khoảng $[0; 1]$:

$$\begin{cases} p = \frac{k_p - k_{p,min}}{k_{p,max} - k_{p,min}} \\ d = \frac{k_d - k_{d,min}}{k_{d,max} - k_{d,min}} \end{cases} \tag{36}$$

Với k_p, k_d là các tham số của bộ PID. Đặt $\alpha = T_i/T_d$, ta có hệ số cho khâu tích phân của PID được tính bằng:

$$k_i = \frac{k_p}{\alpha T_d} = \frac{k_p^2}{\alpha k_d} \tag{37}$$

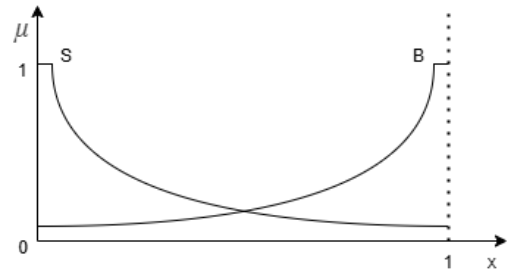
Giả sử phạm vi của sai lệch đầu vào e và đạo hàm sai lệch đầu vào de đã được chuẩn hóa trong khoảng $[-1; 1]$. Chọn hàm liên thuộc là hàm dạng tam giác *trimf*, các tập mờ xây dựng cho đầu vào có dạng được biểu diễn trên Hình 5 :



Hình 5. Các hàm liên thuộc mờ hóa giá trị đầu vào của hệ mờ

Các đầu ra p và d của hệ được mờ hóa bằng hai tập mờ S và B lần lượt đại diện cho giá trị nhỏ và lớn của tham số điều khiển PD và có hàm liên thuộc như Hình 6:

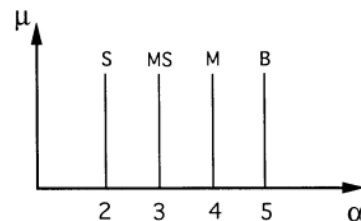
$$\begin{cases} \mu_S(x) = -\frac{1}{4} \ln(x) \\ \mu_B(x) = -\frac{1}{4} \ln(1-x) \end{cases} \tag{38}$$



Hình 6. Các hàm liên thuộc cho đầu ra hệ mờ

Ta định nghĩa các luật mờ cho hệ:

R_i : Nếu e là E_i và de là DE_i , thì p là P_i , d là D_i và a là A_i . Trong đó, $i = \overline{1, m}$, các tập mờ E_i, DE_i nhận các giá trị ngôn ngữ NB, NM, NS, ZO, PS, PM, PB tương ứng với các trạng thái âm, xấp xỉ 0 và dương của các biến đầu vào. P_i, D_i là các tập mờ đầu ra theo mô hình mờ Mamdani có hàm liên thuộc như Hình 7. A_i là một hằng số với $\mu_{A_i}(\alpha)$ là hàm liên thuộc rõ theo mô hình mờ Sugeno:



Hình 7. Hàm liên thuộc cho α .

Bảng 1. Luật điều khiển mờ cho tham số p

		DE						
		NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
E	NB	B	B	B	B	B	B	B
	NM	S	B	B	B	B	B	S
	NS	S	S	B	B	B	S	S
	ZO	S	S	S	B	S	S	S
	PS	S	S	B	B	B	S	S
	PM	S	B	B	B	B	B	S
	PB	B	B	B	B	B	B	B

Bảng 2. Luật điều khiển mờ cho tham số d

		DE						
		NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
E	NB	B	B	B	B	B	B	B
	NM	S	B	B	B	B	B	S
	NS	S	S	B	B	B	S	S
	ZO	S	S	S	B	S	S	S
	PS	S	S	B	B	B	S	S
	PM	S	B	B	B	B	B	S
	PB	B	B	B	B	B	B	B

Bảng 3. Luật điều khiển mờ cho tham số α

		DE						
		NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
E	NB	2	2	2	2	2	2	2
	NM	3	3	2	2	2	3	3
	NS	4	3	3	2	3	3	4
	ZO	5	4	3	3	3	4	5
	PS	4	3	3	2	3	3	4
	PM	3	3	2	2	2	3	3
	PB	2	2	2	2	2	2	2

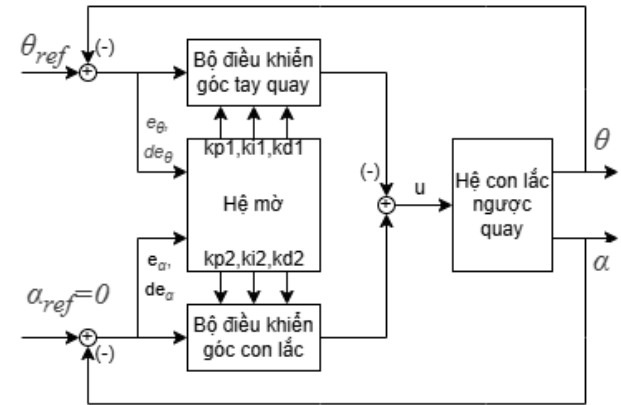
Việc lựa chọn cấu trúc bộ điều khiển PID mờ và xây dựng các luật hợp thành như trên được dựa trên đặc điểm của hệ con lắc ngược quay - một hệ phi tuyến, không ổn định và nhạy cảm với nhiễu và sai số mô hình. Thay vì thiết lập các thông số PID cố định, PID mờ cho phép linh hoạt điều chỉnh các tham số điều khiển dựa theo sai lệch đầu vào và tốc độ biến thiên của nó. Các luật mờ được xây dựng từ kinh nghiệm chuyên gia và tài liệu tham khảo [6], trong đó phản ánh trực tiếp mối liên hệ giữa trạng thái hệ thống và các tham số điều khiển mong muốn. Chẳng hạn, khi sai lệch lớn và thay đổi nhanh (ví dụ, e và de đều là PB hoặc NB), hệ thống cần phản ứng mạnh mẽ, nên giá trị của tham số P và D phải lớn (tập mờ B) để đảm bảo đáp ứng nhanh. Ngược lại, khi hệ thống gần điểm cân bằng (e và de gần ZO), cần điều chỉnh nhẹ để tránh dao động, nên tham số điều khiển giảm (tập mờ S).

Việc sử dụng cùng cấu trúc luật mờ cho ba tham số điều khiển p , d và α được lựa chọn nhằm đơn giản hóa thiết kế bộ điều khiển và giảm độ phức tạp tính toán của hệ thống. Mặc dù phạm vi hoạt động và ảnh hưởng của từng tham số là khác nhau, nhưng về bản chất, hành vi phản ứng mong muốn của hệ thống vẫn dựa trên mối quan hệ giữa sai lệch và đạo hàm của sai lệch. Do đó, việc áp dụng cùng một tập luật với ngữ nghĩa điều khiển tương đương vẫn đảm bảo hiệu quả kiểm soát hệ trong các điều kiện thay đổi.

Qua hệ mờ chỉnh định tham số, ta thu được các tham số p , d , α là các giá trị được chuẩn hóa của các thông số bộ điều khiển PID. Từ đó ta tính được các tham số cho bộ PID là:

$$\begin{cases} k_p = (k_{p,max} - k_{p,min})p + k_{p,min} \\ k_d = (k_{d,max} - k_{d,min})d + k_{d,min} \\ k_i = \frac{k_p^2}{ak_d} \end{cases} \quad (39)$$

Hệ con lắc ngược quay có mô hình phi tuyến phức tạp và nhạy cảm với nhiễu, gây khó khăn trong việc xác định chính xác tham số PID. Việc bổ sung bộ điều khiển mờ giúp chỉnh định tham số dễ dàng hơn bằng cách xác định khoảng giá trị thay vì tìm thông số cụ thể. Hệ mờ cần đồng thời chỉnh định cho hai bộ PID, dẫn đến số lượng luật mờ lớn, làm giảm hiệu suất tính toán. Để tối ưu, ta sử dụng hai hệ mờ riêng biệt cho góc cánh tay và góc con lắc, giảm đáng kể số mệnh đề cần xử lý (Hình 8). Cách tiếp cận này giúp giảm tải tính toán mà vẫn đảm bảo chất lượng điều khiển.



Hình 8. Sơ đồ bộ chỉnh định mờ cho hai bộ điều khiển.

Để điều khiển đồng thời cả vị trí của cánh tay và góc lệch của con lắc, thường thiết kế hai bộ điều khiển riêng biệt. Bộ điều khiển vị trí cánh tay (ARM) để điều chỉnh vị trí của cánh tay, còn bộ điều khiển góc con lắc (PEN) để điều chỉnh góc lệch của con lắc để giữ nó ở vị trí thẳng đứng. Tuy nhiên, do chỉ có một tín hiệu điều khiển chung (mô-men xoắn đầu vào cho động cơ), hai tín hiệu điều khiển từ các bộ điều khiển này phải được kết hợp thành một tín hiệu duy nhất. Thực tế cho thấy, khi cấp một mô-men xoắn để cánh tay quay theo một hướng, con lắc có xu hướng ngã về phía ngược lại. Điều này cho thấy hai tín hiệu điều khiển có ảnh hưởng trái ngược nhau trên cùng một hệ quy chiếu. Do đó, trong thiết kế điều khiển, tín hiệu điều khiển tổng hợp được xác định bằng cách trừ tín hiệu điều khiển của con lắc khỏi tín hiệu điều khiển của cánh tay [11]:

$$u(t) = u_{PEN}(t) - u_{ARM}(t)$$

Biểu thức này đảm bảo rằng tác động của hai bộ điều khiển được kết hợp một cách hợp lý để điều khiển hiệu quả toàn bộ hệ thống.

4. Kết quả khảo sát và thảo luận

4.1. Kết quả mô phỏng

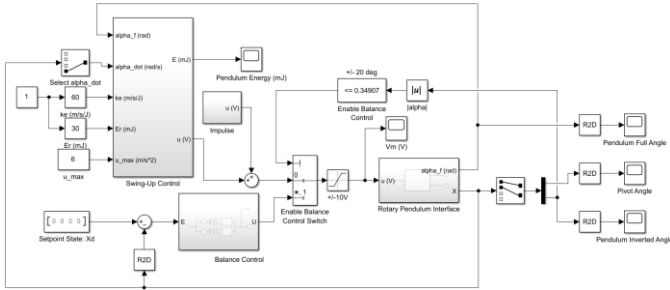
4.1.1. Bộ điều khiển Swing-up

Theo (30), ta có bộ điều khiển Swing-up cho con lắc:

$$u = sat_{u_{max}}(k_e(E - E_r)sign(cos(\alpha) \dot{\alpha}))$$

Với k_e là tham số cần chỉnh định của bộ điều khiển, ta chọn năng lượng tham chiếu $E_r = 2m_pgl = 0.0304(J)$ là năng lượng của con lắc tại vị trí cao nhất ($\alpha = \pi$), giới hạn $u_{max} = 6 (m/s^2)$ là gia tốc tối đa mà động cơ cung cấp ở điện áp $\pm 10V$.

Hình 9 biểu diễn sơ đồ khối thực hiện bộ điều khiển Swing-up trong Simulink



Hình 9. Sơ đồ bộ điều khiển Swing-up trong Simulink

Tại đầu ra $u(V)$ của bộ Swing-up được cộng thêm tín hiệu từ một khối "Impulse" có nhiệm vụ tạo một xung điện áp ban đầu để khởi tạo các giá trị trạng thái khác 0 cho bộ Swing-up.

4.1.2. Bộ điều khiển LQR

Thay các thông số của mô-đun Quanser, ta được phương trình trạng thái của hệ:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 149.28 & -12.03 & -0.49 \\ 0 & 261.61 & -11.89 & -0.86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 49.73 \\ 49.15 \end{bmatrix} u$$

Bộ điều khiển tối ưu LQR của hệ có dạng:

$$u = -K(x - x_r)$$

Trong đó $K = R^{-1}B^T P$, P là nghiệm của phương trình đại số Riccati.

Để tính K ta có thể sử dụng hàm lqr được tích hợp sẵn trong Matlab. Chọn các ma trận cho hàm chi phí là:

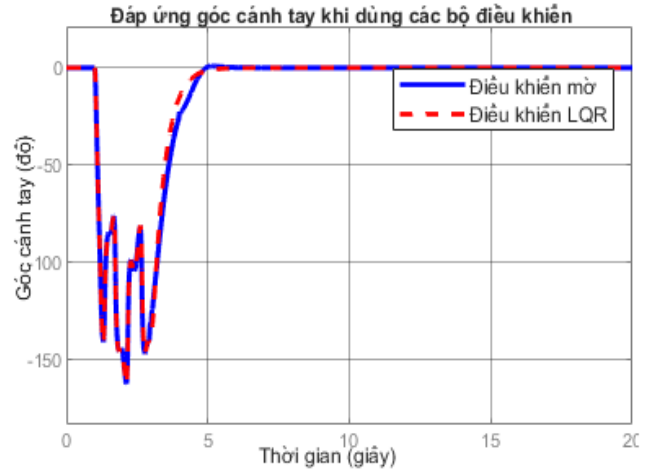
$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

Ta có bộ điều khiển:

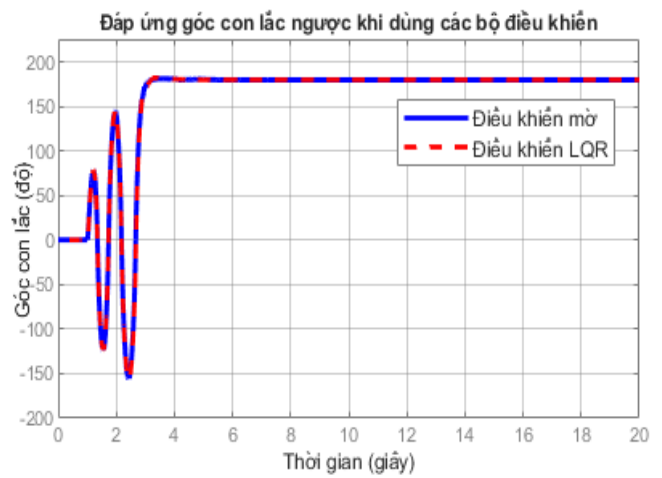
$$K = lqr(A, B, Q, R) = [-2.45 \quad 39.24 \quad -1.82 \quad 3.47]$$

Bộ điều khiển LQR đạt chất lượng tốt, giúp hệ thống nhanh chóng đạt trạng thái cân bằng với thời gian quá độ ngắn và ít dao động (Hình 10). Tuy nhiên, LQR hoạt động dựa trên mô hình tuyến tính hóa, vì vậy khi hệ thống có biến động hoặc phi tuyến mạnh hơn, chất lượng có thể giảm.

Việc sử dụng ma trận Q có trọng số tương ứng với sai lệch góc cánh tay cao, chất lượng điều khiển của cánh tay ít dao động quanh điểm cân bằng hơn.



(a) Góc cánh tay



(b) Góc con lắc

Hình 10. Đáp ứng hệ kín mô phỏng của bộ điều khiển LQR và PID mờ

4.1.3. Bộ điều khiển PID mờ

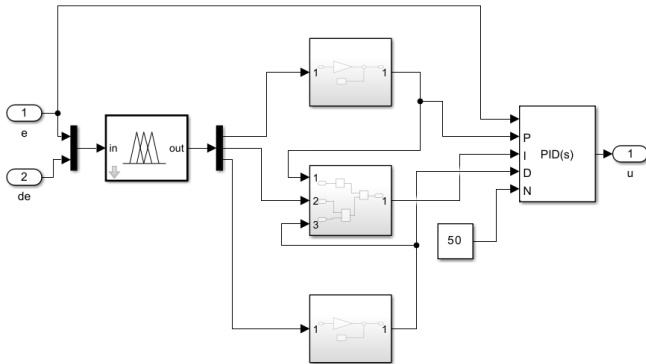
Bộ điều khiển PID mờ là một bộ điều khiển mờ lai trong đó hệ mờ không trực tiếp tạo ra tín hiệu điều khiển mà phân tích các đặc tính của sai lệch đầu vào để đưa ra chiến lược điều chỉnh các tham số của bộ PID. Trong Matlab, ta có thể xây dựng hệ mờ bằng công cụ Fuzzy Logic Control Toolbox và triển khai nó trên Simulink được biểu diễn ở Hình 11.

Ta xác định các phạm vi cho các tham số $k_{p,\theta}$; $k_{p,\alpha}$; $k_{d,\theta}$; $k_{d,\alpha}$ bằng phương pháp thực nghiệm với:

$$k_{p,\theta} \in [0; 1.5]; k_{p,\alpha} \in [30 \ 40]; k_{d,\theta} \in [0.5; 3]; k_{d,\alpha} \in [2; 4]$$

Phạm vi cho đầu vào cho sai lệch góc con lắc là $[-20 * \frac{\pi}{180}; 20 * \frac{\pi}{180}]$ do bộ điều khiển cân bằng chỉ hoạt động khi góc con lắc nhỏ hơn 20 độ so với phương thẳng đứng hướng lên. Phạm vi của góc cánh tay được chọn là $[-\pi; \pi]$. Chọn các giá trị đặt cho hệ là: $[\theta_r \ \alpha_r] = [0 \ 0]$

Bộ điều khiển PID mờ có thể cân bằng con lắc tại vị trí thẳng đứng hwuownsg lên trên. So sánh với bộ điều khiển LQR, ta thấy đặc tính điều chỉnh mờ không có dao động tại gần vị trí θ_r của cánh tay, tuy nhiên hệ có thời gian xác lập cho cánh tay quay dài hơn so với khi dùng bộ điều khiển truyền thống.



Hình 11. Mô hình bộ chỉnh định mờ trên Matlab Simulink.

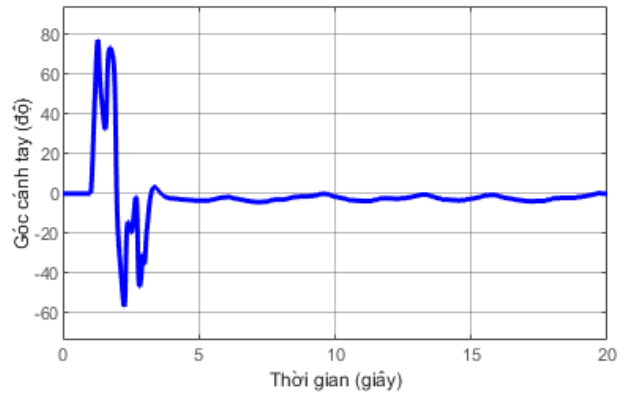
PID mờ có khả năng thích nghi tốt hơn với các thay đổi của hệ thống nhờ vào việc tự động điều chỉnh tham số PID theo tình trạng thực tế. Tuy nhiên, thời gian quá độ dài hơn và độ quá điều chỉnh cao hơn so với LQR (Hình 10.). Bộ điều khiển PID mờ phù hợp hơn trong môi trường có sự thay đổi tham số hệ thống hoặc nhiễu không xác định.

4.2. Thực nghiệm trên mô-đun Quanser QUBE-Servo2

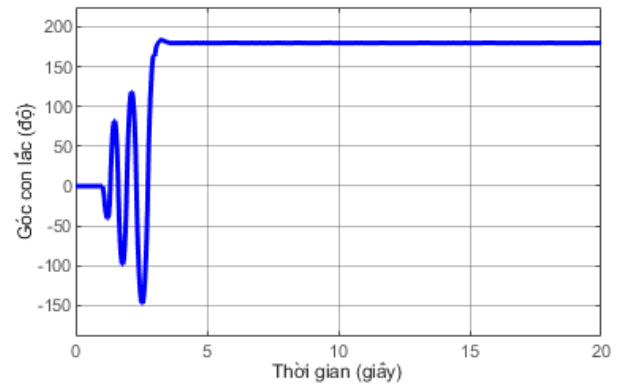
Thực nghiệm được thực hiện để kiểm chứng kết quả mô phỏng trong môi trường thực tế với các yếu tố như ma sát, nhiễu cảm biến và trễ tín hiệu điều khiển. Bộ điều khiển LQR cho thấy đáp ứng nhanh, ít dao động và duy trì trạng thái cân bằng hiệu quả, đặc biệt là trong môi trường ít nhiễu (Hình 12). Tuy nhiên, bộ PID mờ thể hiện khả năng thích nghi tốt hơn với sự thay đổi của hệ thống, nhưng thời gian ổn định lâu hơn và có dao động trong giai đoạn quá độ (Hình 13). Một yếu tố quan trọng cần xem xét là khả năng triển khai trên phần cứng nhúng. LQR sử dụng phản hồi trạng thái tuyến tính, có thể tính toán nhanh và phù hợp với hệ thống thời gian thực. Trong khi đó, PID chỉnh định mờ yêu cầu nhiều phép toán logic mờ, có thể làm tăng thời gian xử lý trên các hệ thống có tài nguyên hạn chế.

Các tham số chuẩn hóa cho đạo hàm sai lệch của đầu vào được đo từ tốc độ quay tối đa của cánh tay và con lắc, thể hiện trong Hình 14. Việc thay đổi các thông số chuẩn hóa cũng làm ảnh hưởng đến chất lượng điều khiển của hệ thống: Nếu xác định phạm vi cho các tham số $k_{p,\theta}$; $k_{p,\alpha}$; $k_{d,\theta}$; $k_{d,\alpha}$ không chứa giá trị tối ưu cho bộ điều khiển PID, đáp ứng của hệ có thể không tốt (con lắc và cánh tay bị dao động). Vẫn còn hiện tượng rung tại quá trình quá độ của hệ khi con lắc tiến gần tới vị trí cân bằng do tham số bộ mờ chưa được chọn đủ tốt.

So với mô phỏng, thời gian quá độ dài hơn và dao động tăng lên. Điều này có thể do trễ tính toán của thuật toán mờ hoặc nhiễu trong hệ thống thực tế. Mặc dù có dao động nhỏ, bộ điều khiển này vẫn thể hiện khả năng thích nghi tốt hơn với sự thay đổi của hệ thống. Kết quả hoàn toàn giống với tài liệu [6][8]. Khác với các nghiên cứu [6][8] chỉ dừng lại ở mô phỏng trên MATLAB Simulink, bài báo này đã triển khai trực tiếp trên mô-đun phần cứng QUBE-Servo2. Nhờ đó, các yếu tố như trễ điều khiển, nhiễu cảm biến và ma sát cơ học đã được đưa vào phân tích, cho kết quả thực tế sát hơn với điều kiện vận hành thật. Điều này minh chứng cho khả năng áp dụng của bộ điều khiển vào môi trường thực tế, nâng cao giá trị ứng dụng của nghiên cứu.

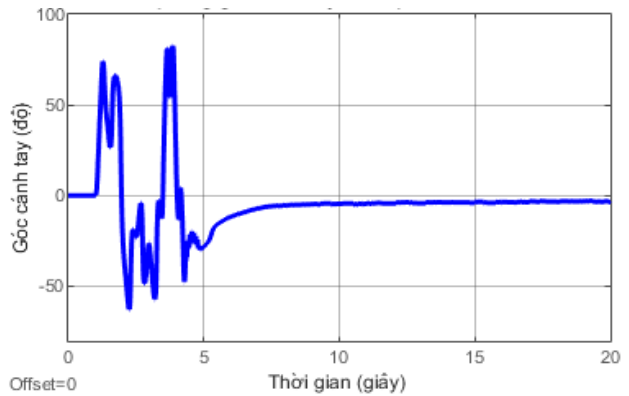


(a) Góc cánh tay

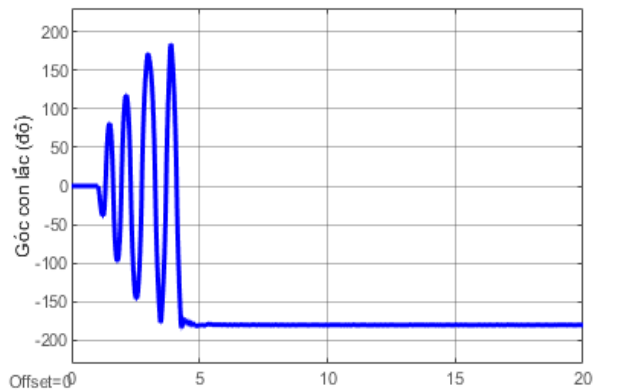


(b) Góc con lắc

Hình 12. Đáp ứng thực nghiệm của con lắc với bộ điều khiển LQR.

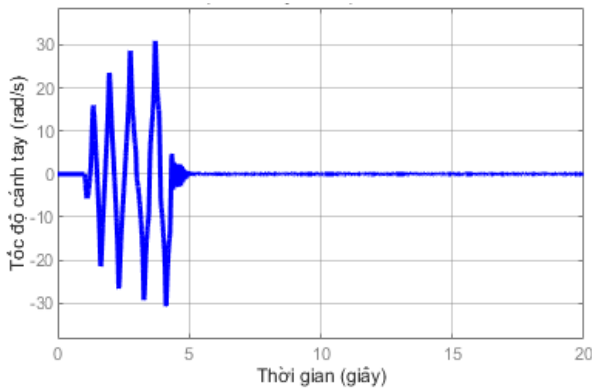


(a) Góc cánh tay

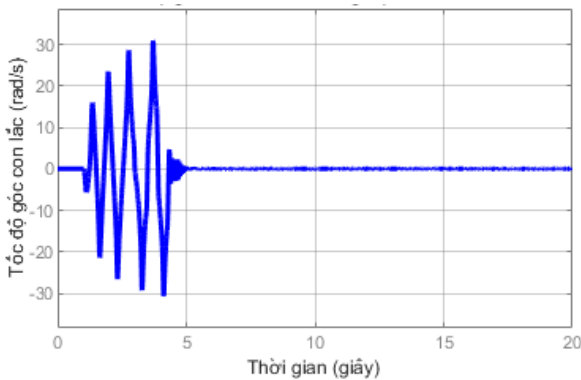


(b) Góc con lắc

Hình 13. Đáp ứng thực nghiệm của con lắc với bộ điều khiển PID mờ.



(a) Tốc độ góc cánh tay



(b) Tốc độ góc con lắc

Hình 14. Tốc độ góc của cánh tay và con lắc.

5. Kết luận

Nghiên cứu này đã thực hiện thiết kế và so sánh hai bộ điều khiển LQR và PID mờ cho hệ con lắc ngược quay. Kết quả nghiên cứu cho thấy bộ điều khiển LQR có ưu điểm về thời gian đáp ứng nhanh, ít dao động và chịu nhiễu tốt, giúp hệ thống nhanh chóng đạt trạng thái cân bằng. Trong khi đó, bộ PID mờ thể hiện khả năng thích nghi tốt hơn với sự thay đổi thông số, nhưng thời gian ổn định lâu hơn và có độ quá điều chỉnh cao hơn. Một hướng nghiên cứu quan trọng trong tương lai là phát triển các phương pháp điều khiển kết hợp, chẳng hạn như tích hợp LQR với điều khiển thích nghi hoặc thuật toán tối ưu hóa nhằm nâng cao hiệu suất tổng thể. Ngoài ra, việc nghiên cứu các thuật toán giảm bớt độ phức tạp tính toán của bộ điều khiển mờ sẽ giúp cải thiện khả năng triển khai trên hệ thống thời gian thực.

Tài liệu tham khảo

- [1] Mihalec, M., Han, F., & Yi, J. (2022). Integrated inverted pendulum and whole-body control design for bipedal robot with foot slip. *IFAC-PapersOnLine*, 55(37), 376–381. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.11.212>
- [2] Nguyễn, M. T., Nguyễn, V. Đ. H., Nguyễn, P. L., & Lê, V. T. (2016). *Mô hình hóa và điều khiển tối ưu cho hệ xe hai bánh tự cân bằng*. Tạp chí Khoa học Giáo dục Kỹ thuật, (37), 45–52. Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh.
- [3] Le, P., Vo, H., & Tran, D. (2016). *Điều khiển swing-up và cân bằng con lắc ngược*. Vietnam Journal of Applied Engineering, 18(3), 77–92.
- [4] Sarma, S., & Kumar, A. (2017). Analysis & Control of Inverted Pendulum System Using PID Controller. *International Journal of Engineering Research and Applications*, 7(5), 1–4. <https://doi.org/10.9790/9622-0705040104>
- [5] Hoang, N., & Vu, P. (2019). *Điều khiển cân bằng con lắc ngược sử dụng thuật toán PD mờ*. Journal of Fuzzy Control, 15(1), 67–78.
- [6] Johnson, K., & Wang, Y. (2020). *Fuzzy Control of an Inverted Pendulum Systems in MATLAB/Simulink*. Journal of Advanced Control, 36(2), 221–234. <https://doi.org/10.12988/ces.2018.86298>
- [7] Pham, Q., Nguyen, L., & Ho, D. (2018). Điều khiển trượt cho đối tượng con lắc ngược có liên kết đàn hồi sử dụng đại số gia từ. *Journal of Advanced Control*, 22(4), 135–149.
- [8] Nguyen, T.-V.-A., Dao, Q.-T., & Bui, N.-T. (2024). Optimized fuzzy logic and sliding mode control for stability and disturbance rejection in rotary inverted pendulum. *Scientific Reports*, 14:31116. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-82471-y>
- [9] Huynh, P.-H., Nguyen, M.-T., & Do, H.-Q. (2024). Model predictive control for rotary inverted pendulum: Simulation and experiment. *Journal of Fuzzy Systems and Control*, 6(1), 1–10. Retrieved from <https://ejournal.ptti.web.id/index.php/jfsc/article/view/263>
- [10] Pham, D.-B., Dao, Q.-T., Bui, N.-T., & Nguyen, T.-V.-A. (2024). *Robust-optimal control of rotary inverted pendulum through fuzzy descriptor-based techniques*. Scientific Reports, 14:5593. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-56202-2>
- [11] Dao, Q.-T., Pham, D.-B., & Nguyen, T.-V.-A. (2024). Efficient Control of Rotary Inverted Pendulum Systems with T-S Fuzzy Descriptor Models. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-97-5504-2_4
- [12] Quanser Inc. (2020). *QUBE-Servo 2 User Manual*. Quanser. Retrieved from <https://www.quanser.com/products/qube-servo-2/>
- [13] Åström, K. J., & Furuta, K. (2000). *Swinging Up a Pendulum by Energy Control*. *Automatica*, 36(2), 287–295.
- [14] Åström, K. J. (2007). *Hybrid Control of Inverted Pendulums*. In *Hybrid Systems* (pp. 150–163). Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0ĐA109727>
- [15] Wiklund, M., Kristenson, A., & Åström, K. J. (1993). *A New Strategy for Swinging Up an Inverted Pendulum*. *IFAC Proceedings Volumes*, 26(2), 757–760. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)48372-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)48372-8)
- [16] Sukontanakarn, V., & Pamichkun, M. (2009). *Real-Time Optimal Control for Rotary Inverted Pendulum*. *American Journal of Applied Sciences*, 6(6), 1106–1115. <https://doi.org/10.3844/ajassp.2009.1106.1115>
- [17] Nguyễn Hoài Nam, Nguyễn Thu Hà, (2021). *Điều khiển mờ và mạng nơ-ron*. Tập 1: Cơ sở hệ mờ và mạng nơ-ron, Nhà xuất bản Bách Khoa.