

# Bộ điều khiển mô hình dự báo cải tiến áp dụng cho mô hình cầu trục với hiệu ứng con lắc kép

## Advanced Predictive Model Controller Applied to Crane Model with Double Pendulum Effect

Nguyễn Thị Hiền<sup>1</sup>, Hoàng Thị Mai<sup>1</sup>, Lưu Thị Huế<sup>2</sup>, Bùi Thị Khánh Hòa<sup>1</sup>, Nguyễn Danh Huy<sup>1,\*</sup> và Nguyễn Tùng Lâm<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Đại học Bách Khoa Hà Nội

<sup>2</sup>Đại học Điện Lực

\*Corresponding author E-mail: [huy.nguyendanh@hust.edu.vn](mailto:huy.nguyendanh@hust.edu.vn)

### Abstract

This study proposes a predictive model controller based on Lyapunov for a double pendulum crane system with variable sling length. The dynamics of the system are built by applying the Euler-Lagrange method. Based on the dynamic equation, a quadratic sliding mode control moves the load to the desired position while reducing the vibration when the rope length changes. However, the input states of the unit control and the control force are not strictly controlled. The controller ensures stability through the Lyapunov inequality constraint. Simulation is performed to validate the accuracy and efficiency of the controller. Due to the position accuracy requirements, slight oscillation angle, and transit time of the crane, the controller must be of high quality and suitable for each system to adapt to the nonlinear external influences, in addition to causing undesired oscillations.

**Keywords:** Double pendulum bridge crane, Second order sliding mode control, Lyapunov-based model predictive control.

### Kí hiệu

Ký hiệu	Đơn vị	Ý nghĩa
$\theta_1$	rad	Góc lắc của móc treo so với phương thẳng đứng
$\theta_2$	rad	Góc lắc của tải so với phương thẳng đứng
$M$	kg	Khối lượng của xe con
$m_1, m_2$	kg	Khối lượng móc treo và tải trọng
$l_1$	m	Chiều dài dây treo
$\dot{l}_1$	m/s	Gia tốc dây treo
$l_2$	m	Chiều dài dây cáp
$x$	m	Vị trí của xe con
$\dot{x}, \ddot{x}$	m/s, m/s <sup>2</sup>	Vận tốc, gia tốc của xe con
$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$	rad/s	Vận tốc của góc lắc
$\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$	rad/s <sup>2</sup>	Gia tốc của góc lắc
$g$	rad/s <sup>2</sup>	Gia tốc trọng trường
$\mu_x, \mu_l$		Hệ số ma sát

### Tóm tắt

Nghiên cứu này đề xuất một bộ điều khiển dự báo mô hình dựa trên hàm Lyapunov cho hệ thống cầu trục con lắc đôi với chiều dài dây treo thay đổi. Động lực học của hệ thống được xây dựng bằng cách áp dụng phương pháp Euler-Lagrange. Dựa trên phương trình động lực học, bộ điều khiển trượt bậc hai được xây dựng cho hệ thống di chuyển tải trọng tới vị trí mong muốn đồng thời giảm rung lắc khi chiều dài dây treo thay đổi, các trạng thái đầu vào của bộ điều khiển, cũng như lực điều khiển không được kiểm soát chặt chẽ. Do đó bộ điều khiển dự báo mô hình dựa trên hàm chức năng phụ trợ Lyapunov được đề xuất nhằm giải quyết vấn đề trên, cho phép thiết lập các giới hạn lực điều khiển cũng như biến trạng thái. Bộ điều khiển đảm bảo ổn định thông qua ràng buộc bất đẳng thức với hàm chức năng phụ trợ Lyapunov. Mô phỏng được thực hiện để xác thực tính chính xác và hiệu quả của bộ điều khiển. Do các yêu cầu tính chính xác về vị trí, góc dao động nhỏ, thời gian đáp ứng nên bộ điều khiển phải có chất lượng cao và phù hợp với từng hệ thống để thích nghi với những tác động phi tuyến bên ngoài gây ra những dao động không mong muốn.

### 1. Giới thiệu

Hiện nay với sự phát triển nhanh của nền khoa học kỹ thuật các đối tượng điều khiển trong công nghiệp càng phức tạp. Hệ thống cầu trục là một trong số đó và được ứng dụng nhiều trong ngành công nghiệp, vận tải như: trong nhà máy luyện kim, trong các cảng biển, kho bãi, xây dựng lắp đặt... do chúng chi phí lắp đặt thấp, thay thế và bảo trì hệ

### Các từ viết tắt

SMC	Sliding Mode Control
LMPC	Lyapunov-based Model Predictive Control

thông dễ dàng. Hệ thống cầu trục có nhiều mô hình khác nhau như: hệ thống cầu trục con lắc đơn, hệ thống cầu trục con lắc kép.... Hệ thống cầu trục con lắc kép là một hệ thống hực cơ cấu chấp hành, có khả năng di chuyển theo phương ngang cũng như nâng/hạ tải trọng theo phương thẳng đứng. Do thiết kế cơ khí của cơ cấu cầu trục, cũng như dây cáp sử dụng cho công việc nâng/hạ tải trọng là dây mềm nên quá trình vận chuyển tải trọng sẽ không tránh khỏi bị rung lắc. Điều này làm giảm hiệu suất, độ an toàn cho người và các thiết bị xung quanh. Vì vậy nghiên cứu điều khiển cho hệ thống này đã thu hút sự quan tâm lớn của các nhà khoa học trong nhiều thập kỉ qua. Nghiên cứu cho thấy có một số phương pháp điều khiển điển hình cho hệ thống cầu trục như: điều khiển tuyến tính (Linear Control)[1], bộ điều khiển tuyến tính với nhược điểm khó đáp ứng được cho hệ cầu trục khi tính đến ma sát hay sự thay đổi của dây treo. Bộ điều khiển phi tuyến (Non-linear Control) [2] khắc phục được nhược điểm bộ điều khiển tuyến tính tuy nhiên yêu cầu tham số của mô hình cần phải xác định được chính xác. Bộ điều khiển tối ưu (Optimal Control)[3], bộ điều khiển tập trung vào tối ưu về thời gian di chuyển, năng lượng cung cấp, tuy nhiên không tập trung cải thiện chất lượng điều khiển (độ rung lắc, độ quá điều chỉnh...). Bộ điều khiển bền vững (Robust Control)[4] đã đảm bảo hệ thống làm việc ổn định ngay cả khi hệ thống bị nhiễu tác động. Bộ điều khiển thích nghi (Adaptive Control) đảm bảo hệ thống ổn định khi mô hình có tham số bất định [5]. Điều khiển trượt (Sliding mode control)[6][7], điều khiển hiện đại/điều khiển thông minh (Modern Control/IntelligentControl)[8][9][10], các bộ điều khiển thông minh có khả năng thích nghi và không bắt buộc phải có mô hình chính xác đối tượng điều khiển. Tuy nhiên khi thiết kế các bộ điều khiển ở trên đều chưa xem xét đến giới hạn của đầu vào điều khiển và các biến trạng thái. Phương pháp điều khiển dự đoán (MPC) có thể giải quyết vấn đề này. Bộ điều khiển dự báo mô hình phi tuyến [11], các ràng buộc phi tuyến được tính gần đúng để tiết kiệm thời gian tính toán. Ngoài ra, để giảm thời gian tính toán, Jason Bettega và cộng sự [12] đã sử dụng MPC có tham chiếu đến phương pháp động lực học trong thiết kế bộ điều khiển. Một bộ điều khiển dự báo đa mục tiêu bền vững [13], giúp tăng vùng khả thi mà không làm mất các thuộc tính quan trọng như độ ổn định của hệ thống. Trong bài báo này, nhóm tác giả đề xuất bộ điều khiển dự báo mô hình dựa trên hàm phụ trợ Lyapunov (LMPC), với điều kiện ổn định cho bộ điều khiển trượt bậc hai. Bộ điều khiển này không chỉ có thể xử lý góc lắc của tải trọng một cách hiệu quả mà còn đảm bảo sự ổn định toàn cục của hệ thống. Các kết quả của bài báo được tóm tắt như sau:

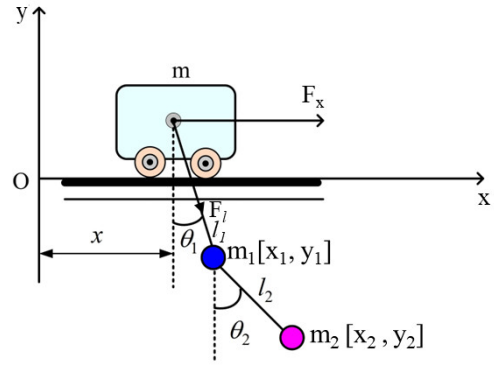
- Quỹ đạo của xe con và của tải trọng bám quỹ đạo mong muốn.
- Tải trọng được điều khiển chống rung.
- Hệ thống đảm bảo ổn định bền vững với bộ điều khiển LMPC, với các điều kiện ràng buộc trạng thái đầu vào (góc lắc, vận tốc chuyển động ..) và tín hiệu điều khiển (lực tác dụng) được xem xét khi thiết kế điều khiển.

## 2. Mô hình động lực học của hệ thống

Cầu trục có nhiều mô hình khác nhau, trong nghiên cứu này, tác giả sử dụng mô hình cầu trục con lắc kép 2D với 4 bậc tự do. Mô hình được thể hiện như trong Hình 1. Oxy là khung tọa độ gốc của hệ thống. Mô hình cầu trục được mô tả như sau: Tải trọng được móc cố định vào móc treo bằng dây cáp (nối từ móc treo đến tải) và được nâng lên bằng dây treo (nối từ xe con đến móc treo) như Hình 1. Dây cáp cầu trục được giả định là không có khối lượng và có chiều dài không đổi. Dây treo giả định có chiều dài có thể thay đổi. Hệ thống móc treo và tải trọng được thay thế như hệ thống con lắc kép.

Dựa vào Hình 1 vị trí của móc treo và tải trọng được xác định như sau:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 + x \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + x + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (1)$$



Hình 1. Mô hình cầu trục với hiệu ứng con lắc kép.

Phương trình động lực học của hệ thống gồm xe con và các con lắc được xây dựng dựa vào phương pháp Euler-Lagrange[14][15], hàm Lagrange được xác định:

$$L = T - P \quad (2)$$

trong đó  $T$  và  $P$  lần lượt là động năng và thế năng của hệ. Động năng của hệ được xác định như sau:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3)$$

Thế năng của hệ được xác định:

$$P = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (4)$$

Áp dụng phương pháp Euler-Lagrange, phương trình chuyển động của toàn bộ hệ thống được thiết lập như phương trình (5):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (5)$$

Với  $\mathbf{q} = [x \ l_1 \ \theta_1 \ \theta_2]^T$

Từ phương trình (3)-(5), phương trình động lực học của hệ thống được thiết lập như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{U} \quad (6)$$

với  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  là ma trận quán tính;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  là ma trận tương hỗ và ly tâm;  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  là véc tơ trọng trường;  $\mathbf{U} = [F_x \ F_l \ 0 \ 0]^T$  là véc tơ lực tác động lên hệ,  $F_x$  là lực tác động lên xe con,  $F_l$  là lực tác động lên dây treo.

Ma trận  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  xác định như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$$

Các thành phần trong ma trận quán tính  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  được xác định như sau:

$$\begin{aligned} M_{11} &= M + m_1 + m_2, \quad M_{12} = M_{21} = (m_1 + m_2) \sin \theta_1, \\ M_{13} &= M_{31} = (m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1, \quad M_{14} = M_{41} = m_2 l_2 \cos \theta_2, \\ M_{22} &= m_1 + m_2, \quad M_{23} = M_{32} = 0, \\ M_{24} &= M_{42} = m_2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad M_{33} = (m_1 + m_2) l_1^2, \\ M_{34} &= M_{43} = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad M_{44} = m_2 l_2^2. \end{aligned}$$

Ma trận tương hỗ và ly tâm  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  được xác định như sau:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}$$

Các thành phần trong ma trận  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  xác định như sau:

$$\begin{aligned} C_{21} &= C_{31} = C_{33} = C_{41} = C_{44} = 0, \quad C_{11} = \mu_x, \\ C_{12} &= 2(m_1 + m_2)\cos\theta_1 \dot{\theta}_1, \quad C_{13} = -(m_1 + m_2)l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1, \\ C_{14} &= -m_2 l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2, \quad C_{22} = \mu_l, \quad C_{23} = -(m_1 + m_2)l_1 \dot{\theta}_1, \\ C_{24} &= -m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2, \quad C_{32} = 2(m_1 + m_2)l_1 \dot{\theta}_1, \\ C_{34} &= m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2, \\ C_{42} &= 2m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1, \quad C_{43} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1. \end{aligned}$$

Véc tơ trọng trường của hệ thống được xác định như sau:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [G_{11} \quad G_{21} \quad G_{31} \quad G_{41}]^T$$

$$\text{với } G_{11} = 0, \quad G_{21} = (m_1 + m_2)g(1 - \cos\theta_1), \\ G_{31} = (m_1 + m_2)gl_1 \sin\theta_1, \quad G_{41} = m_2 l_2 g \sin\theta_2.$$

Có thể thấy rằng, hệ cầu trục con lắc kép 2D là hệ hệt cơ cấu chấp hành, mà mục tiêu chính của bài toán là xác định tín hiệu điều khiển  $[F_x \quad F_l]^T$  để điều khiển các biến trạng thái bám theo quỹ đạo yêu cầu. Vì vậy động lực học của hệ thống được chia thành hai hệ thống con: một hệ thống dành cho các biến trạng thái đủ cơ cấu chấp hành  $\mathbf{q}_a = [x \quad l_1]^T$  và hệ thống còn lại không có cơ cấu chấp hành  $\mathbf{q}_u = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$  như sau:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{M}_{12}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_a \\ + \mathbf{C}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{G}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{U}_a \\ \mathbf{M}_{21}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{M}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_a \\ + \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{G}_2(\mathbf{q}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

trong đó các thành phần trong (7) xác định như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_{21}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{13} & m_{14} \\ m_{23} & m_{24} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_{33} & m_{34} \\ m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} c_{13} & c_{14} \\ c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1(\mathbf{q}) = [G_{11} \quad G_{21}]^T, \\ \mathbf{G}_2(\mathbf{q}) &= [G_{31} \quad G_{41}]^T, \quad \mathbf{U}_a = [F_x \quad F_l]^T. \end{aligned}$$

Thực hiện khử biến  $\ddot{\mathbf{q}}_u$  trong hệ phương trình (7), ta được mô hình động lực học tương đương của hệ như sau:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{C}}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{C}}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_u + \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{U}_a \quad (8)$$

$$\text{với } \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21}, \quad \bar{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_{11} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21}, \\ \bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{C}_{12} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{22}, \quad \bar{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}_1 - \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{G}_2.$$

### 3. Thuật toán đề xuất

#### 3.1. Bộ điều khiển trượt bậc hai (SO-SMC)

Đặt  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{ar} = [x - x_r \quad l_1 - l_{1r}]^T$  và  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_u - \mathbf{q}_{ur} = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$  (do  $\mathbf{q}_{ur} = [0 \quad 0]^T$ ) là các véc tơ sai lệch. Theo [1] mặt trượt được thiết kế như sau:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}}_1 + \lambda \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}_{ar} + \lambda(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{ar}) + \alpha \mathbf{q}_u \quad (9)$$

trong đó  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  và  $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$  với  $\lambda_i > 0, \alpha_i \in \mathbb{R}$ . Đạo hàm của mặt trượt theo thời gian:

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{e}}_1 + \lambda \dot{\mathbf{e}}_1 + \alpha \dot{\mathbf{e}}_2 = \ddot{\mathbf{q}}_a - \ddot{\mathbf{q}}_{ar} + \lambda(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}_{ar}) + \alpha \dot{\mathbf{q}}_u \quad (10)$$

Phương trình động lực học cho mặt trượt được xây dựng như sau:

$$\dot{\mathbf{s}} + \lambda \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Phương trình (11) là phương trình vi phân cấp 1, với mọi giá trị dương  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  tùy ý, thì  $\mathbf{s}$  luôn ổn định theo hàm số mũ.

Thế (9) và (10) vào (11), thu được:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_a - \ddot{\mathbf{q}}_{ar} + \lambda(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}_{ar}) + \alpha \dot{\mathbf{q}}_u \\ + \lambda(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}_{ar} + \lambda \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{q}_u) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

Kết hợp hai phương trình (8) và (12), bộ điều khiển trượt được đề xuất như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{eq} = \bar{\mathbf{C}}_1 \dot{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{C}}_2 \dot{\mathbf{q}}_u + \bar{\mathbf{G}}_1 \\ - \bar{\mathbf{M}} \left[ 2\lambda(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}_{ar}) + \alpha \dot{\mathbf{q}}_u + \lambda^2 \mathbf{e}_1 + \lambda \alpha \mathbf{q}_u - \ddot{\mathbf{q}}_{ar} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó  $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2)$  với  $k_i$  là các hằng số thực dương. Thành phần điều khiển kéo mặt trượt về gốc là  $\mathbf{u}_{sw} = -\mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{s})$ . Như vậy, tín hiệu điều khiển cho hệ cầu trục  $\mathbf{U}_a = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}_{sw}$  được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_a = \bar{\mathbf{C}}_1 \dot{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{C}}_2 \dot{\mathbf{q}}_u + \bar{\mathbf{G}}_1 - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{s}) \\ - \bar{\mathbf{M}} \left[ 2\lambda(\dot{\mathbf{q}}_a - \dot{\mathbf{q}}_{ar}) + \lambda^2 \mathbf{e}_1 + \alpha \dot{\mathbf{q}}_u + \lambda \alpha \mathbf{q}_u - \ddot{\mathbf{q}}_{ar} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Với luật điều khiển (14), phương trình động lực học mặt trượt lúc này trở thành:

$$\dot{\mathbf{s}} + \lambda \mathbf{s} = -\bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{s}) \quad (15)$$

#### 3.2. Phân tích tính ổn định

Để phân tích tính ổn định của hệ thống, xét hàm Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}.$$

Hàm Lyapunov là một hàm luôn lớn hơn bằng không. Lúc này, đạo hàm hàm Lyapunov  $V$  theo thời gian được xác định như sau:

$$\dot{V}_{SMC} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{s}^T \lambda \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{s}) \quad (16)$$

Vì  $\bar{\mathbf{M}}$  là ma trận vuông, khả nghịch, đối xứng, xác định dương,  $\mathbf{K}, \lambda$  là ma trận đường chéo với các hệ số dương, vì vậy  $\dot{V} \leq 0$ . Do đó theo bổ đề Barbalat  $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0$ , khi đó mặt trượt  $\mathbf{s}$  cũng sẽ có được:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s} = \mathbf{0}$ .

Lúc này kết luận được rằng mặt trượt  $\mathbf{s}$  ổn định tiệm cận.

Từ phương trình (16) có thể thấy rằng sự ổn định tiệm cận của mặt trượt  $\mathbf{s} \rightarrow 0$  chưa kết luận được sự ổn định tiệm cận của sai số điều khiển  $\mathbf{e}_1$  và  $\mathbf{e}_2$ . Do đó để xét sự ổn định tiệm cận của các sai số điều khiển  $\mathbf{e}_1$  và  $\mathbf{e}_2$  khi mặt trượt  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$  ta xem xét phương trình mặt trượt sau:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}}_1 + \lambda \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{0} \quad (17)$$

Về mặt thực tế, dưới tác động của trọng trường, các góc lắc  $\theta_1, \theta_2$  gây ra bởi tải trọng và dây treo có xu hướng tiến về 0, điều đó có nghĩa là  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_u - \mathbf{q}_{ur} = [\theta_1 \quad \theta_2]^T \rightarrow \mathbf{0}$ . Khi đó phương trình mặt trượt (17) có được:  $\dot{\mathbf{e}}_1 + \lambda \mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ . Từ đó  $\mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ , như vậy quỹ đạo của xe con, của góc lắc bám quỹ đạo đặt. Tuy nhiên, để có được khẳng định một cách chắc chắn về mặt khoa học khi mặt trượt  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$  thì sai số điều khiển  $\mathbf{e}_1$  và  $\mathbf{e}_2$  đều tiến về 0, việc chứng minh tường minh về mặt toán học là cần thiết. Để chứng minh điều đó, trước hết véc tơ trạng thái được định nghĩa như sau:  $\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dot{\mathbf{e}}_1 \quad \dot{\mathbf{e}}_2]^T$ . Từ (7) và (11) biến trạng thái  $z_3$  và  $z_4$  xác định được:

$$\begin{aligned} z_3 &= -(2\lambda^2 \dot{\mathbf{e}}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_1 + \alpha \dot{\mathbf{e}}_2 + \lambda \alpha \mathbf{e}_2) \\ &= -(2\lambda z_3 + \lambda^2 z_1 + \alpha z_4 + \lambda \alpha z_2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$z_4 = \dot{\mathbf{e}}_2 = \dot{\mathbf{q}}_u = -\mathbf{M}_{22}^{-1} (\mathbf{M}_{21} \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{C}_{21} \dot{\mathbf{q}}_a + \mathbf{C}_{22} \dot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{G}_2) \quad (19)$$

Sau một số phép biến đổi biến trạng thái  $\mathbf{z}_4$  được biểu diễn như sau:

$$\dot{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{A}_1 z_1 + \mathbf{A}_2 z_2 + \mathbf{A}_3 z_3 + \mathbf{A}_4 z_4 + \mathbf{A}_5 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{với } \mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} \lambda^2, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} \lambda \alpha, \\ \mathbf{A}_3 &= 2\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} \lambda - \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21}, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} \alpha - \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{22}, \\ \mathbf{A}_5 &= -\mathbf{M}_{22}^{-1} (\mathbf{M}_{21} \ddot{\mathbf{q}}_{ar} + \mathbf{C}_{21} \dot{\mathbf{q}}_{ar} + \mathbf{G}_2). \end{aligned}$$

Phương trình (18) và (20) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_3 \\ \dot{\mathbf{z}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\lambda^2 & -\lambda \alpha & -2\lambda & -\alpha \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{A}_5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

hay có thể viết lại một cách ngắn gọn như sau:  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}$ . Hệ ổn định khi và chỉ khi  $\det(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})$  có các điểm cực nằm bên trái trục ảo, nghĩa là nếu các tham số của bộ điều khiển  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  và  $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$  được chọn thỏa mãn ràng buộc sau:

$$\begin{cases} \lambda_i > 0, \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 < l_1 \lambda_1 \end{cases} \quad \forall i = 1, 2 \quad (22)$$

Khi đó theo tính ổn định của hệ phi tuyến được đánh giá dựa vào định lý tuyến tính hóa Lyapunov, tuyến tính hóa quanh vị trí cân bằng thì  $\mathbf{z} \rightarrow 0$  hay các đáp ứng hệ thống sẽ tiến đến giá trị đặt  $\mathbf{q}_a \rightarrow \mathbf{q}_{ar}$ ,  $\mathbf{q}_u \rightarrow \mathbf{q}_{ur}$  khi  $t \rightarrow \infty$ . Như vậy hệ thống (8) làm việc ổn định với bộ điều khiển (14).

### 3.3. Bộ điều khiển dự báo nền trượt (LPMC)

Trong thực tế, cấu trúc của hệ thống cầu trục rất phức tạp, ngoài việc điều khiển xe đẩy, chống rung lắc cho tải trọng thì việc kiểm soát chặt chẽ giới hạn cho các biến trạng thái và tín hiệu điều khiển cũng rất cần thiết, vì không phải lúc nào bộ điều khiển yêu cầu tín hiệu bao nhiêu thì cơ cấu chấp hành cũng đáp ứng được đầy đủ như vậy [16][17][18]. Vì vậy cần một phương pháp điều khiển kiểm soát chặt chẽ các giới hạn của các biến trạng thái như vận tốc của xe đẩy, góc lắc của tải trọng, và đầu ra như lực truyền động, nhưng vẫn đảm bảo tính ổn định toàn cục cho hệ thống.

Lyapunov-based MPC (LMPC) là một kỹ thuật nâng cao tính ổn định cho hệ thống dựa trên nền tảng là phương pháp điều khiển dự báo. LMPC tận dụng tối đa ưu điểm của phương pháp điều khiển dự báo cơ bản, nhưng đảm bảo tính ổn định của vòng kín bằng việc xây dựng bộ điều khiển phi tuyến dựa trên hàm Lyapunov. Qua đó không chỉ đảm bảo các biến trạng thái bám quỹ đạo mong muốn, kiểm soát tín hiệu điều khiển mà còn đảm bảo tính ổn định của hệ thống nhờ hàm chức năng phụ trợ Lyapunov. Hàm chi phí và các điều kiện ràng buộc cho bộ điều khiển LMPC được xây dựng như sau:

$$J = \int_{t_k}^{t_k + T_s} \left( \left\| \Delta \mathbf{q}^*(t) \right\|_{\mathbf{Q}}^2 + \left\| \Delta \mathbf{u}(t) \right\|_{\mathbf{R}}^2 \right) dt \quad (23)$$

thỏa mãn đồng thời các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2(t) &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_1) \left( \mathbf{U} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 - \mathbf{G}(\mathbf{q}_1) \right) \\ \mathbf{q}_{\min}^* &\leq \mathbf{q}^*(t) \leq \mathbf{q}_{\max}^* \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{\max} \\ \dot{V}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)) &\leq \dot{V}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}_{\text{smc}}(t)) \end{aligned} \quad (24)$$

Trong đó,  $\mathbf{q}^*(t) = [\mathbf{q}_1(t); \mathbf{q}_2(t)]$  là các tín hiệu trạng thái tính toán và đạo hàm các tín hiệu trạng thái với tín hiệu điều khiển dự đoán  $\mathbf{u}(t)$ ;  $\mathbf{q}_d^*(t)$  là tín hiệu đặt của trạng thái và đạo hàm của chúng tại thời điểm đó;  $\Delta \mathbf{q}^*(t) = \mathbf{q}^*(t) - \mathbf{q}_d^*(t)$  và  $\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - T_s)$  lần lượt là sai lệch tín hiệu điều khiển tính toán tại hai thời điểm liên tiếp  $t$  và  $t - T_s$ , với  $T_s$  là thời gian lấy mẫu, đảm bảo đủ nhỏ để đảm bảo tín hiệu điều khiển không tăng đột ngột;  $\mathbf{Q}$  và  $\mathbf{R}$  là các ma trận đối xứng xác định dương. Các tín hiệu điều khiển và trạng thái được ràng buộc bởi các

**Bảng 1.** Thông số của cầu trục

Tham số	Giá trị	Đơn vị
$M$	5	kg
$m_1$	2	kg
$m_2$	2	kg
$l_2$	0.2	m
$g$	9.81	$\text{m/s}^2$
$\mu_x$	82	
$\mu_l$	75	

**Bảng 2.** Thông số bộ điều khiển

Tham số	Giá trị
$\lambda$	$\text{diag}(0.75, 0.75)$
$\alpha$	$\text{diag}(-2, -3)$
$\mathbf{K}$	$\text{diag}(0.5, 0.5)$
$N_p$	10
$T_s$	0.2
$\mathbf{U}_{\max}$	$[10, 10]^T$
$\mathbf{q}_{u\max}$	$[0.005, 0.005]^T$

chặn trên và chặn dưới tương ứng  $\mathbf{q}_{\max}^*$ ,  $\mathbf{q}_{\min}^*$  và  $\mathbf{u}_{\max}$ ,  $\mathbf{u}_{\min}$ . Đạo hàm của hàm Lyapunov của hai phương pháp SO-SMC và phương pháp điều khiển LMPC đều tính theo phương trình (13).

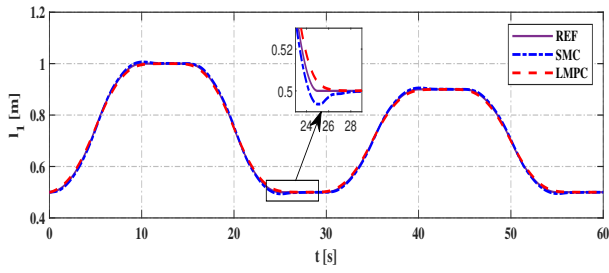
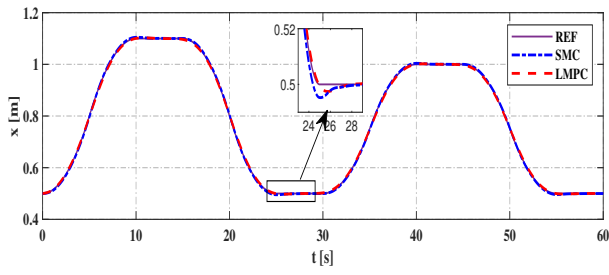
Ràng buộc cuối cùng trong (24) đảm bảo rằng đạo hàm của hàm Lyapunov ứng với tín hiệu điều khiển cần xây dựng ( $\dot{V}_{\text{LMPC}}$ ) luôn nhỏ hơn hoặc bằng đạo hàm của hàm Lyapunov ứng với tín hiệu điều khiển  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{smc}}(t)$  ( $\dot{V}_{\text{SMC}}$ ). Điều này đảm bảo tính ổn định của bộ điều khiển LMPC, đồng thời tốc độ tiến tới quỹ đạo đặt của hệ thống sẽ nhanh hơn so với chỉ dùng bộ điều khiển MPC. Tín hiệu điều khiển sẽ được cập nhật sau mỗi khoảng thời gian  $T_s$  bằng cách xác định được nghiệm tối ưu:

$$\mathbf{u}^*(t) = \text{argmin} J(t)$$

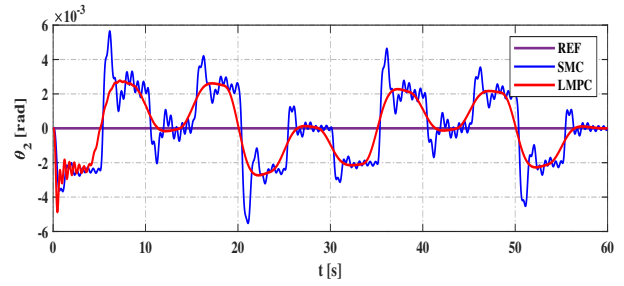
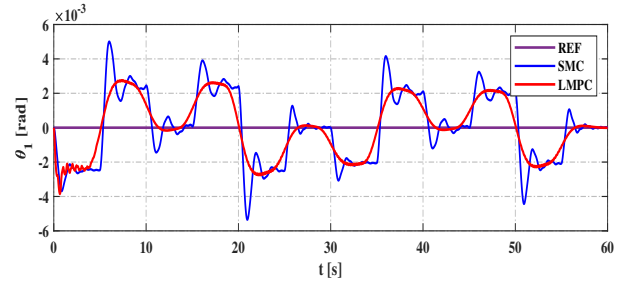
Trong thực nghiệm, quá trình tối ưu hàm  $J$  trong (23) được thực hiện trên bộ tính toán tích hợp *Nonlinear MPC* của phần mềm MATLAB/Simulink.

## 4. Kết quả mô phỏng

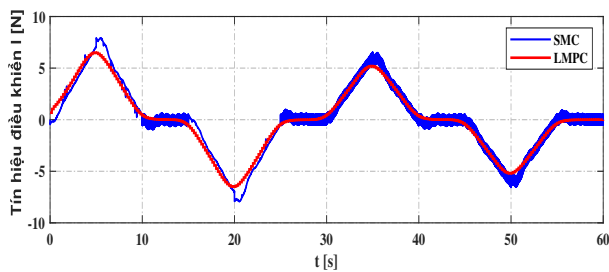
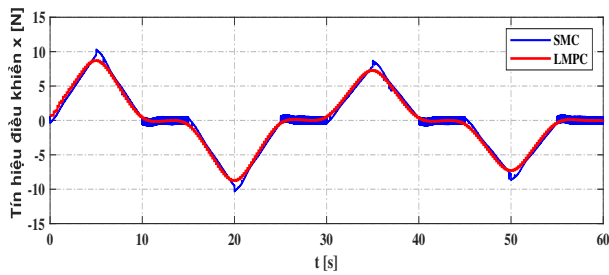
Trong phần này, nhóm tác giả sử dụng mô hình cầu trục với các thông số được cung cấp ở Bảng 1 để đưa ra kết quả mô phỏng nhằm xác minh tính hiệu quả của bài toán theo dõi quỹ đạo áp dụng phương pháp LMPC. Để cho thấy tính vượt trội của phương pháp LMPC, các kết quả so sánh giữa phương pháp LMPC và SMC được cung cấp. Thông số của mặt trượt cũng như của bộ điều khiển dự báo được đề cập trong Bảng 2. Hình 2 hiển thị quỹ đạo theo dõi của các hệ thống, trong đó quỹ đạo đặt  $\mathbf{q}_{ar} = [x_r \quad l_{1r}]^T$  được thiết kế dưới dạng các đường cong hình chữ S. Nó cho thấy quỹ đạo của các trạng thái với bộ điều khiển LMPC đã bám tốt hơn so với bộ điều khiển SMC. Khi các giá trị đặt của hệ thống thay đổi (tại các điểm uốn), thì bộ điều khiển SMC sẽ cần một khoảng thời gian chuyển tiếp để hệ thống có thể bám theo các giá trị đặt, trong khi bộ điều khiển LMPC gần như không cần có khoảng thời gian chuyển tiếp. Như vậy bộ điều khiển LMPC đã điều khiển hệ thống bám sát quỹ đạo đặt. Các góc rung được thể hiện trong Hình 3, với các giá trị đặt bằng 0



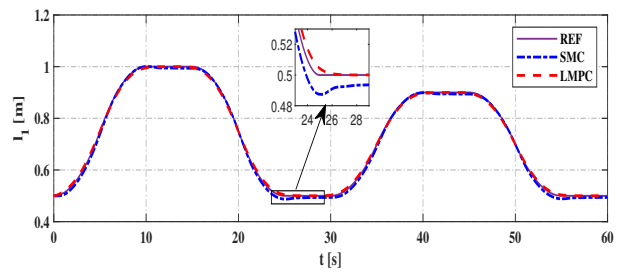
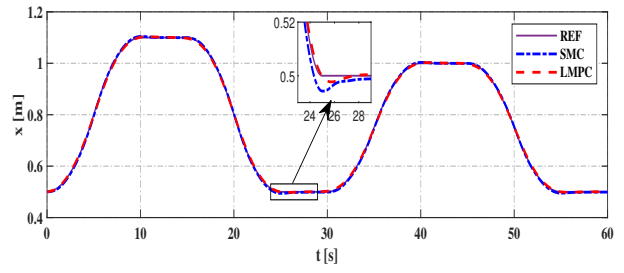
Hình 2. Tín hiệu đầu ra  $x, l_1$



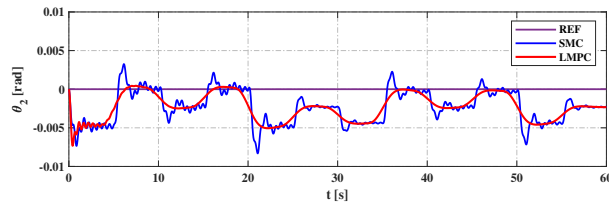
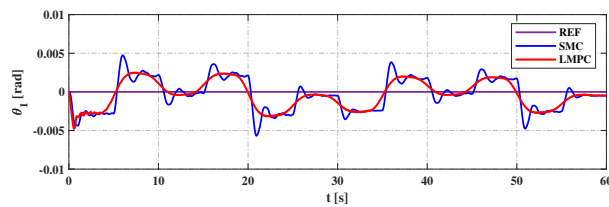
Hình 3. Tín hiệu đầu ra  $\theta_1, \theta_2$



Hình 4. Tín hiệu điều khiển



Hình 5. Tín hiệu đầu ra  $x, l_1$  khi khối lượng tải trọng tăng 10% và có nhiễu hệ thống  $\mathbf{F} = [0.05; 0.02; 0.01; 0.01]$



Hình 6. Tín hiệu đầu ra  $\theta_1, \theta_2$  khi khối lượng tải trọng tăng 10% và có nhiễu hệ thống  $\mathbf{F} = [0.05; 0.02; 0.01; 0.01]$

(rad). Cả hai phương pháp điều khiển đều có góc rung nhỏ, hầu như không xuất hiện trong quá trình thực hiện, hiện tượng rung lắc của SMC xảy ra do các giá trị của  $x, I_1$  không bám theo tốt các giá trị đặt, trong khi đó của LMPC thì cho thấy kết quả tốt hơn rõ rệt.

Hình 4 thể hiện các tín hiệu đầu vào điều khiển cho hệ thống theo hai phương pháp điều khiển SMC và LMPC. Sự khác biệt giữa SMC và LMPC là: SMC có tín hiệu điều khiển dao động khi quỹ đạo đặt thay đổi trong khi tín hiệu vào điều khiển của LMPC là tín hiệu thời gian mẫu.

Thậm chí, khi tải trọng thay đổi có nhiều tác động vào hệ thống, có thể thấy ở Hình 5 và Hình 6 sự vượt trội của LMPC so với SMC vẫn được thể hiện rõ.

Như vậy các vấn đề lớn của SMC đã được LMPC khắc phục khá tốt như độ rung của tải, sự tồn tại của một khoảng thời gian chuyển tiếp khi tín hiệu điều khiển thay đổi theo thời gian và giới hạn của tín hiệu điều khiển. Nhờ sự hiệu quả của LMPC trong thiết kế điều khiển, yêu cầu bám và giảm rung đã đạt được. Trong Hình 2 các giá trị của  $x, I_1$  không bám theo tốt các giá trị đặt và Hình 3 các góc dao động được giới hạn và có được sự ổn định.

## 5. Kết luận

Trong bài báo này, một bộ điều khiển dự báo dựa trên Lyapunov được thiết kế để điều khiển hệ thống cầu trục con lắc đôi với chiều dài dây treo thay đổi, bao gồm theo dõi quỹ đạo và chống rung. Kỹ thuật LMPC được áp dụng để đặt ra các giới hạn cho hệ thống và đảm bảo sự ổn định của vòng kín. Trong thời gian tới, các thí nghiệm trên mô hình thực sẽ được thực hiện để kiểm chứng bộ điều khiển đã thiết kế. Và các phương pháp điều khiển tiên tiến sẽ được tiếp tục nghiên cứu để tích hợp vào LMPC thay thế MPC và SMC nhằm nâng cao chất lượng của các bộ điều khiển vòng kín.

## Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Đại học Bách khoa Hà Nội (HUST) trong đề tài mã số T2022-PC-003.

## Tài liệu

- [1] Tuan, L. A., Lee, S. G., Dang, V. H., Moon, S., Kim, B. "Partial feedback linearization control of a three-dimensional overhead crane." *International Journal of Control, Automation, and Systems*, (2013) 11(4), 718–727.
- [2] Thomas Erneux and Tamás Kalmár-Nagy, "Nonlinear stability of a delayed feedback controlled container crane". *Journal of Vibration and Control* (2007). 13(5): p. 603-616.
- [3] Sun, N, Wu, Y, Chen, H, "An energy-optimal solution for transportation control of cranes with double pendulum dynamics: Design and experiments". *Mechanical Systems and Signal Processing*(2018), 87–101, 102
- [4] Kazuo Kawada, et al, "Robust PD sway control of a lifted load for a crane using a genetic algorithm". *IEEJ Transactions on Industry Applications* (2004). p:1097-1103, 123.
- [5] Tuan LA, Moon SC, Kim DH, Lee SG (2012) "Adaptive sliding Mode control of three-dimensional overhead cranes". *IEEE international conference on cyber technology in Automation, control, and intelligent systems*(2012) pp 354–359
- [6] Tuan L, Lee S, "Sliding mode controls of double-pendulum crane systems" *Journal of Mechanical Science and Technology*, (2013), 1863-1873, 27(6)
- [7] Lu B, Fang Y, Sun N "Sliding mode control for underactuated overhead cranes suffering from both matched and unmatched disturbances." *Mechatronics* (2017) 47:116–125
- [8] Qian, D, Tong, S, Lee, S. "Fuzzy-Logic-based control of payloads subjected to double-pendulum motion in overhead cranes." *Automation in Construction* (2016), 133–143, 65
- [9] Huang, J, Liang, Z, Zang, Q. "Dynamics and swing control of double-pendulum bridge cranes with distributed-mass beams." *Mechanical Systems and Signal Processing* (2015), 357–366, 102
- [10] Ouyang, H, Xu, X, Zhang, G. "Tracking and load sway reduction for double-pendulum rotary cranes using adaptive nonlinear control approach." *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (2020), 1872–1885, 30(5)
- [11] Mateus de Freitas Virgilio Pereira, Ilya V. Kolmanovsky, Carlos E.S. Cesnik. *Nonlinear Model Predictive Control with aggregated constraints. Automatica*, 146, (2022): 110649
- [12] Jason Bettega, Dario Richiedei. Trajectory tracking in an underactuated, non-minimum phase two-link multibody system through model predictive control with embedded reference dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 180 (2023) 105165
- [13] Tae Hoon Oh, Jong Woo Kim, Sang Hwan Son, Dong Hwi Jeong, Jong Min Lee. Multi-strategy control to extend the feasibility region for robust model predictive control. *Journal of Process Control*, 116 (2022), pp:25–33
- [14] Zhang M, Zhang Y, Cheng X "Method for Underactuated Double-pendulum Overhead Crane Systems." *International Journal of Control, Automation, and Systems*, (2019), 1579-1588, 17(6)
- [15] Zhang, M, Ma, X, Chai, H, Rong, X, Tian, "A novel online motion planning method for double-pendulum overhead cranes." *Nonlinear Dynamics*(2016) 1079–1090, 85(2).
- [16] Jaafar, H. I, Mohamed, Z, Shamsudin, M. A., Mohd Subha, N. A., Ramli, L., Abdullahi, A. M. "Model reference command shaping for vibration control of multimode flexible systems with application to a double-pendulum overhead crane." *Mechanical Systems and Signal Processing*(2019), 677–695, 115
- [17] Ouyang, H, Hu, J, Zhang, G, Mei, L, Deng, X. "Decoupled linear model and S-shaped curve motion trajectory for load sway reduction control in overhead cranes with double-pendulum effect." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, (2019), 3678–3689, 10
- [18] Masoud, Z, Alhazza, K, Abu-Nada, E, Majeed, M. "A hybrid command-shaper for double-pendulum overhead cranes." *Journal of Vibration and Control*, (2014), 24–37, 10(1)