

Mô hình phi tuyến nước nông mô phỏng dòng chảy sau vỡ đập trên nền đáy hạ lưu phức tạp dùng hệ tọa độ (b, s)

Nguyễn Hữu Văn, Phạm Trung Cảnh, Lại Văn Quyền, Phạm Thị Nga, Phạm Văn Khôi*

Trường Đại học Hàng hải Việt Nam, 484 Lạch Tray, phường Kênh Dương, quận Lê Chân, TP Hải Phòng, Việt Nam

Ngày nhận bài 23/1/2023; ngày chuyển phân biện 25/1/2023; ngày nhận phân biện 21/2/2023; ngày chấp nhận đăng 25/2/2023

Tóm tắt:

Trong điều kiện khí tượng bất thường hiện nay, mô phỏng dòng chảy ngập lụt đô thị đang là bài toán ứng dụng thực tiễn rất cao trong tính toán dự báo thiên tai của mỗi quốc gia, đặc biệt là những quốc gia chịu ảnh hưởng lớn từ biến đổi khí hậu như Việt Nam. Bài báo nghiên cứu xây dựng một mô hình số mô phỏng dòng chảy sau vỡ đập trên nền đáy hạ lưu phức tạp, có khả năng ứng dụng cao trong mô phỏng dự báo ngập lụt đô thị. Mô hình số sử dụng hệ phương trình phi tuyến nước nông dùng hệ tọa độ (b, s) có ưu điểm đơn giản nhưng hiệu quả trong mô phỏng các hiện tượng dòng chảy không nén được. Phương pháp hỗn hợp thể tích - sai phân hữu hạn và phương pháp tường minh Runge - Kutta 3 bước bậc 3 được sử dụng để rời rạc hóa hệ phương trình chủ đạo tương ứng theo không gian và thời gian. Mô hình số được kiểm chuẩn với kết quả từ mô hình giải tích và mô hình vật lý cho bài toán đáy hạ lưu đơn giản. Với trường hợp đáy hạ lưu phức tạp, mô hình tiếp tục mô phỏng chính xác tốc độ và chiều sâu dòng chảy cho trường hợp đáy gồ ghề và đáy nghiêng nhám.

Từ khóa: đáy phức tạp, hệ phương trình phi tuyến nước nông, mô hình số, mô hình vật lý, mô phỏng vỡ đập.

Chỉ số phân loại: 1.8, 2.1

A nonlinear shallow water model simulating dam-break flow over complex downstream beds using (b, s) coordinate

Huu Van Nguyen, Trung Canh Pham, Van Quyen Lai, Thi Nga Pham, Van Khoi Pham*

Vietnam Maritime University, 484 Lach Tray Street, Kanh Duong Ward, Le Chan District, Hai Phong City, Vietnam

Received 23 January 2023; revised 21 February 2023; accepted 25 February 2023

Abstract:

Under the current abnormal meteorological conditions, urban flood flow simulation is an efficient problem in disaster prediction calculations for every country, especially those significantly impacted by climate change, such as Vietnam. This article presents the development of a numerical model simulating flow after a dam break on complex downstream beds, with high applicability in urban flood forecasting. The numerical model uses the shallow water nonlinear equations employing the (b, s) coordinates and has the advantage of being simple but effective in simulating incompressible flow phenomena. The hybrid finite volume-the finite difference method and the explicit three-stage, third-order Runge-Kutta method are used to discretise the governing equations in space and time, respectively. The numerical model is validated with results from analytical models and physical models for the problem with a simple downstream bed. For complex downstream bed cases, the model accurately simulates flow velocity and flow depth for both hump and rough inclined beds.

Keywords: complex bed, dam-break simulation, numerical model, physical model, shallow water equations.

Classification numbers: 1.8, 2.1

*Tác giả liên hệ: Email: khoipv.ctt@vimaru.edu.vn

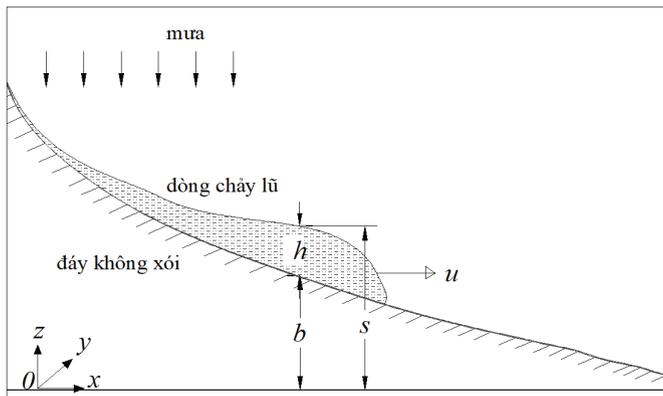
1. Đặt vấn đề

Bài toán mô phỏng vỡ đập (dam-break simulation) được ứng dụng phổ biến trong thực tế cho vấn đề dự báo thiên tai, ứng phó với biến đổi khí hậu ngày càng gia tăng ở các quốc gia trên thế giới [1-4]. Đặc biệt, dòng chảy sau vỡ đập hình thành dòng chảy lũ ở đáy hạ lưu tác động lên cơ sở hạ tầng và đô thị, đe dọa tính mạng, nhà cửa và tài sản của người dân. Để mô phỏng vỡ đập, ngoài mô hình giải tích [5, 6] và mô hình vật lý [7, 8] thì mô hình số [9, 10] được xem là có ưu thế hơn vì dễ dàng sử dụng và ít tốn kém. Trong mô hình số, tùy theo kích thước của miền tính toán để chia và lựa chọn các mô hình, như một chiều [1, 11], hai chiều [12], ba chiều [13, 14]. Mô hình nhiều chiều thì cho kết quả tính toán có độ chính xác cao hơn nhưng thời gian mô phỏng và tài nguyên máy tính thường yêu cầu cao. Do đó, trong một số bài toán cụ thể, mô hình một chiều thường được sử dụng vì độ chính xác khá phù hợp và không yêu cầu cao về tài nguyên. Hầu hết các mô hình mô phỏng dòng chảy lũ sử dụng biến chiều sâu dòng chảy theo hệ tọa độ địa phương [15-18], các nghiên cứu sử dụng hệ tọa độ (b, s) còn khá hạn chế.

Bài báo trình bày kết quả nghiên cứu là một mô hình số sử dụng hệ phương trình phi tuyến nước nông [15, 19, 20] dùng hệ tọa độ (b, s) , trong đó b là cao độ đáy không xói, s là cao độ mặt nước tính từ mặt phẳng chuẩn. Đây là một dạng của hệ tọa độ tổng thể, dễ dàng xác định được mặt đáy và mặt nước trong tính toán mô phỏng mà không phải chuyển đổi như sử dụng hệ tọa độ địa phương [21]. Mô hình số đề xuất được kiểm chuẩn với mô hình giải tích và mô hình vật lý cho trường hợp đáy phẳng để thấy được độ chính xác cao. Với trường hợp đáy phức tạp, mô hình tiếp tục mô phỏng và đối sánh với thí nghiệm vật lý cho trường hợp đáy gồ ghề và đáy nghiêng nhám.

2. Mô hình phi tuyến nước nông

2.1. Hệ phương trình chủ đạo



Hình 1. Sơ đồ và các biến tính toán mô hình phi tuyến nước nông trong hệ tọa độ (b, s) .

Hệ phương trình chủ đạo của mô hình số mô phỏng sóng nước sau vỡ đập là hệ phương trình phi tuyến nước nông một chiều dưới dạng bảo toàn dùng hệ tọa độ (b, s) (hình 1) [10] như sau:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial[(s-b)u]}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(s-b)u] + \frac{\partial}{\partial x}\left[(s-b)u^2 + \frac{1}{2}g(s-b)^2\right] = g(s-b)\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{n^2 u^2}{(s-b)^{4/3}}\right) \quad (2)$$

trong đó: s (m) và b (m) tương ứng là cao độ mặt nước và cao độ đáy; u (m/s) là vận tốc trung bình theo chiều đứng của phần tử nước theo phương ngang; ∂ : vi phân từng phần; g : gia tốc trọng trường; $-\partial b/\partial x$ là thành phần nguồn thể hiện độ dốc đáy; n là hệ số nhám Manning thể hiện thành phần lực cản do ma sát bề mặt. Hệ phương trình chủ đạo trên là dạng không thuần nhất (inhomogenous), dạng thuần nhất (homogenous) được thiết lập bằng cách bỏ đi thành phần nguồn ở vế phải của phương trình động lượng (2).

2.2. Phương pháp giải

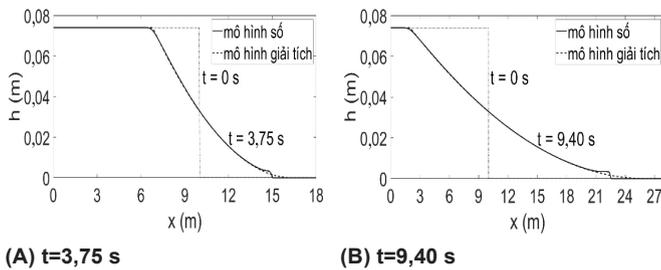
Để giải tích phân hệ phương trình (1), (2) của mô hình vỡ đập theo thời gian, phương pháp tường minh Runge-Kutta 3 bước bậc 3 được sử dụng [22]. Phương pháp này cho độ chính xác với bước thời gian đủ nhỏ và được ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực mô phỏng dòng chảy. Để giải tích phân hệ phương trình chủ đạo theo không gian, phương pháp hỗn hợp thể tích hữu hạn - sai phân hữu hạn được sử dụng. Phương pháp này gần đây được sử dụng phổ biến như sự kết hợp giữa bài toán có điều kiện ban đầu không liên tục và liên tục [23]. Trong đó, phương pháp thể tích hữu hạn áp dụng giải thành phần thông lượng cho điều kiện bề mặt không liên tục, còn phương pháp sai phân hữu hạn áp dụng giải thành phần nguồn có độ dốc đáy liên tục.

3. Kiểm chuẩn mô hình

Lời giải số là lời giải gần đúng khi rời rạc hóa hệ phương trình vi phân (1) và (2) theo không gian và thời gian [23]. Độ chính xác của lời giải phụ thuộc vào phương pháp giải gần đúng. Trong khi lời giải giải tích là lời giải chính xác khi sử dụng các hàm toán học, còn kết quả thí nghiệm vật lý thể hiện dòng chảy thực tế trong điều kiện biên thực. Tuy nhiên, lời giải giải tích có hạn chế khi các điều kiện biên quá phức tạp hoặc tính chất dòng chảy phi tuyến bậc cao, còn mô hình vật lý thường khá tốn kém khi xây dựng. Vì vậy, mô hình số vẫn là mô hình đã và đang được sử dụng rộng rãi khi có thí nghiệm kiểm chuẩn với lời giải giải tích hoặc mô hình vật lý. Trong nghiên cứu này, kết quả của mô hình số ở dạng thuần nhất được kiểm chuẩn với lời giải giải tích và mô hình số ở dạng không thuần nhất được kiểm chuẩn với kết quả của mô hình vật lý.

3.1. Kiểm chuẩn với mô hình giải tích

Hệ phương trình chủ đạo (1), (2) dưới dạng thuần nhất (bỏ qua thành phần nguồn ở vế phải) và mô hình giải tích trong tài liệu [5] được giải với cùng điều kiện biên và điều kiện ban đầu để có thể kiểm chuẩn một cách chính xác. Miền tính toán là dài 28 m trong đó cửa đập được đặt ở khoảng cách 10 m so với biên trái. Chiều cao cột nước ban đầu là 7,4 cm, điều kiện biên trái là tường cứng còn điều kiện biên phải là cửa chảy tự do. Các kết quả được kiểm chuẩn ở hai thời điểm khác nhau là $t=3,75$ s và 9,4 s như thể hiện trên hình 2.



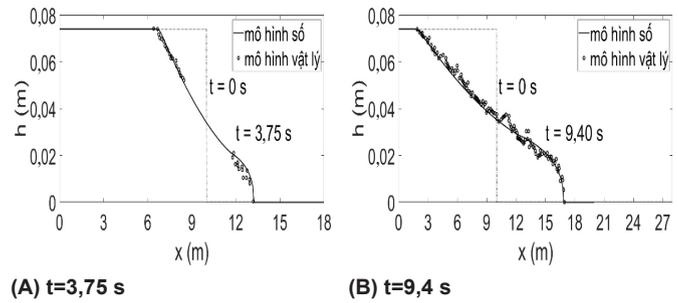
Hình 2. Kiểm chuẩn mô hình số với mô hình giải tích.

Trên hình 2, kết quả của mô hình số và mô hình giải tích tại hai thời điểm khác nhau là hoàn toàn trùng khớp, ngoại trừ mép phải của lời giải số không được cong tròn như lời giải giải tích. Điều này có thể lý giải do lời giải số phải giả sử chiều cao cột nước dung sai ở đáy khô là 10^{-6} m để cho nghiệm của bài toán được liên tục. Chiều cao dung sai này sẽ phát sinh sai số dẫn đến kết quả không cong tròn trên. Tuy nhiên, sai số này là tương đối nhỏ và có thể chấp nhận được. Từ đó có thể thấy mô hình số ở dạng thuần nhất mô phỏng khá phù hợp so với mô hình giải tích.

3.2. Kiểm chuẩn với mô hình vật lý

Mô hình vật lý được sử dụng trong nghiên cứu này là mô hình một chiều (kích thước chiều dài lớn hơn nhiều so với chiều rộng và chiều cao) trong tài liệu [7]. Trong thí nghiệm này, một máng nước đặt phẳng có chiều dài 18 m được thiết lập, trong đó 10 m dài biên trái được đổ nước với chiều cao 7,4 cm và ngăn cách với ngăn khô bên phải bằng một cửa kín nước. Cửa sẽ được mở trong một khoảng thời gian đủ ngắn để đảm bảo điều kiện cả khối nước sẽ đổ xuống cùng một thời điểm như điều kiện ban đầu cho bài toán vỡ đập. Đường mặt nước sau khi vỡ đập sẽ được mô phỏng tại các bước thời gian khác nhau.

Để kiểm chuẩn với mô hình vật lý, hệ phương trình chủ đạo đầy đủ của mô hình số được giải xấp xỉ và kiểm chuẩn ở cùng một bước thời gian với kết quả từ mô hình vật lý như thể hiện trên hình 3. Miền tính toán, điều kiện biên và điều kiện ban đầu được xác định giống như bài toán kiểm chuẩn với mô hình giải tích. Hệ số nhám Manning được chọn là $0,01 \text{ m}^{-1/3}$ theo đặc điểm của bề mặt đáy thí nghiệm.



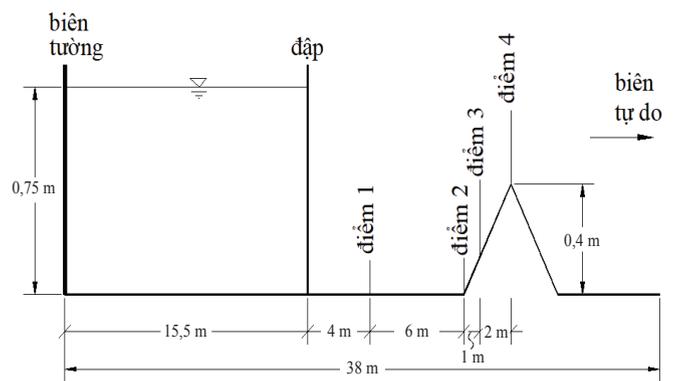
Hình 3. Kiểm chuẩn mô hình số với mô hình vật lý.

Trên hình 3, tại các thời điểm rất ngắn ngay sau vỡ đập $t=3,75$ s hay một khoảng thời gian dài sau vỡ đập $t=9,4$ s, kết quả đường mặt nước từ mô hình số đều có sự phù hợp với kết quả từ thí nghiệm mô hình vật lý. Điều này chứng tỏ mô hình số mô phỏng đường mặt nước sau vỡ đập là chính xác về bản chất chuyển động vật lý của dòng nước. Mô hình số được đề cập đến trong nghiên cứu này chính xác về mặt toán học và vật lý, có thể ứng dụng để mô phỏng những bài toán vỡ đập trong thực tế. Có thể dễ dàng nhận thấy, so với lời giải của mô hình giải tích, vận tốc dòng chảy chậm hơn và đường mặt nước bên phải không cong tròn do ảnh hưởng của ma sát đáy. Điều này cũng hoàn toàn logic về mặt cơ học.

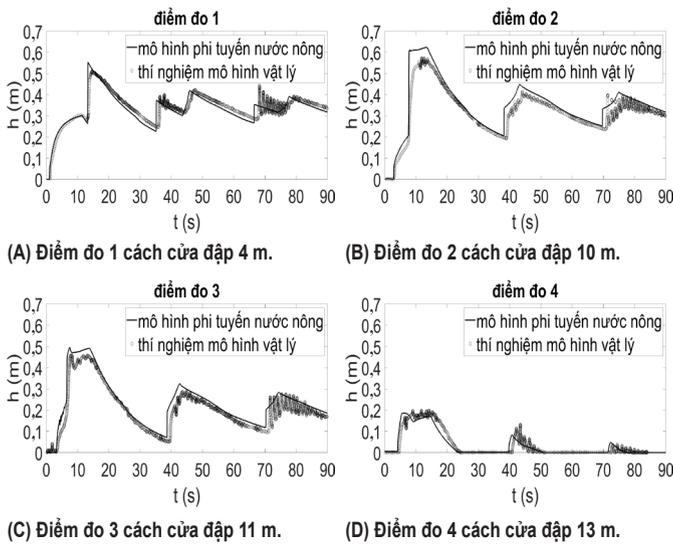
4. Kết quả mô phỏng cho đập phức tạp

4.1. Đáy gồ ghề

Mô hình số được ứng dụng để mô phỏng dòng chảy sau vỡ đập qua đáy gồ ghề. Đây là thí nghiệm mô hình vật lý tỷ lệ lớn [1], miền tính toán dài 38 m, cửa đập cách đáy thượng lưu 15,5 m. Chiều cao nước phía đập là 0,75 m, sau đập là đáy khô. Phía đáy hạ lưu đập xuất hiện một đáy tam giác cân nhô cao 0,4 m, rộng 6 m và đỉnh tam giác cách cửa đập 13 m. Các thông số mô hình được thiết lập: biên trái là tường, biên phải là tự do, hệ số nhám Manning là $0,0125 \text{ m}^{-1/3}$, kích thước lưới là 5 cm và thời gian mô phỏng là 90 s. Kết quả mô phỏng chiều cao dòng chảy theo thời gian của mô hình số được so sánh với kết quả từ mô hình vật lý [1] tại 4 điểm đo cách cửa lần lượt 4, 10, 11 và 13 m như thể hiện trên hình 4. Điểm đo 1 và 2 nằm trên đáy bằng, điểm đo 3 nằm trên mái dốc trái của tam giác và điểm đo 4 nằm trên đỉnh tam giác.



Hình 4. Miền tính toán mô phỏng dòng chảy trên nền đáy hạ lưu gồ ghề [1].



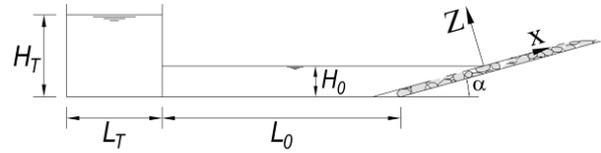
Hình 5. Kết quả mô phỏng dòng chảy trên nền đáy hạ lưu gồ ghề với kết quả từ thí nghiệm vật lý [8].

Hình 5 thể hiện kết quả mô phỏng số và số liệu thí nghiệm vật lý của chiều sâu dòng chảy theo thời gian. Nhìn chung, kết quả từ mô hình số khá phù hợp với số liệu thí nghiệm, cho thấy mô hình phi tuyến nước nông mô phỏng được khá tốt hiện tượng dòng chảy phức tạp này. Ở những bước thời gian đầu, ngay sau khi vỡ đập, nước sẽ chảy từ bề thượng lưu về hạ lưu như dòng chảy lũ. Khi dòng chảy gặp mái dốc trái của đáy tam giác, nước sẽ leo lên mái dốc trái và vượt qua đỉnh tam giác chảy tràn sang mái dốc phải và thoát ra ngoài biên tự do một phần. Dưới tác dụng của đáy tam giác, dòng chảy sẽ hình thành sóng phản xạ truyền về phía biên thượng lưu. Sóng gặp biên thượng lưu sẽ phản xạ lại nguyên vẹn và tạo sóng tới truyền về phía đáy hạ lưu, quá trình lặp lại đến khi mực nước không vượt qua được đỉnh đáy tam giác hạ lưu. Theo kết quả mô phỏng ở điểm đo 2, 3 và 4, trong khoảng 90 s mô phỏng, hình thành 3 con sóng phản xạ tại các thời điểm tương ứng $t = 10$ s, 40 s và 70 s. Từ kết quả mô phỏng cho trường hợp đơn giản này, mô hình số có thể mô phỏng chính xác cho các trường hợp ngập lụt phức tạp hơn phía hạ lưu như khu đô thị hay công trình cơ sở hạ tầng.

4.2. Đáy mái nghiêng nhám

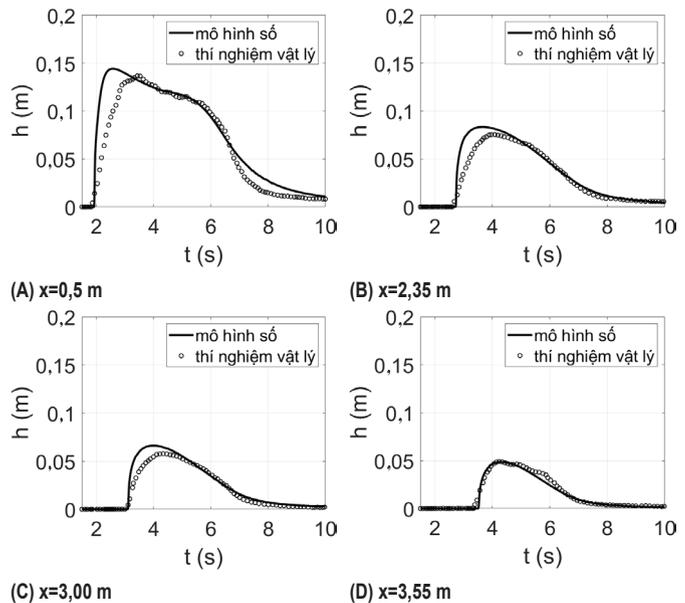
Để tiếp tục kiểm chứng mô hình đã phát triển, nhóm nghiên cứu tiến hành mô phỏng sóng leo và sóng rút trên bãi nghiêng nhám và so sánh với kết quả thí nghiệm từ mô hình vật lý [16] được thể hiện trên hình 6. Chiều cao cột nước ban đầu $H_T = 0,65$ m với chiều rộng $L_T = 1$ m, độ sâu nước phía bãi $H_0 = 0,06$ m, với chiều rộng $L_0 = 3,8$ m. Độ nhám của bãi được tạo ra bằng cách sử dụng 1 lớp đá cuội nhỏ có đường kính $d = 5 \div 6$ mm xếp phía trên mái dốc cứng có độ dốc tan $\alpha = 0,1$. Hệ số nhám Manning được sử dụng trong tính toán là $n = 0,028 m^{-1/3}$. Cột nước ban đầu sau khi đổ xuống sẽ tạo

dòng chảy lan truyền ở phần nước hạ lưu, sau đó dòng chảy sẽ tạo sóng leo lên mái dốc khô theo trục x như hình 6. Kết quả mô hình được so sánh với số liệu thí nghiệm tại 4 vị trí $x = 0,5$ m, 2,35 m, 3,0 m, 3,55 m.



Hình 6. Thí nghiệm sóng leo lên đáy nghiêng nhám [16].

Hình 7 thể hiện mô hình số đã mô phỏng thành công hiện tượng dòng chảy phía hạ lưu hình thành sóng leo trên bãi nhám tại 4 vị trí khác nhau. Trong đó, sự phù hợp được thể hiện cả về vận tốc sóng leo và chiều cao sóng leo. Đặc biệt, tại vị trí cao nhất, vị trí $x = 3,55$ m, hầu như không có sự sai lệch giữa kết quả mô hình số hiện tại và số liệu thí nghiệm. Kết quả cũng cho thấy hiệu quả của mô hình khi mô phỏng thực tế hiện tượng lũ lụt phía hạ lưu là những dạng địa hình mái nghiêng như bãi biển, sườn núi... trong thực tế. Từ đó, có thể cho thấy khả năng ứng dụng của mô hình phi tuyến nước nông trong việc mô phỏng các địa hình khác nhau phía hạ lưu.



Hình 7. Kết quả mô phỏng chiều cao sóng leo và sóng rút trên mái dốc nhám với kết quả thí nghiệm vật lý [16].

5. Kết luận

Bài báo đã nghiên cứu xây dựng được một mô hình phi tuyến nước nông mô phỏng dòng chảy sau vỡ đập trên nền đáy hạ lưu phức tạp. Mô hình phi tuyến nước nông dùng hệ tọa độ (b, s) có thể mô phỏng các địa hình thực tế nhờ thêm vào thành phần độ dốc và độ nhám đáy trong hệ phương

trình chủ đạo. Lời giải số áp dụng phương pháp hỗn hợp thể tích - sai phân hữu hạn nhằm phát huy tối đa ưu điểm của từng phương pháp. Mô hình số thiết lập được kiểm chuẩn với mô hình giải tích cho dạng thuần nhất và với mô hình vật lý cho dạng đầy đủ. Mô hình sau kiểm chuẩn được tiếp tục mô phỏng cho hai trường hợp đáy hạ lưu phức tạp. Với trường hợp đáy hạ lưu gồ ghề, mô hình mô phỏng chính xác về vận tốc và chiều cao dòng chảy khi gặp vật cản có kích thước hình tam giác. Với trường hợp đáy nghiêng nhám, hiện tượng sóng leo và sóng rút được mô phỏng phù hợp với bản chất vật lý của dòng chảy. Mô hình hai chiều có thể được phát triển trong tương lai để có thể mô phỏng cho một lưu vực bị ngập lụt trong thực tế.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số SV22-23.33. Các tác giả xin chân thành cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] F. Belkhandoun, L. Monthe, I. Elmahi (1999), "A splitting finite volume Roe scheme for shallow water equations with source terms", *Concerted Action on Dam-Break Modelling*, Wallingford, United Kingdom, pp.63-88.
- [2] D. Liang (2010), "Evaluating shallow water assumptions in dam-break flows", *Proc. Inst. Civ. Eng. - Water Manag.*, **163(5)**, pp.227-237, DOI: 10.1680/wama.2010.163.5.227.
- [3] P.V. Khoi, V.N. Vu, C. Lee (2020), "Numerical simulation of tsunami due to submarine landslide using extended Boussinesq equations", *Proc. 10th Int. Conf. Asian Pac. Coasts APAC 2019 Hanoi Vietnam* (in Vietnamese).
- [4] P.V. Khoi (2022a), "Integrated numerical model of submarine landslide-induced tsunami: Verification to one-dimensional domain", *Journal of Marine Science and Technology*, **69**, pp.62-66 (in Vietnamese).
- [5] A. Mangeney, P. Heinrich, R. Roche (2000), "Analytical solution for testing debris avalanche numerical models", *Pure Appl. Geophys.*, **157(6-8)**, pp.1081-1096, DOI: 10.1007/s000240050018.
- [6] C. Ancey, R.M. Iverson, M. Rentschler, et al. (2008), "An exact solution for ideal dam-break floods on steep slopes: Dam-break problem on sloping bed", *Water Resour. Res.*, **44(1)**, pp.1-10, DOI: 10.1029/2007WR006353.
- [7] A. Schoklitsch (1917), "Dam break waves", *Proceedings of The Royal Academy of Sciences*, **126**, pp.1489-1514 (in German).
- [8] A.F. Khankandi, A. Tahershamsi, S.S. Frazão (2012), "Experimental investigation of reservoir geometry effect on dam-break flow", *J. Hydraul. Res.*, **50(4)**, pp.376-387, DOI: 10.1080/00221686.2012.690974.
- [9] Q. Liang, F. Marche (2009), "Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms", *Adv. Water Resour.*, **32(6)**, pp.873-884, DOI: 10.1016/j.advwatres.2009.02.010.
- [10] P.V. Khoi, C. Lee, V.N. Vu (2019), "Numerical simulation of subaerial and submarine landslides using the finite volume method in the shallow water equations with (b, s) coordinate", *J. Korean Soc. Coast. Ocean Eng.*, **31(4)**, pp.229-239, DOI: 10.9765/KSCOE.2019.31.4.229.
- [11] J. Paik (2015), "A high resolution finite volume model for 1D debris flow", *J. Hydro-Environ. Res.*, **9(1)**, pp.145-155, DOI: 10.1016/j.jher.2014.03.001.
- [12] X. Xia, Q. Liang (2018), "A new depth-averaged model for flow-like landslides over complex terrains with curvatures and steep slopes", *Eng. Geol.*, **234**, pp.174-191, DOI: 10.1016/j.enggeo.2018.01.011.
- [13] P.V. Khoi, V.V. Nghi (2021), "Flow-3D model: Theory, verification and application to simulate siphon spillways", *Journal of Marine Science and Technology*, **67**, pp.73-77 (in Vietnamese).
- [14] P.V. Khoi, P.T. Nga, D.T.H. Ngoc (2022b), "Flow-3D model: Air vent tool and application to control the outflow discharge of siphon spillways", *Journal of Marine Science and Technology*, **69**, pp.57-61 (in Vietnamese).
- [15] S. Nickovic, G. Pejanovic, V. Djurdjevic, et al. (2010), "HYPRON hydrology surface-runoff prognostic model: Hydrology prognostic model", *Water Resour. Res.*, **46(11)**, pp.1-18, DOI: 10.1029/2010WR009195.
- [16] T. O'Donoghue, D. Pokrajac, L.J. Hondebrink (2010), "Laboratory and numerical study of dam-break-generated swash on impermeable slopes", *Coast. Eng.*, **57(5)**, pp.513-530, DOI: 10.1016/j.coastaleng.2009.12.007.
- [17] V.M. Dansac, C. Berthon, S. Clain, et al. (2017), "A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography or Manning friction", *J. Comput. Phys.*, **335**, pp.115-154, DOI: 10.1016/j.jcp.2017.01.009.
- [18] J. Hou, T. Wang, P. Li, et al. (2018), "An implicit friction source term treatment for overland flow simulation using shallow water flow model", *J. Hydrol.*, **564**, pp.357-366, DOI: 10.1016/j.jhydrol.2018.07.027.
- [19] J.S. O'Brien, P.Y. Julien, W.T. Fullerton (1993), "Two-dimensional water flood and mudflow simulation", *J. Hydraul. Eng.*, **119(2)**, pp.244-261, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1993)119:2(244).
- [20] J. Xia, R.A. Falconer, B. Lin, et al. (2010), "Modelling flood routing on initially dry beds with the refined treatment of wetting and drying", *Int. J. River Basin Manag.*, **8(3-4)**, pp.225-243, DOI: 10.1080/15715124.2010.502121.
- [21] E.D.F. Nieto, F. Bouchut, D. Bresch, et al. (2008), "A new savage-hutter type model for submarine avalanches and generated tsunami", *J. Comput. Phys.*, **227(16)**, pp.7720-7754, DOI: 10.1016/j.jcp.2008.04.039.
- [22] D. Dutykh, T. Katsounis, D. Mitsotakis (2011), "Finite volume schemes for dispersive wave propagation and runup", *J. Comput. Phys.*, **230(8)**, pp.3035-3061, DOI: 10.1016/j.jcp.2011.01.003.
- [23] E.F. Toro (2001), *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, John Wiley & Sons, 328pp.