

SỬ DỤNG CÔNG CỤ EXCEL SOLVER TRONG TỐI ƯU HÓA KẾT CẤU

USING EXCEL SOLVER FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION

Trần Lan Phương Thảo, Phạm Hồng Hạnh

Tóm tắt:

Tối ưu hóa là quá trình nhằm thu được kết quả tốt nhất trong hoàn cảnh đã cho. Trong thiết kế, xây dựng và vận hành hệ thống kỹ thuật, các kỹ sư phải đưa ra nhiều quyết định kỹ thuật và quản trị tại nhiều giai đoạn. Mục đích cuối cùng của các quyết định trên là nhằm giảm thiểu các nỗ lực và đạt được lợi ích lớn nhất. Rất nhiều các phương pháp tối ưu đã được phát triển nhằm giải quyết các dạng khác nhau của bài toán tối ưu. Bài báo giới thiệu cách xây dựng bài toán tối ưu tính toán kết cấu và các kỹ thuật giải bài toán tối ưu như thuật toán đơn hình, giải thuật tiến hóa và phương pháp giảm gradient tổng quát. Ví dụ tính toán kết cấu giàn bằng phương pháp tối ưu được trình bày và cách ứng dụng công cụ Solver trong Excel để giải quyết bài toán.

Từ khóa: Tối ưu hóa kết cấu, tối ưu hóa xây dựng.

Abstract:

Optimization is the process of obtaining the best result under given circumstances. In the design, construction, and maintenance of any engineering system, engineers must take many technological and managerial decisions at several stages. The goal of all such decisions is either to minimize the effort required or to maximize the desired benefit. Several optimization methods have been developed for solving different types of optimization problems. The article introduces how to build the optimization problem for structural computation and the optimization problem-solving techniques such as the simplex algorithms, evolutionary algorithms, and the generalized reduced gradient methods. An example of calculating truss structure using the optimal method and how to apply the Solver tool in Excel to solve the problem are presented.

Keywords: Structural optimization, civil engineering optimization.

1. Giới thiệu

Các phương pháp tối ưu đã xuất hiện từ thời của các nhà khoa học như Newton, Lagrange và Cauchy. Những đóng góp của Newton và Leibnitz trong lĩnh vực giải tích đã giúp phát triển các phương pháp vi phân tối ưu hóa. Bernoulli, Euler, Lagrange, và Weierstrass đã đặt nền tảng cho phép tính biến phân liên quan đến cực tiểu hóa các hàm. Lagrange đưa ra phương pháp giải tối ưu cho các bài toán có ràng buộc bao gồm các phép nhân của biến. Cauchy thực hiện ứng dụng đầu tiên của phương pháp suy giảm nhanh để giải bài toán cực tiểu hóa không ràng buộc. Phương pháp đơn hình được phát triển bởi Dantzig năm 1947 để giải các bài toán tối ưu quy hoạch tuyến tính. Năm 1957, Bellman [1] phát biểu các nguyên tắc tối ưu cho bài toán quy hoạch động. Năm 1951 Kuhn và Tucker [2] đưa ra các điều kiện cần và đủ cho các lời giải tối ưu, đặt nền tảng cho các bài toán quy hoạch phi tuyến. Đầu thập niên 1960, Zoutendijk [3] và Rosen [4,5] đóng góp phát triển các tính toán giải bài toán phi tuyến. Carroll [6] và Fiacco và McCormick [7] đã giải quyết rất nhiều bài toán phi tuyến khó bằng cách sử dụng các kỹ thuật của bài toán tối ưu không ràng buộc. Duffin, Zener và Peterson [8] đã phát triển các phương pháp quy hoạch hình học. Gomory [9] là người tiên phong

ThS. Trần Lan Phương Thảo

ThS. Phạm Hồng Hạnh

Khoa Xây dựng - Trường ĐHXD Miền Tây

Email: tranlanphuongthao @mtu.edu.vn

ĐT: 0908 511 394

Ngày nhận bài: 16/5/2022

Ngày gửi phản biện: 01/6/2022

Ngày chấp nhận đăng: 07/6/2022

trong các bài toán quy hoạch nguyên. Dantzig và Charnes và Cooper [10] phát triển các kỹ thuật quy hoạch ngẫu nhiên.

Thuật toán di truyền là thuật toán tìm kiếm và tối ưu hóa trên máy tính dựa trên cơ học của di truyền tự nhiên và chọn lọc tự nhiên. Thuật toán di truyền đầu tiên được đề xuất bởi John Holland vào năm 1975 [11]. Phương pháp giảm gradient tổng quát (GRG: generalized reduced gradient) được phát triển bởi Wolfe [12] dựa trên phương pháp giảm gradient nhằm giải quyết các bài toán tối ưu phi tuyến.

Trong lĩnh vực xây dựng, các thuật giải tối ưu giúp giải các bài toán tìm chi phí thấp nhất trong thiết kế các kết cấu như khung, móng, cầu, trụ tháp; tìm trọng lượng nhỏ nhất của kết cấu chịu tải trọng động đất, gió và các dạng tải trọng ngẫu nhiên khác; tối ưu hóa chi phí trong tổ chức thi công công trình xây dựng... Trong bài báo, giải thuật như đơn hình và giải thuật tiến hóa được trình bày và sử dụng các giải thuật tối ưu trong các ứng dụng trong Excel và phần mềm Matlab để giải.

2. Lý thuyết tối ưu hóa kết cấu

2.1. Khái niệm về bài toán tối ưu

Bài toán tối ưu là bài toán tìm giá trị các biến sao cho hàm mục tiêu đạt cực tiểu hoặc cực đại với các điều kiện ràng buộc. Bài toán có dạng tìm vector $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ để hàm mục tiêu $f(\mathbf{X})$ đạt cực trị khi thỏa mãn điều kiện ràng buộc:

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

$$I_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

Đây là dạng bài toán tối ưu có ràng buộc. Bài toán tối ưu không có bất kỳ điều kiện ràng buộc nào gọi là bài toán tối ưu không ràng buộc.

Trong tính toán kết cấu, hàm mục tiêu thường biểu thị các đại lượng như:

- Trọng lượng, thể tích kết cấu, giá cả vật liệu là những đại lượng cần được cực tiểu hóa.
- Hệ số tải trọng là đại lượng cần được cực tiểu hóa hoặc cực đại hóa tùy theo phương pháp tính toán trong giai đoạn chảy dẻo.

Các điều kiện ràng buộc dưới dạng đẳng thức thường là các điều kiện cân bằng, các phương trình

công khả dĩ, các điều kiện biến dạng liên tục... Các điều kiện ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức thường là các điều kiện về độ bền, độ cứng, các điều kiện chảy dẻo....

Bài toán tối ưu chia làm hai dạng gồm dạng một là bài toán quy hoạch tuyến tính tìm hàm mục tiêu:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

với điều kiện:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i \quad (4)$$

với $i = 1, 2, \dots, m$;

và dạng hai là bài toán quy hoạch phi tuyến khi có ít nhất một số hạng của hàm mục tiêu hoặc ít nhất trong một số hạng của điều kiện ràng buộc, xuất hiện tích của biến hoặc nghịch đảo của biến hoặc số mũ của biến lớn hơn 1.

2.2. Thuật toán đơn hình

Thuật toán đơn hình là thuật toán phổ biến nhất được sử dụng để giải các bài toán tối ưu tuyến tính. Bản chất của phương pháp đơn hình là qua việc thành lập các bảng từng bước cải tiến dần các phương án để đạt được một phương án tối ưu.

Các bước giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình gồm:

- Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc rồi đưa về dạng chuẩn.
- Bước 1: Xác định phương án cơ bản xuất phát. Chỉ ra các biến và các hệ số cơ sở.
- Bước 2: Lập bảng đơn hình, tính giá trị của hàm mục tiêu và các số ước lượng.
- Bước 3: Kiểm tra điều kiện tối ưu.
- Bước 4: Cải tiến phương án cơ bản đang xét để được phương án tốt hơn: Tìm ẩn đưa vào, ẩn đưa ra sau đó lập bảng đơn hình. Xác định phương án cơ bản mới.
- Lặp lại bước 4 cho đến khi tìm được lời giải tối ưu.

2.3. Thuật toán di truyền

Trong thực tế, nhiều bài toán thiết kế tối ưu được biểu diễn bởi hỗn hợp các biến số liên tục, rời rạc, trong các không gian không liên tục và

không lời. Các kỹ thuật lập trình phi tuyến thông thường khi sử dụng giải loại bài toán này sẽ không thuận lợi, tốn kém về mặt tính toán và trong hầu hết các trường hợp thu được nghiệm tối ưu gần với nghiệm ban đầu. Các thuật toán di truyền rất phù hợp để giải quyết các bài toán trên và trong hầu hết các trường hợp chúng có thể đưa ra giải pháp tối ưu tổng thể. Các thuật toán di truyền là một loại thuật toán tiến hóa dựa trên các nguyên tắc của di truyền tự nhiên và chọn lọc tự nhiên. Các yếu tố cơ bản của di truyền tự nhiên như sao chép, trao đổi chéo và đột biến được sử dụng trong quy trình tìm kiếm di truyền.

Các thuật toán di truyền thường được thực hiện dưới dạng mô phỏng máy tính, trong đó một quần thể các đại diện (được gọi là nhiễm sắc thể) của các giải pháp (được gọi là các cá thể) của một bài toán tối ưu hóa, phát triển hướng đến các giải pháp tốt hơn. Quá trình tiến hóa bắt đầu từ một quần thể gồm các cá thể hoàn toàn ngẫu nhiên và diễn ra trong nhiều thế hệ.

Lời giải của một bài toán tối ưu bằng thuật toán di truyền được khởi tạo với một tập hợp các chuỗi ngẫu nhiên biểu thị một số quần thể. Kích thước quần thể trong thuật toán tối ưu di truyền thường cố định. Mỗi tập hợp được đánh giá để tìm giá trị phù hợp của nó. Quần thể được tính toán với ba toán tử (sinh sản, trao đổi chéo và đột biến) để tạo ra một quần thể mới. Quần thể mới được đánh giá để tìm ra các giá trị phù hợp và kiểm tra sự hội tụ của quá trình tính toán. Một chu kỳ sinh sản, trao đổi chéo, đột biến và đánh giá các giá trị phù hợp được gọi là một thế hệ trong thuật toán di truyền. Nếu tiêu chí hội tụ không được thỏa mãn, tập hợp được tính toán lặp đi lặp lại với ba toán tử trên và đánh giá kết quả để tìm ra các giá trị phù hợp cho tập hợp. Quá trình được tiếp tục qua nhiều thế hệ cho đến khi tiêu chí hội tụ được thỏa mãn.

2.4. Phương pháp giảm gradient tổng quát

Ta xét bài toán phi tuyến tìm cực tiểu của hàm $f(\mathbf{X})$ với các điều kiện ràng buộc:

$$h_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$$l_k(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (6)$$

$$x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Ta thêm các biến bù dương vào các bất đẳng

thức (5), bài toán trở thành:

$$f(\mathbf{X}) \rightarrow \text{Minimize} \quad (8)$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$h_j(\mathbf{X}) + x_{n+j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

$$l_k(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (10)$$

$$x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$x_{n+j} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

có $n + m$ biến $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$.

Bài toán có thể viết dưới dạng tổng quát:

$$f(\mathbf{X}) \rightarrow \text{Minimize} \quad (13)$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$g_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m + l \quad (14)$$

$$x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)} \quad i = 1, 2, \dots, n + m \quad (15)$$

trong đó các biến đệm $0 \leq x_i \leq \infty$

với $(i = n + 1, n + 2, \dots, n + m)$.

Phương pháp GRG dựa trên ý tưởng loại bỏ các biến bằng cách sử dụng các ràng buộc đẳng thức. Do đó một biến có thể được loại khỏi tập hợp x_i ($i = 1, 2, \dots, n + m$) trong mỗi đẳng thức ràng buộc cho bởi các phương trình (9) và (10). Để thuận tiện ta chia tập các biến thành hai nhóm:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-l} \end{Bmatrix} : \text{biến thiết kế (biến độc lập)}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{m+l} \end{Bmatrix} : \text{biến trạng thái (biến phụ thuộc)}$$

Xét biến phân thứ nhất của hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc:

$$df(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n-l} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{m+l} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \quad (17)$$

$$= \nabla_{\mathbf{Y}}^T f d\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}}^T f d\mathbf{Z}$$

$$dg_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n-l} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} dy_j + \sum_{j=1}^{m+l} \frac{\partial g_i}{\partial z_j} dz_j \quad (18)$$

hay

$$d\mathbf{g} = [\mathbf{C}]d\mathbf{Y} + [\mathbf{D}]d\mathbf{Z} \quad (19)$$

trong đó

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_{n-l}} \end{Bmatrix} \quad \nabla_{\mathbf{Z}} f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_{m+l}} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_{n-l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{m+l}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_{m+l}}{\partial y_{n-l}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_{m+l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{m+l}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_{m+l}}{\partial z_{m+l}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$d\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_{n-l} \end{Bmatrix} \quad d\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_{m+l} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Giả sử rằng véc tơ $\mathbf{X}$, $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, ban đầu thỏa mãn các điều kiện ràng buộc, bất kỳ sự thay đổi trong véc tơ $d\mathbf{X}$ phải tương ứng với $d\mathbf{g} = \mathbf{0}$ để thỏa mãn tồn tại nghiệm tại $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$.

Từ phương trình (19) ta có:

$$d\mathbf{Z} = -[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{C}]d\mathbf{Y} \quad (24)$$

Thay phương trình (24) vào phương trình (17) ta được

$$df(\mathbf{X}) = \left(\nabla_{\mathbf{Y}}^T f - \nabla_{\mathbf{Z}}^T f [\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{C}] \right) d\mathbf{Y} \quad (25)$$

hay

$$\frac{df}{d\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) = \mathbf{G}_R \quad (26)$$

với

$$\mathbf{G}_R = \nabla_{\mathbf{Y}} f - \left([\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{C}] \right)^T \nabla_{\mathbf{Z}} f \quad (27)$$

được gọi là phép giảm gradient tổng quát.

Về mặt hình học, phép giảm gradient có thể được mô tả như một phép chiếu của gradient n chiều ban đầu lên vùng nghiệm có $(n-m)$ chiều được mô tả bởi các biến thiết kế.

3. Ứng dụng Solver trong Excel giải bài toán tối ưu

Solver Add-in là một công cụ có sẵn trong Excel cung cấp các lệnh và các tính năng tùy chỉnh để giải quyết các vấn đề quyết định. Solver Add-in đặc biệt hữu ích khi giải quyết các bài toán tối ưu. Solver sử dụng nhiều phương pháp toán học khác nhau để tìm ra các giá trị tối ưu của các biến quyết định. Các phương pháp này được gọi là thuật toán. Ba thuật toán chính có sẵn trong hầu hết các phiên bản của Solver:

- Thuật toán đơn hình: để giải các bài toán tối ưu tuyến tính.
- Thuật toán GRG phi tuyến: có thể giải các bài toán tuyến tính và các bài toán có mục tiêu phi tuyến và các ràng buộc phi tuyến.
- Thuật toán tiến hóa: sử dụng thuật toán di truyền để tìm các giải pháp tối ưu.

Trình tự để giải một bài toán tối ưu dùng công cụ Solver gồm các bước:

- Xây dựng hàm mục tiêu (Objective Function)
- Xây dựng các ràng buộc (Constraints)
- Tổ chức dữ liệu trên bảng tính Excel
- Sử dụng Solver để tìm phương án tối ưu.

Trong bài báo này, công cụ Excel Solver sẽ được sử dụng để giải bài toán về tối ưu hóa kết cấu trong xây dựng.

4. Ví dụ tính toán

Cho một giàn với tải trọng, kích thước, đặc trưng hình học biểu thị như trên hình 1. Chuyển vị cho phép tại nút 1 và nút 2 bằng 5mm. Ứng suất trong mỗi phần tử của giàn không được vượt quá ứng suất cho phép $\sigma^* = 0,16 \text{ kN/mm}^2$. Các tải trọng tác dụng lên giàn gồm $P_1 = 100 \text{ kN}$, $P_2 = 50 \text{ kN}$, kích thước $L = 1000 \text{ mm}$. Mô đun đàn hồi của vật liệu $E = 207 \text{ kN/mm}^2$.

Bảng 1. Đặc trưng hình học giàn

Phần tử	L (mm)	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	$\sqrt{3} L$	0,5	$\sqrt{3}/2$
2	L	$\sqrt{3}/2$	0,5
3	L	0	1

Ta có hàm mục tiêu cho nửa giàn:

$$V = \sum_{g=1}^3 L_g A_g = \sqrt{3} L A_1 + 1,5 L A_2 \text{ mm}^3$$

b. Điều kiện ràng buộc về độ cứng:

$$X \leq \Delta \Rightarrow y_1 \leq 5; y_2 \leq 5 \text{ (mm)}$$

c. Điều kiện ràng buộc về cân bằng:

Ma trận độ cứng **k**:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{\sqrt{3}L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_2}{2L} \end{bmatrix}$$

Véc tơ biến dạng của phần tử 1, 2, 3:

$$U_1 = [\sin \alpha_1] \cdot \{y_1\} = \sqrt{3}/2 \{y_1\}$$

$$U_2 = [\sin \alpha_2] \cdot \{y_2\} = 0,5 \{y_2\}$$

$$U_3 = [-\sin \alpha_3 \quad \sin \alpha_3] \cdot \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

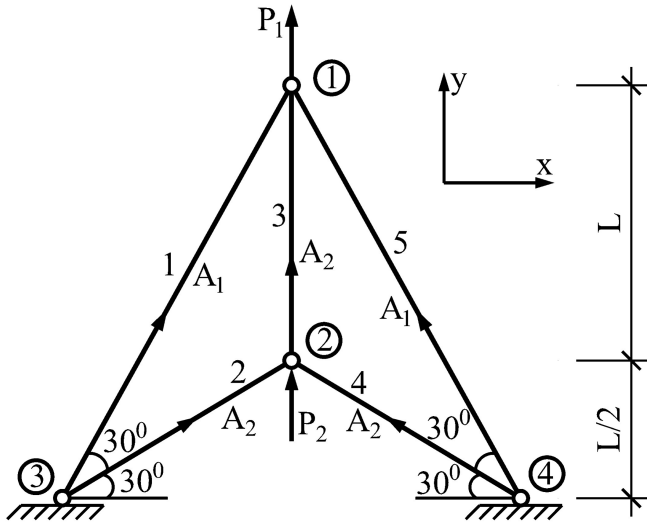
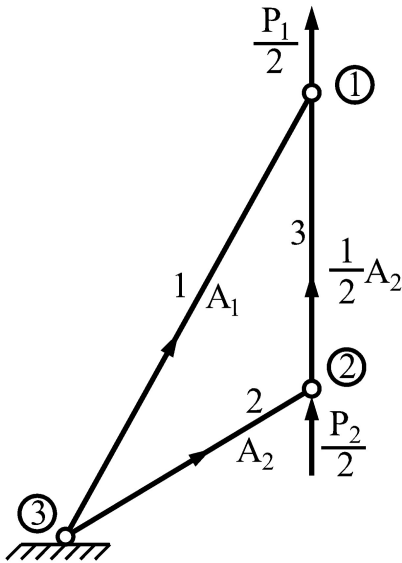
Quan hệ biến dạng của phần tử và chuyển vị nút dưới dạng ma trận **U** = **A.X**:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

Trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & -1 \end{bmatrix}$$

Ma trận cứng tổng thể của giàn:

**Hình 1.** Sơ đồ tính toán toàn bộ giàn**Hình 2.** Sơ đồ tính nửa giàn

Ta thấy giàn có tính chất đối xứng nên sơ đồ tính biểu thị như trên hình 2, các thành phần chuyển vị nằm ngang tại các nút 1 và 2 bằng không.

Vì hợp lực tải trọng hướng lên trên nên có thể khẳng định rằng các thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại các nút 1 và 2 đều mang dấu dương.

4.1. Xây dựng bài toán tối ưu

Ta thành lập bài toán tối ưu như sau:

a. Hàm mục tiêu:

Đặc trưng hình học của các phần tử giàn thể hiện trong bảng 1.

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{3}A_1 + 2A_2)E}{4L} & -\frac{EA_2}{2L} \\ -\frac{EA_2}{2L} & \frac{3EA_2}{4L} \end{bmatrix}$$

Véc tơ lực:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1/2 \\ P_2/2 \end{Bmatrix}$$

Điều kiện ràng buộc về cân bằng $\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{P}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{3}A_1 + 2A_2)E}{4L} & -\frac{EA_2}{2L} \\ -\frac{EA_2}{2L} & \frac{3EA_2}{4L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1/2 \\ P_2/2 \end{Bmatrix}$$

Ta được hai ràng buộc về cân bằng:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}A_1y_1 + 2A_2y_1 - 2A_2y_2 &= 966 \\ -2A_2y_1 + 3A_2y_2 &= 483 \end{aligned}$$

d. Điều kiện ràng buộc về độ bền:

Ma trận tính ứng suất $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{3}L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{L} \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng về độ bền:

$$[\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} \leq \sigma^*$$

hay:

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{2L} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2L} \\ \frac{E}{L} & -\frac{E}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} \sigma^* \\ \sigma^* \\ \sigma^* \end{Bmatrix}$$

Ta được ba điều kiện về độ bền:

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 1,545 \\ y_2 &\leq 1,545 \\ y_1 - y_2 &\leq 0,773 \end{aligned}$$

e. Bài toán tối ưu:

Từ hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc, ta xây dựng được bài toán tối ưu:

$$V = 1732A_1 + 1500A_2 \rightarrow \min$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\sqrt{3}A_1y_1 + 2A_2y_1 - 2A_2y_2 = 966$$

$$-2A_2y_1 + 3A_2y_2 = 483$$

$$y_1 \leq 1,545$$

$$y_2 \leq 1,545$$

$$y_1 - y_2 \leq 0,773$$

$$A_1, A_2, y_1, y_2 \geq 0$$

4.2. Lời giải bài toán tối ưu

Dùng Solver trong Excel để giải, ta có lời giải tối ưu theo các thuật toán đơn hình, thuật toán tiến hóa và phương pháp giảm gradient tổng quát.

a. Lời giải theo thuật toán đơn hình:

Để giải bài toán phi tuyến trên bằng phương pháp đơn hình ta tuyến tính hóa các điều kiện ràng buộc cân bằng bằng chuỗi Taylor. Bài toán tối ưu cực tiểu hóa trở thành:

$$V = 1732A_1 + 1500A_2 \rightarrow \min$$

với các điều kiện ràng buộc

$$2,66A_1 + 945,4y_1 - 538,4y_2 = 1596$$

$$-538,4y_1 + 1,545A_2 + 807,6y_2 = 896$$

$$y_1 \leq 1,545$$

$$y_2 \leq 1,545$$

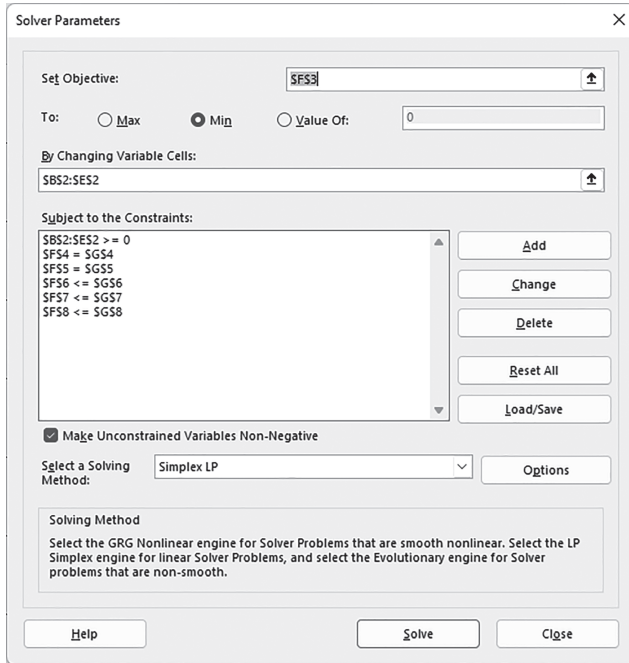
$$y_1 - y_2 \leq 0,773$$

$$A_1, A_2, y_1, y_2 \geq 0$$

Cách tổ chức dữ liệu trên bảng tính Excel, khai báo hàm mục tiêu, các ràng buộc và kết quả tối ưu được thể hiện trên hình 3, 4, 5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	A1	A2	y1	y2		V	
2	Phương án	0	0	0	0		
3	f(x)	1732	1500			=B3*\$B\$2+D3*\$D\$2	
4	Ràng buộc 1	2.66	945.4	0	-538	=B\$2*B4+\$C\$2*C4+\$D\$2*D4+\$E\$2*E4	1596
5	Ràng buộc 2	0	-538.4	1.545	807.6	=B\$2*B5+\$C\$2*C5+\$D\$2*D5+\$E\$2*E5	896
6	Ràng buộc 3		1			=C\$2*C6	1.545
7	Ràng buộc 4				1	=E\$2*E7	1.545
8	Ràng buộc 5		1		-1	=C\$2*C8+\$E\$2*E8	0.773

Hình 3. Dữ liệu cho thuật toán đơn hình



Hình 4. Khai báo thuật toán đơn hình

	A	B	C	D	E	F	G
1		A1	y1	A2	y2	V	
2	Phương án	363.6	1.545	310.74	1.545		
3	f(x)	1732		1500		1095864	
4	Ràng buộc 1	2.66	945.4	0	-538.4	1596	1596
5	Ràng buộc 2	0	-538.4	1.545	807.6	896	896
6	Ràng buộc 3		1			1.545	1.545
7	Ràng buộc 4				1	1.545	1.545
8	Ràng buộc 5		1		-1	0	0.773

Hình 5. Kết quả lời giải đơn hình

Ta thu được phương án tối ưu:

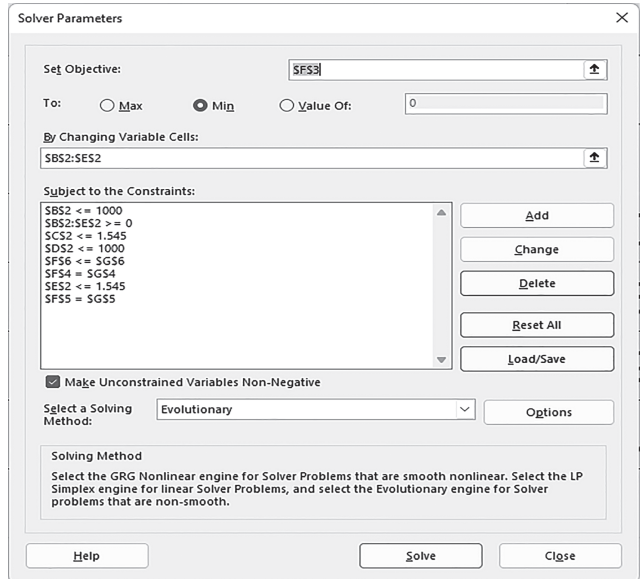
$\text{Min}(V) = 1095864 \text{ mm}^3$; với $A_1 = 363,6 \text{ mm}^2$; $A_2 = 310,7 \text{ mm}^2$; $y_1 = 1,545 \text{ mm}$; $y_2 = 1,545 \text{ mm}$.

b. Lời giải theo thuật toán di truyền:

Sử dụng thuật toán di truyền để giải bài toán tối ưu đã được tuyến tính hóa được thể hiện như trên hình 6, hình 7. Trong đó các ràng buộc 3 và 4 được khai báo trực tiếp trong bảng khai báo trên hình 7. Các giá trị diện tích thanh giàn cũng được khai báo dương và nhỏ hơn 1000 mm^2 . Kết quả bài toán được thể hiện trên hình 8.

	A	B	C	D	E	F	G
1		A1	y1	A2	y2	V	
2	Phương án	0	0	0	0		
3	f(x)	1732		1500		$=B3*B52+D3*DS2$	
4	Ràng buộc 1	2.66	945.4	0	-538	$=B52*B4+SC2*C4+SD2*D4+SE2*E4$	1596
5	Ràng buộc 2	0	-538.4	1.545	808	$=B52*B5+SC2*C5+SD2*D5+SE2*E5$	896
6	Ràng buộc 3		1		-1	$=SC2*C6+SE2*E6$	0.773

Hình 6. Dữ liệu cho thuật toán di truyền



Hình 7. Khai báo thuật toán di truyền

	A	B	C	D	E	F	G
1		A1	y1	A2	y2	V	
2	Phương án	363.56	1.545	310.7	1.5449		
3	f(x)	1732		1500		1095737.2	
4	Ràng buộc 1	2.66	945.4	0	-538.4	1595.8916	1596
5	Ràng buộc 2	0	-538.4	1.545	807.6	895.91045	896
6	Ràng buộc 3		1		-1	4.098E-05	0.773

Hình 8. Kết quả lời giải di truyền

Ta thu được phương án tối ưu:

$\text{Min}(V) = 1095732 \text{ mm}^3$; với $A_1 = 363,6 \text{ mm}^2$; $A_2 = 310,7 \text{ mm}^2$; $y_1 = 1,545 \text{ mm}$; $y_2 = 1,545 \text{ mm}$.

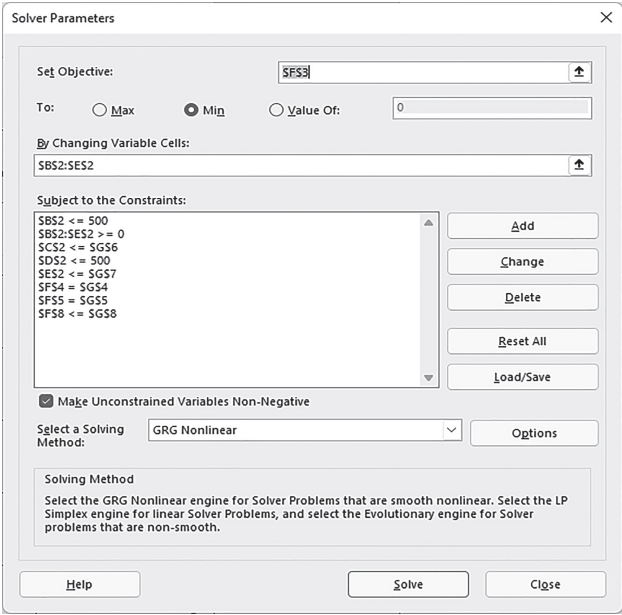
c. Lời giải theo phương pháp giảm gradient tổng quát:

Sử dụng phương pháp giảm gradient tổng quát để giải bài toán với các ràng buộc phi tuyến với các bước khai báo dữ liệu được thể hiện như trên hình 9, hình 10. Kết quả bài toán theo phương pháp GRG phi tuyến được thể hiện trên hình 11. Ta thu được phương án tối ưu:

$\text{Min}(V) = 1094156 \text{ mm}^3$; với $A_1 = 360,98 \text{ mm}^2$; $A_2 = 312,6 \text{ mm}^2$; $y_1 = 1,545 \text{ mm}$; $y_2 = 1,545 \text{ mm}$.

	A	B	C	D	E	F	G
1		A1	y1	A2	y2	V	
2	Phương án	0	0	0	0		
3	f(x)	1732		1500		$=B3*B52+D3*DS2$	
4	Ràng buộc 1		1.732	2	-2	$=C4*B2+C2+D4*C2*D2+E4*D2*E2$	966
5	Ràng buộc 2			-2	3	$=D5*C2*D2+E5*D2*E2$	483
6	Ràng buộc 3		1			$=C6*C2$	1.545
7	Ràng buộc 4			1		$=E7*E2$	1.545
8	Ràng buộc 5		1		-1	$=C8*C2+E8*E2$	0.773

Hình 9. Dữ liệu cho phương pháp giảm gradient tổng quát



Hình 10. Khai báo phương pháp giảm gradient tổng quát

	A	B	C	D	E	F	G
1	A1	y1	A2	y2		V	
2	Phương án	360.984	1.545	312.6	1.545		
3	f(x)	1732		1500		1094156.417	
4	Ràng buộc 1		1.732	2	-2	966.0000001	966
5	Ràng buộc 2			-2	3	482.9999999	483
6	Ràng buộc 3		1			1.545	1.545
7	Ràng buộc 4				1	1.545	1.545
8	Ràng buộc 5		1		-1	0	0.773

Hình 11. Kết quả phương pháp giảm gradient tổng quát

5. Kết luận

Trong bài viết này, tác giả đã trình bày phương pháp giải bài toán tính toán kết cấu bằng phương pháp tối ưu. Một số thuật toán giải bài toán tối ưu cũng được giới thiệu. Một ví dụ về tối ưu bài toán giàn đã được trình bày cụ thể. Bài toán tối ưu kết cấu được xây dựng và sử dụng công cụ Solver trong Excel để giải. Các kết quả tối ưu theo các phương pháp đơn hình, thuật toán di truyền, phương pháp giảm gradient tổng quát tương đối phù hợp và có độ chênh lệch không lớn. Bài báo góp phần giới thiệu cho sinh viên ngành xây dựng hiểu biết thêm về một phương pháp giải bài toán kết cấu và ứng dụng công cụ Solver trong Excel để giải quyết các bài toán này. Công cụ Solver Simplex được sử dụng để giải các bài toán tuyến tính theo phương pháp đơn hình, khi giải bài toán phi tuyến ta phải tuyến tính hóa để đưa bài toán về dạng tuyến tính. Công cụ Solver GRG được dùng để giải các bài toán phi tuyến trơn. Công cụ Solver Evolution được dùng để giải tất cả các dạng bài toán tuyến tính và phi tuyến, tuy nhiên thời gian giải thường lâu hơn so với hai công cụ Simplex và GRG.

Tài liệu tham khảo

[1]. R. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

[2]. H.W. Kuhn and A. Tucker, “Nonlinear programming,” in *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, University of California Press, 1951, pp. 481-492.

[3]. G. Zoutendijk, *Methods of Feasible Directions*. Amsterdam: Elsevier, 1960.

[4]. J.B. Rosen, “The gradient projection method of nonlinear programming, Part I: linear constraints,” *SIAM Journal*, vol. 8, pp.181–217, 1960.

[5]. J.B. Rosen, “The gradient projection method for nonlinear programming, Part II: nonlinear constraints,” *SIAM Journal*, vol. 9, pp. 414–432, 1961.

[6]. Carroll, C.W. The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems. *Operations Research* 9: 169–184, 1961.

[7]. Fiacco, A.V. and McCormick, G.P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York: Wiley, 1968.

- [8]. Duffin, R.J., Peterson, E.L., and Zener, C. *Geometric Programming: Theory and Applications*. New York: Wiley, 1967.
- [9]. Gomory, R.E. An algorithm for the mixed integer problem. Rand Report R.M. 25797, 1960.
- [10]. Charnes, A. and Cooper, W.W. Chance constrained programming. *Management Science* 6: 73–79, 1959.
- [11]. Holland, J.H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975.
- [12]. Wolfe, M.A. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1978.