# SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CHO BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA MỜ PHÂN THỨ THEO ĐẠO HÀM TƯƠNG QUAN TUYẾN TÍNH CAPUTO

**Hoàng Thị Phương Thảo**[1]**, Nguyễn Thị Thu Huyền**[2] **, Nguyễn Thị Huế**[3]

[1]*THPT Chuyên Ngoại ngữ, Trường Đại học Ngoại ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội*

[2]*Trường Đại học Thủ đô Hà Nội,* [3]*Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*

***Tóm tắt**: Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu và chứng minh một số tính chất của đạo hàm tương quan tuyến tính phân thứ Caputo. Từ đó, chúng tôi nghiên cứu tính tồn tại nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình tiến hóa trong không gian các số mờ tương quan tuyến tính theo đạo hàm tương quan tuyến tính phân thứ Caputo có dạng*

$$\begin{cases} {}_{LC}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{p}\hat{x}(t) & = \hat{g}\big(t, \hat{x}(t)\big), \\ \hat{x}(0) & = \hat{x}_0, \end{cases} \qquad t \in I = [0, b],$$

*trong đó* ${}_{LC}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{p}\hat{x}(t)$ *là đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo bậc* $p \in (0,1]$ *của hàm* $\hat{x}(.), \hat{x}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ *với* $A$ *là số mờ không đối xứng và* $\hat{g}: I \times C\big(I, \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}\big) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$.

***Từ khóa**: Đạo hàm tương quan tuyến tính phân thứ Caputo, không gian mờ tương quan tuyến tính, định lý điểm bất động.*

Nhận bài ngày 1.7.2023; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 24.7.2023

Liên hệ tác giả: Hoàng Thị Phương Thảo; Email: thaohp@flss.edu.vn

## 1. MỞ ĐẦU

Không gian mờ tương quan tuyến tính được xây dựng bằng cách cố định một số mờ $A$ bất kì. Sử dụng một ánh xạ phụ thuộc tuyến tính $\psi_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$, ta nhận được các toán tử có dạng $qA \oplus r$ trong đó $(q, r) \in \mathbb{R}^2$. Điều thú vị là $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ có thể được nhúng vào $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ như một không gian con tuyến tính khi $A$ là số mờ không đối xứng. Vì toán tử $\psi_A$ được giới thiệu trong [8] là song ánh từ không gian Euclide hai chiều sang không gian mờ tương quan tuyến tính. Do đó, phép hiệu có thể bắt nguồn tự nhiên từ phép cộng và phép nhân vô hướng thông qua ánh xạ $\psi_A^{-1}$. Điều này dẫn đến hiệu hai số mờ luôn tồn tại. Từ đó, Esmi cùng cộng sự [8] đã đưa ra khái niệm khả vi Fréchet cho một hàm mờ tương quan tuyến tính. Điểm đặc biệt của không gian $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ trong trường hợp $A$ là số mờ không đối xứng cũng cho phép ta có thể chuyển đổi một cách tương ứng một phương trình trong không gian các số mờ về một hệ phương trình tương ứng trong không gian các số thực.

Vào năm 2010, phương trình vi phân mờ phân thứ (FFDEs) trình bày lần đầu tiên bởi Agarwal và cộng sự trong tài liệu [2]. Ở đó, các định nghĩa về đạo hàm phân thứ cho các hàm số mờ đã được đề cập. Đạo hàm mờ phân thứ Riemann-Liouville theo hiệu H và tính duy nhất nghiệm của một lớp FFDEs có trễ được nghiên cứu trong [2]. Năm 2011, đạo hàm phân thứ mờ Riemann-Liouville theo đạo hàm Seikkala đã được đề xuất trong [3]. Cùng với đó, một số nghiên cứu về FFDEs với các điều kiện ban đầu mờ theo đạo hàm này đã được đề cập trong [3, 4]. Trong năm 2012, phương trình vi phân phân thứ mờ theo khái niệm đạo hàm Caputo kết hợp với đạo hàm SGH đã được nghiên cứu với hai loại biểu diễn khác nhau [9, 14]. Trong [14], tác giả cho thấy rằng một FFDEs của bậc $\beta \in (0; 1)$, trong một số điều kiện, có thể có hai loại nghiệm tương ứng với dạng thứ nhất và dạng thứ hai của đạo hàm dạng Caputo theo hiệu gH. FFDEs theo khái niệm đạo hàm phân thứ Caputo-Fabrizio kết hợp với đạo hàm SGH (đạo hàm Caputo Fabrizio SGH) đã được nghiên cứu vào năm 2018 trong [1]. Gần đây, khái niệm mới về đạo hàm phân thứ granular có ứng dụng cho FFDEs đã được Najariyan và Zhao [12] thiết lập. Đạo hàm phân thứ mờ granular dựa trên các hàm liên thuộc và hiệu granular có một số ưu điểm so với các đạo hàm trước đó vì nó có thể được tính toán trực tiếp thông qua phép biến đổi ngược của các tập mức, xem [10,12]. Một ứng dụng mở rộng của đạo hàm phân thứ granular cho phương trình vi phân tuyến tính bậc hai đã được xây dựng trong [16, 17]. Điều này thúc đẩy chúng tôi nghiên cứu đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo cho các hàm mờ tương quan tuyến tính và một số tính chất của loại đạo hàm này. Bằng việc kết hợp giữa đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo và các tính chất mới của không gian các số mờ tương quan tuyến tính, chúng tôi tìm hiểu tính giải được và các điều kiện để có nghiệm duy nhất cho bài toán Cauchy cho phương trình tiến hóa phân thứ theo đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo trong trường hợp số mờ không đối xứng.

## 2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

### 2.1. Không gian số mờ

***Định nghĩa 2.1.*** [6] Cho tập $X$ khác rỗng. Một tập mờ $A$ trong $X$ được đặc trưng bởi hàm thuộc

$$u: X \to [0,1]$$

trong đó $u(x)$ thể hiện mức độ thuộc của $x$ đối với tập $A$. Ta kí hiệu $\mathcal{F}(X)$ là tập hợp tất cả các tập con mờ của $X$.

***Định nghĩa 2.2.*** [6] Số mờ là một tập mờ trong $\mathbb{R}$ có hàm thuộc $u$ thỏa mãn các yêu cầu sau:

(i) $u$ chuẩn tắc nghĩa là tồn tại $t_0$ để $u(t_0) = 1$,

(ii) $u$ lồi theo nghĩa với $\gamma, \eta \in \mathbb{R}$ và $0 < \kappa \leq 1$ :

$$u(\kappa\gamma + (1-\kappa)\eta) \geq \min\{u(\gamma), u(\eta)\}$$

(iii) $u$ nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}$ (nghĩa là với mọi $t_0 \in \mathbb{R}$, tồn tại $\varrho > 0$ sao cho $\forall t$ :

$$|t - t_0| < \varrho \text{ thì } u(t) - u(t_0) < \epsilon \text{ với mọi } \epsilon > 0)$$

(iv) $u$ có giá compact.

***Định nghĩa 2.3.*** [8] Một số mờ $u$ được gọi là đối xứng nếu tồn tại điểm $t \in \mathbb{R}$ để $u(t - y) = u(t + y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Số mờ $u$ được gọi là không đối xứng nếu không tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho $u$ là đối xứng. Theo [8, Lemma 3.5], tồn tại duy nhất một điểm $t \in \mathbb{R}$ sao cho số mờ $A$ đối xứng qua $t$.

### 2.2. Không gian mờ tương quan tuyến tính $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$

***Định nghĩa 2.4.*** [8] Với mỗi số mờ $A$, ta định nghĩa ánh xạ $\psi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ xác định bởi

$$(q, r) \mapsto \psi_A(q, r)$$

với tập mức xác định theo công thức

$$[\psi_A(q, r)]^\alpha = \{q\gamma + r : \gamma \in [A]^\alpha\}, \alpha \in [0,1]$$

Với $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, ta kí hiệu số mờ $\psi_A(q, r)$ bởi $qA \oplus r$ và miền giá trị của $\psi_A$ là $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$. Ta gọi $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ là không gian mờ tương quan tuyến tính. Ta kí hiệu $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$ là không gian mờ tương quan tuyến tính với $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{nsy}$. Nếu số mờ $u = \psi_A(q, r)$ thì ta nói $u$ được biểu diễn tuyến tính qua $q$ và $r$.

Theo [8], nếu $A$ là số mờ không đối xứng thì $\psi_A$ là song ánh từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$. Do đó, các phép toán trong $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$ được xác định thông qua ánh xạ $\psi_A^{-1}$.

***Định nghĩa* 2. 5** ([8]). Lấy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{nsy}$. Các phép toán trên không gian $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$ như phép cộng, phép nhân vô hướng, phép trừ được định nghĩa như sau:

(i) $u \oplus_A v = \psi_A\big(\psi_A^{-1}(u) + \psi_A^{-1}(v)\big)$,

(ii) $\lambda \odot_A u = \psi_A\big(\lambda \psi_A^{-1}(u)\big)$,

(iii) $u \ominus_A v = u \oplus_A (-1)v = \psi_A\big(\psi_A^{-1}(u) + (-1)\psi_A^{-1}(v)\big)$,

trong đó $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}, \lambda \in \mathbb{R}$ và ánh xạ $\psi_A^{-1}: \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, được cho bởi $\psi_A^{-1}(qA \oplus r) = (q, r)$ là ánh xạ ngược của $\psi_A$.

***Định nghĩa 2.6.*** Giả sử $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{nsy}$. Với mỗi $u = \psi_A(q_u, r_u), v = \psi_A(q_v, r_v)$, ta định nghĩa

$$d_{\psi_A}(u, v) = \max\{|q_u - q_v|, |r_u - r_v|\} \tag{1}$$

Kí hiệu $\| u \|_A = d_{\psi_A}\big(u, \hat{0}\big)$, với $\hat{0} = \psi_A(0,0)$.

Theo [8], $\left(\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}, \odot_A, \oplus_A\right)$ là một không gian Banach.

Mệnh đề sau trình bày một số tính chất của $d_{\psi_A}$:

***Mệnh đề 2.1.*** Nếu $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{nsy}}$ thì $\mathrm{d}_{\psi_\mathrm{A}}$ thỏa mãn:

*(i)* $d_{\psi_A}(u_1 \oplus_A w, u_2 \oplus_A w) = d_{\psi_A}(u_1, u_2), \forall u_1, u_2, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$,

*(ii) Với* $k \in \mathbb{R}, d_{\psi_A}(k \odot_A u_1, k \odot_A u_2) = |k| d_{\psi_A}(u_1, u_2), \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$,

*(iii)* $d_{\psi_A}(u_1 \oplus_A u_2, v_1 \oplus_A v_2) \le d_{\psi_A}(u_1, v_1) + d_{\psi_A}(u_2, v_2), \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$,

*(iv)* $d_{\psi_A}\big(u_1 \ominus_A u_2, \hat{0}\big) = d_{\psi_A}(u_1, u_2), \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$.

Trong [21], tác giả đã đưa ra định nghĩa hiệu LC cho hai số mờ tương quan tuyến tính trong trường hợp $A$ là số mờ không đối xứng như sau:

***Định nghĩa 2.7.*** [21] Với $u = \psi_A(q_u, r_u), v = \psi_A(q_v, r_v) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$. Hiệu LC của $u$ và $v$ kí hiệu là $u \boxminus_A v$ và được tính như sau:

$$u \boxminus_A v = \psi_A(q_u - q_v, r_u - r_v) = (q_u - q_v)A \oplus_A r_u - r_v$$

Nhận xét rằng trong trường hợp $A$ là số mờ không đối xứng thì hiệu $\boxminus_A$ và hiệu $\ominus_A$ là như nhau. Từ [20], nếu $u = \psi_A(q_u, r_u), v = \psi_A(q_v, r_v) \in \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}$, chuẩn $\|.\|_A$ và metric $d_{\psi_A}(u,v)$ được xác định như sau:

$$\| u \|_A = max\{|q_u|, |r_u|\}$$
$$d_{\psi_A}(u,v) = \|u \boxminus_A v\|_A = max\{|q_u - q_v|, |r_u - r_v|\}$$

Ta kí hiệu $\mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}}$ là không gian các số mờ không đối xứng.

### 2.3. Đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo

***Định nghĩa 2.8.*** [19] Cho $A \in \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}, \hat{f}: J \to \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}$ với $\hat{f}(t) = \psi_A\big(q(t), r(t)\big)$ với $q, r: J \to \mathbb{R}$. Khi đó, tích phân tương quan tuyến tính Riemann-Liouville bậc $p \in (0,1]$ của $\hat{f}(t)$ xác định theo công thức:

$${}^{RL}_{LC}\mathcal{J}^p_{0^+}\hat{f}(t) = \psi_A\left(I^p_{0^+}q(t), I^p_{0^+}r(t)\right), t \in J.$$

***Bổ đề 2.1.*** [19] Cho $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{nsy}}_{\mathcal{F}}$ và $\hat{\mathrm{f}}, \hat{\mathrm{g}}, \hat{\mathrm{h}}: \mathrm{J} \to \mathbb{R}^{\mathrm{nsy}}_{\mathcal{F}(\mathrm{A})}$. Ta có các tính chất sau.

(i) Nếu $\hat{f}(t) \oplus_A \hat{g}(t) = \hat{h}(t)$ thì ${}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{f}(t) \oplus^C_A {}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{g}(t) = {}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{h}(t)$.

(ii) Nếu $\hat{f}(t) \boxminus_A \hat{g}(t) = \hat{h}(t)$ thì ${}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{f}(t) \boxminus^C_A {}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{g}(t) = {}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{h}(t)$.

***Mệnh đề 2.2.*** [19] Cho $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ và $\hat{f}: J \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ khả vi tương quan tuyến tính. Khi đó

$${}^{RL}_{LC}\mathcal{J}^p_{0^+}{}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{f}(t) = \int_0^t \hat{f}'_{LC}(s)ds.$$

## 3. BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA MỜ PHÂN THỨ THEO ĐẠO HÀM TƯƠNG QUAN TUYẾN TÍNH CAPUTO.

### 3.1. Đặt bài toán

Xét phương trình tiến hóa mờ phân thứ theo đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo như sau:

$$\begin{cases} {}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{x}(t) & = \hat{g}\big(t, \hat{x}(t)\big), \\ \hat{x}(0) & = \hat{x}_0, \end{cases} \quad t \in I = [0, b], \tag{2}$$

trong đó ${}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{g}(t)$ là đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo bậc $p \in (0,1], u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ với $A$ là số mờ bất kì và $\hat{g}: I \times C\big(I, \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}\big) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$. Trong phần này, chúng tôi quan tâm đến tính giải được của bài toán (2). Chúng tôi xây dựng các điều kiện để bài toán (2) có nghiệm.

Ta xét bài toán (2) trong không gian $\mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}$.

***Bổ đề 3.1.*** Nếu $\hat{x} \in C\left(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\right)$ thỏa mãn hệ (2) thì $\hat{x}$ thỏa mãn phương trình tích phân sau:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 \oplus^{RL}_A \mathcal{J}^p_{0^+}\hat{g}\big(t, \hat{x}(t)\big),\ t \in I. \tag{3}$$

Chứng minh. Nếu $\hat{x} \in C\left(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\right)$ là nghiệm của bài toán (2), ta có

$${}^{RL}_{LC}\mathcal{J}^{1-p}_{0^+}\hat{x}'_{LC}(t) = \hat{g}\big(t, \hat{x}(t)\big).$$

Sau đó, lấy tích phân phân thứ bậc $p$ hai vế, ta nhận được

$${}^{RL}_{LC}\mathcal{J}^{p}_{0^+}{}^{L}_{LC}\mathcal{J}^{1-p}_{0^+}\hat{x}'_{LC}(t) = {}^{RL}_{\mathcal{F}}\mathcal{J}^p_{0^+}\hat{g}\big(t, \hat{x}(t)\big)$$

Điều này dẫn đến

$$\int_0^t \hat{x}'_{LC}(s)d\varsigma = {}^{RL}_{LC}\mathcal{J}^p_{0^+}\hat{g}\big(t,\hat{x}(t)\big).$$

Áp dụng Nhận xét 5.6 trong [21], ta được phương trình (3). Điều cần chứng minh.

***Định nghĩa 3.1.*** Nếu $\hat{x} \in C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big)$ thỏa mãn phương trình tích phân (3) thì ta gọi $\hat{x}$ là nghiệm tích phân của bài toán (2).

**3.2. Tính giải được của bài toán**

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các điều kiện để đảm bảo sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán Cauchy (2). Nhắc lại metric supremum $\rho$ và metric yếu $d_m$ trên $C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big)$ được xác định như sau:

$$\rho\big(\beta(s),\gamma(s)\big) = \sup_{s\in I} d_{\psi_A}\big(\beta(s),\gamma(s)\big),\ d_m(\beta,\gamma) = \sup_{s\in I}\big\{s^m d_{\psi_A}\big(\beta(s),\gamma(s)\big)\big\}$$

trong đó $\beta,\gamma \in C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big)$.

***Giả thiết (H1)*** Tồn tại $L \in \mathbb{R}^+$ sao cho

$$d_{\psi_A}\Big(\hat{g}\big(t,\hat{x}_1(t)\big),\hat{g}\big(t,\hat{x}_2(t)\big)\Big) \le L d_{\psi_A}\big(\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t)\big)$$

với mọi $\hat{x}_1,\hat{x}_2 \in C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big)$ và $t \in I$.

**Định lý 3.1.** Nếu giả thiết **(H1)** được thỏa mãn thì bài toán (2) có duy nhất một nghiệm tích phân trên $C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big)$.

***Chứng minh***. Xét $\mathcal{T}: C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big) \to C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big)$ xác định theo công thức

$$\mathcal{T}[\hat{x}](t) = \hat{x}_0 \oplus^{RL}_{\mathcal{F}} \mathcal{J}^p\hat{g}\big(t,\hat{x}(t)\big)$$

Với mỗi $t \in I$ và $\hat{x},\bar{x} \in C\big(I, \mathbb{R}^{nsy}_{\mathcal{F}(A)}\big)$, từ tính chất metric $d_{\psi_A}$ và giả thiết (**H**1), ta được đánh giá

$$d_{\psi_A}\big(\mathcal{T}[\hat{x}](t),\mathcal{T}[\bar{x}](t)\big) \le \frac{L\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} t^{2p-1} d_{1-p}(\hat{x},\bar{x})$$

Suy ra

$$t^{1-p} d_{\psi_A}(\mathcal{T}[\hat{x}],\mathcal{T}[\bar{x}]) \le \tfrac{Lt^p\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} d_{1-p}(\hat{x},\bar{x}) \tag{4}$$

Với $n \in \mathbb{N}$, toán tử $\mathcal{T}^n[\hat{x}](t) = \mathcal{T}\big(\mathcal{T}^{n-1}[\hat{x}](t)\big)$ với mọi $t \in J$. Lập luận tương tự, ta được

$$d_{1-p}(\mathcal{T}^n[\hat{x}],\mathcal{T}^n[\bar{x}]) \le \frac{Lb^{np}\Gamma(p)}{\Gamma\big((n+1)p\big)} d_{1-p}(\hat{x},\bar{x}) \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Vậy $\mathcal{T}^n$ là ánh xạ co với $n$ đủ lớn. Do đó, $\mathcal{T}^n$ có duy nhất điểm bất động thỏa mãn phương trình tích phân (3). Đó chính là nghiệm tích phân của bài toán.

***Ví dụ 3.1.*** Xét phương trình vi phân phân thứ sau:

$$\begin{cases} {}^{C}_{LC}\mathcal{D}^p_{0^+}\hat{x}(t) & = \tau(t) \odot_A \hat{x}(t) \oplus_A \eta(t),\ t \in [0,5] \\ \hat{x}(0) & = A \end{cases} \tag{5}$$

trong đó ${}_{LC}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{p}\hat{x}$ là đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo, $p \in (0,1], A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{nsy}$ và $\tau, \eta: [0,5] \to \mathbb{R}$ là khả vi trên $[0,5]$. Nhận xét rằng vế phải $\tau(t) \odot_A \hat{x}(t) + \eta(t)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz $L = \max_{[0,5]} \tau(t)$. Vì $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}$ nên tồn tại cặp $\left(q_{\hat{x}}(t), r_{\hat{x}}(t)\right) \in \mathbb{R}^2$ để $\hat{x}(t) = Aq_{\hat{x}}(t) + r_{\hat{x}}(t)$ với $t \in [0,5]$. Do đó, $\hat{f}\left(t, \hat{x}(t)\right)$ có biểu diễn

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(t, \hat{x}(t)\right) &= \tau(t)\left(Aq_{\hat{x}}(t) + r_{\hat{x}}(t)\right) + \eta(t) \\ &= A\tau(t)q_{\hat{x}}(t) + \tau(t)r_{\hat{x}}(t) + \eta(t). \end{aligned}$$

Kí hiệu

$$\begin{aligned} q_{\hat{f}}(t) &= \tau(t)q_{\hat{x}}(t), \\ r_{\hat{f}}(t) &= \tau(t)r_{\hat{x}}(t) + \eta(t). \end{aligned}$$

Với $t \in [0,5]$ và $u \in C\left([0,5], \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}^{nsy}\right)$, ta có

$$\begin{aligned} d_{\psi_A}\left(\hat{f}\left(t, \hat{x}(t)\right), \hat{f}\left(t, \hat{y}(t)\right)\right) &= \left|\tau(t)q_{\hat{x}}(t) - \tau(t)q_{\hat{y}}(t)\right| + \left|\tau(t)r_{\hat{x}}(t) - \tau(t)r_{\hat{y}}(t)\right| \\ &\le \max_{t\in[0,5]} \tau(t)\left(\left|q_{\hat{x}}(t) - q_{\hat{y}}(t)\right| + \left|r_{\hat{x}}(t) - r_{\hat{y}}(t)\right|\right) \\ &\le \max_{t\in[0,5]} \tau(t) d_{\psi_A}\left(\hat{x}(t), \hat{y}(t)\right). \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 3.1, bài toán (5) có duy nhất nghiệm tích phân trên $[0,5]$.

Nếu xét bài toán (5) với $p = \frac{1}{2}, \tau(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}t, \eta(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$ và $A = (1; 3; 4)$ thì ta nhận được nghiệm tích phân là

$$\hat{x}(t) = \psi_A\left(q_{\hat{x}}(t), r_{\hat{x}}(t)\right) = \psi_A(t^2, t) = (t^2 + t; 3t^2 + t; 4t^2 + t)$$

## 4. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra được các điều kiện đủ để bài toán Cauchy cho phương trình tiến hóa mờ phân thứ theo đạo hàm tương quan tuyến tính Caputo trên không gian mờ tương quan tuyến tính là có nghiệm.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. R. Abdollahi, A. Khastan, J.J. Nieto et (2018). On the linear fuzzy model associated with Caputo-Fabrizio operator. *Bound. Value Probl.*, 91, 1-18.
2. R.P. Agarwal, V. Lakshmikantham, J.J. Nieto (2010). On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty. *Nonlinear Anal.*, 72(6), 2859-2862.
3. S. Arshad, V. Lupulescu (2011). On the fractional differential equations with uncertainty. *Nonlinear Anal.*, 74(11), 3685-3693.
4. S. Arshad, V. Lupulescu (2011). Fractional differential equation with the fuzzy initial condition. Electron. J. *Differential Equations*, 34, 1-8.
5. B. Bede, S.G. Gal (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-numbervalued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*., 151, 581-599.
6. B. Bede (2013). *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer.
7. B. Bede, L. Stefanini (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets Syst.*, 230, 119-141.
8. E. Esmi, F.S. Pedro, L.C. Barros (2018). Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy-valued function. *Inform. Sci.*, 435, 150-160.

9. M. Mazandarani, A.V. Kamyad (2015). Modified fractional Euler method for solving fuzzy fractional initial value problem. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 26(1), $276-277$.
10. M. Mazandarani, N. Pariz, A.V. Kamyad (2018). Granular differentiability of fuzzynumber-valued functions. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 26(1), 310-323.
11. D.A. Murio (2006). On the stable numerical evaluation of Caputo fractional derivatives. *Comput. Math. Appl.*, 51(9), 1539-1550.
12. M. Najariyan, Y. Zhao (2018). Fuzzy fractional quadratic regulator problem under granular fuzzy fractional derivatives. *IEEE Tran Fuzzy Syst.*, 26(4), 2273-2788.
13. M. Najariyan, Y. Zhao (2020). On the stability of fuzzy linear dynamical systems. *J.Franklin Inst.*, 357(9), 5502-5522.
14. S. Salahshour, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy et al. (2012). Existence and uniqueness results for fractional differential equations with uncertainty. *Adv. Difference Equ.*, 112, 12-26.
15. N.T.K. Son (2018). A foundation on semigroups of operators defined on the set of triangular fuzzy numbers and its application to fuzzy fractional evolution equations. *Fuzzy Sets and Systems.*, 347, 1-28.
16. N.T.K. Son, N.P. Dong, H.V. Long (2019). Fuzzy delay differential equations under granular differentiability with applications. *Comp. Appl. Math.*, 38(3), 107-136.
17. N.T.K. Son, N.P. Dong, H.V. Long et al (2020). Linear quadratic regulator problem governed by granular neutrosophic fractional differential equations. *ISA Trans.*, 97, 296-316.
18. N.T.K. Son, H.T.P. Thao, N.P. Dong, H.V. Long (2021). Fractional calculus of linear correlated fuzzy-valued functions related to Fréchet differentiability. *Fuzzy Sets and Systems.*, 419, 35-66.
19. N.T.K. Son, H.T.P. Thao, H.V. Long, T. Allahviranloo (2022). State feedback control for fractional differential equation system in the space of linearly correlated fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems.*, 453, 164-191.
20. Y. Shen (2022). First-order linear fuzzy differential equations on the space of linearly correlated fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems.*, 429, 136-168.
21. Y.Shen (2022). A novel difference and derivative of linearly correlated fuzzy numbervalued functions. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 42(6), 6027-6043.
22. Y. Shen (2022). Calculus for linearly correlated fuzzy number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems.*, 429, 101-135.

## EXISTENCE OF A SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HIERARCHICAL FUZZY EVOLUTION EQUATION ACCORDING TO THE LINEARLY CORRELATED DERIVATIVE CAPUTO

***Abstract:*** *In this paper, we introduce and prove some properties of the Caputo fractional linear correlation derivative. From there, we study the existence of solutions of Cauchy's problem for the evolutionary equation in the space of linearly correlated fuzzy numbers according to the Caputo order differential linear correlation derivative of the form*

$$\begin{cases} {}_{LC}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{p}\hat{x}(t) & = \hat{g}\big(t, \hat{x}(t)\big), \\ \hat{x}(0) & = \hat{x}_0, \end{cases} \qquad t \in I = [0, b]$$

*where* ${}_{LC}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{p}\hat{x}(t)$ *is the Caputo linear correlation derivative of order* $p \in (0,1]$ *of the function* $\hat{x}(.), \hat{x}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ *where A is an asymmetric fuzzy number and* $\hat{g}: I \times C\big(I, \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}\big) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$.

***Keywords:*** *Caputo order linear correlation derivative, linearly correlated fuzzy space, fixed point theorem.*