

# CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA BAO ĐÓNG NGUYÊN CỦA LƯỖ THỪA IDEAL CẠNH CỦA ĐỒ THỊ PETERSEN

Đồng Hữu Mậu

Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

**Tóm tắt:** Với một ideal đơn thức  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  là một hàm tuyến tính khi  $s$  đủ lớn là tính chất quen thuộc của hàm chỉ số chính quy. Vấn đề xác định chỉ số dừng  $s_0$  để  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  là hàm tuyến tính và xác định các hệ số  $a, b$  trong biểu diễn  $\text{reg}(\bar{I}^s) = as + b$  với mọi  $s \geq s_0$  được rất nhiều nhà khoa học quan tâm. Có thể tiếp cận các vấn đề này từ khái niệm dài tự do tối thiểu hay dựa vào tính chất của các phần tử sinh của ideal  $I$  hay dựa vào bài toán quy hoạch tuyến tính. Trong bài báo này tác giả sẽ chỉ ra rằng hàm chỉ số chính quy của bao đóng nguyên của lưỡ thừa ideal cạnh  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  là hàm tuyến tính có hệ số góc 2 với  $n$  đủ lớn và chỉ số dừng  $\text{reg} - \text{stab}(I)$  với đồ thị Petersen thông qua đa diện Newton và bài toán quy hoạch tuyến tính.

**Từ khoá:** bao đóng nguyên, chỉ số chính quy, chỉ số dừng, đồ thị petersen, ideal cạnh.

Nhận bài ngày 10.04.2025; gửi phản biện, chỉnh sửa, duyệt đăng ngày 30.05.2025

Liên hệ tác giả: Đồng Hữu Mậu; email: dhmau@hnm.edu.vn

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford (gọi tắt là chỉ số chính quy) được bắt nguồn từ công trình về đường cong xạ ảnh của Castelnuovo và được Mumford [2] phát biểu định nghĩa cho các đa tạp xạ ảnh. Khái niệm này thiết lập mối liên hệ giữa lý thuyết đối đồng điều địa phương và các môđun xoắn phân bậc hữu hạn sinh trên vành đa thức trên một trường. Với  $R = k[x_1, \dots, x_r]$  là một vành đa thức và  $m = (x_1, \dots, x_r)$  là ideal thuần nhất cực đại trong  $R$ . Cho  $M$  là  $R$ -môđun hữu hạn sinh, với mỗi  $i = 0, \dots, \dim M$ , bất biến  $a_i$  của  $M$  được định nghĩa như sau:

$$a_i(M) = \max\{t \mid H_m^i(M)_t \neq 0\}, \quad (1)$$

ở đó  $H_m^i(M)$  là môđun đối đồng điều địa phương của  $M$  với giá  $m$ , với quy ước rằng  $a_i(M) = -\infty$  nếu  $H_m^i(M) = 0$ . Khi đó chỉ số chính quy của  $M$  được định nghĩa bởi

$$\text{reg}(M) = \max\{a_i(M) + i \mid 0 \leq i \leq \dim M\}. \quad (2)$$

Với  $I$  là một ideal thuần nhất thực sự của  $R$  ta có nhận xét rằng  $\text{reg}(I) = \text{reg}(R/I) + 1$ , điều này giúp ta nghiên cứu với  $\text{reg}(R/I)$  thay vì nghiên cứu với  $\text{reg}(I)$ .

Bao đóng nguyên của ideal  $I$  là tập  $\bar{I}$  gồm các phần tử  $x \in R$  thoả mãn một quan hệ nguyên dạng:

$$x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0, a_i \in I^i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Năm 1999, Cutkosky, Herzog và N.V. Trung [1] và độc lập với họ có Kodiyalam cùng chứng minh được rằng  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  là một hàm tuyến tính khi  $s$  đủ lớn. Giả sử  $\text{reg}(\bar{I}^s) = a \cdot s + b$  với  $s$  đủ lớn. Khi đó ta có khái niệm chỉ số dừng của hàm chỉ số chính quy:

$$\text{reg} - \text{stab}(I) = \min\{s_0 \geq 1 \mid \text{reg}(\bar{I}^s) = as + b, s \geq s_0\}. \quad (4)$$

Chỉ số chính quy  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  và chỉ số dừng  $\text{reg} - \text{stab}(I)$  là đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Đây là các vấn đề khó, chưa có cách tiếp cận mang tính tổng quát và hiệu quả. Hiện nay, các nhà khoa học đang tập trung nghiên cứu hai khái niệm này đối với các ideal đặc biệt [3], [5], [6]. Trong bài báo này tác giả sẽ trình bày các kết quả liên quan

đến chỉ số chính quy  $reg(\bar{I}^s)$  và chỉ số dừng  $reg - stab(I)$  đối với  $I$  là ideal cạnh của đô thị Petersen.

## 2. NỘI DUNG

Trong phần này, ta xét  $R = k[x_1, x_2, \dots, x_r]$ . Trước tiên, tác giả nhắc lại về phức đơn hình và một số kiến thức đại số tổ hợp.

### 2.1. Phức đơn hình, đa diện Newton và công thức Takayama

Phức đơn hình  $\Delta$  trên tập  $V = \{1, 2, \dots, r\}$  là tập hợp các tập con của  $V$ , gọi là các mặt, thoả mãn rằng nếu  $F \in \Delta, G \subset F$  thì  $G \in \Delta$ . Một mặt của  $\Delta$  không chứa trong một mặt khác của  $\Delta$  được gọi là mặt cực đại. Với  $T \subset V$ , kí hiệu  $x_T = \prod_{i \in T} x_i$ . Ideal Stanley-Reisner liên kết với phức đơn hình  $\Delta$  là ideal đơn thức không chứa bình phương  $I_\Delta = (x_T | T \notin \Delta)$ . Nếu  $I$  là một ideal không chứa bình phương thì nó là một ideal Stanley-Reisner của phức đơn hình  $\Delta(I) = \{T \subset V | x_T \notin I\}$ . Nếu  $I$  là ideal đơn thức bất kì ta cũng dùng kí hiệu  $\Delta(I)$  là phức đơn hình ứng với ideal đơn thức không chứa bình phương

$$\sqrt{I} = \{f \in R | f^n \in I \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \text{ nào đó}\}.$$

Để mô tả một ideal đơn thức người ta dùng đa diện Newton, điều này giúp việc nghiên cứu các ideal đơn thức phần nào bớt trừu tượng. Cho vector cột  $\alpha \in \mathbb{N}^r$  ta viết  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$ .

Định nghĩa 1. Cho  $I$  là một ideal đơn thức của  $R$ . Chúng ta định nghĩa

(i) Với một tập con  $A \subset R$ , tập các mũ của  $A$  là  $E(A) := \{\alpha | x^\alpha \in A\} \subset \mathbb{N}^r$ .

(ii) Đa diện Newton của  $I$  là  $NP(I) := \text{conv}\{E(I)\}$  là bao lồi của tập các mũ của  $I$  trong không gian  $\mathbb{R}^r$ .

Bao đóng nguyên của một ideal đơn thức  $I$  cũng là một ideal đơn thức, ta cũng có thể miêu tả  $\bar{I}$  như sau:

$$E(\bar{I}) = NP(I) \cap \mathbb{N}^r = \{\alpha \in \mathbb{N}^r | x^{n\alpha} \in I, n \geq 1 \text{ nào đó}\}.$$

$$NP(I^n) = nNP(I) = n\text{conv}\{E(I)\} + \mathbb{R}_+^r, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

**Bổ đề 2.** ([3, Bổ đề 3.3]) Đa diện Newton  $NP(I)$  là tập nghiệm của hệ bất phương trình có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^r | a_i x \geq b_i, i = 1, 2, \dots, s\},$$

ở đây  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ir})$  là các vector dòng, sao cho mỗi siêu phẳng với phương trình  $a_i x = b_i$  xác định một mặt cực đại của  $NP(I)$ , chứa  $t_i$  điểm độc lập affine của  $E(G(I))$ ,  $G(I)$  là hệ các đơn thức sinh ra ideal  $I$ , và song song với  $r - t_i$  các vector cơ sở chính tắc. Hơn nữa chúng ta có thể chọn  $0 \neq a_i \in \mathbb{N}^r$ , các số nguyên dương  $b_i, i = 1, 2, \dots, s$  sao cho  $a_{ij}, b_i \leq d(I)^{t_i}$  với mọi  $i, j$ , trong đó  $t_i$  là số thành phần toạ độ khác không của  $a_i$ .

Với  $I$  là một ideal đơn thức khác không, vì  $R/I$  là một đại số  $\mathbb{N}^r$  phân bậc nên  $H_m^i(R/I)$  là một  $R/I$  mô đun  $\mathbb{Z}^r$  phân bậc với mọi  $i$ . Với mỗi bậc  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}^r$ , để tính  $\dim_k H_m^i(R/I)_\alpha$  ta dùng công thức được đưa ra bởi Takayama cái được tổng quát từ công thức của Hochster trong trường hợp  $I$  là ideal không chứa bình phương.

Đặt  $G_\alpha = \text{supp}^-(\alpha) = \{i | \alpha_i < 0\}$ . Với một tập con  $F \subset V$ , đặt  $R_F = R[x_i^{-1} | i \in F]$ . Khi đó phức bậc  $\Delta_\alpha(I)$  được xác định bởi:

$$\Delta_\alpha(I) = \{F \subset V \setminus G_\alpha | x^\alpha \notin \text{IR}_{F \cup G_\alpha}\}. \quad (5)$$

Bổ đề 3. ([4, Định lý 2.2] - công thức của Takayama). Ta có

$$\dim_k H_m^i(R/I)_\alpha = \begin{cases} \dim_k \tilde{H}_{i-|G_\alpha|-1}(\Delta_\alpha(I); k) & \text{nếu } \text{supp}^-(\alpha) \subset \Delta(I) \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}. \quad (6)$$

Gọi  $\Gamma \subset \Delta(\bar{I}^n)$  là một phức đơn hình con với tập đỉnh  $V(\Gamma) \subset [r]$ . Chúng ta đặt

$$a_{\Gamma, i}(\bar{I}^n) = \begin{cases} \sup\{|\alpha| | \alpha \in \mathbb{Z}^r \text{ và } \Delta_\alpha(\bar{I}^n) = \Gamma \text{ nếu } \tilde{H}_{i+|V(\Gamma)|-r-1}(\Gamma; k) \neq 0 \\ -\infty & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases} \quad (7)$$

Hệ quả 4. ([3, Hệ quả 3.5.]) Ta có  $a_i(R/\bar{I}^n) = \max\{a_{\Gamma,i}(\bar{I}^n) \mid \Gamma \subset \Delta(\bar{I}^n)\}$  và nếu  $\tilde{H}_{i+|V(\Gamma)|-r-1}(\Gamma; k) \neq 0$  thì  $a_i(R/\bar{I}^n) \in \mathbb{Z}$ .

Ta gọi  $\text{supp}(a_i) = \{j \mid a_{ij} \neq 0\}$  là giá của  $a_i$ .

Bổ đề 5. ([3, Bổ đề 3.7.]) Giữ nguyên các kí hiệu của Bổ đề 2. Cho  $\alpha \in \mathbb{Z}^r, n \geq 1$ . Giả sử rằng  $\text{supp}^-(\alpha) \in \Delta(I)$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(\bar{I}^n) &= \langle [r] \setminus (\text{supp}(a_i) \cup \text{supp}^-(\alpha)) \mid i \leq 25; \text{supp}^-(\alpha) \rangle \\ &\subset [r] \setminus \text{supp}(a_i) \text{ và } \sum_{j \notin \text{supp}^-(\alpha)} a_{ij} \alpha_j < nb_i. \end{aligned} \quad (8)$$

## 2.2. Đa diện nguyên và bất biến $a_i(R/\bar{I}^n)$

Từ công thức (1) và (2) ta có thể giả sử  $H_m^i(R/\bar{I}^n)_\alpha \neq 0$  với  $i \geq 0, n \geq 1, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}^r$ .

Theo Bổ đề 3, ta có  $\dim_k H_m^i(R/\bar{I}^n)_\alpha = \dim_k \tilde{H}_{i-|G_\alpha|-1}(\Delta_\alpha(\bar{I}^n); k) \neq 0$ . Theo Hệ quả 4 ta suy ra  $a_i(R/\bar{I}^n) \in \mathbb{Z}$ .

Cho  $\Gamma$  là một phức đơn hình con của  $\Delta(I)$  sao cho  $\Gamma = \Delta_\alpha(\bar{I}^n)$  với  $\alpha \in \mathbb{Z}^r$  nào đó,  $n \geq 1$ . Không mất tính tổng quát ta giả sử  $V(\Gamma) = r', r' \leq r$  sao cho  $\text{supp}^-(\alpha) = \{r' + 1, \dots, r\}$ , hơn nữa ta có thể giả sử  $\text{supp}^-(\alpha) \subset [r] \setminus \text{supp}(a_i), i = 1, 2, \dots, s'$  và  $\text{supp}^-(\alpha)$  không nằm trong  $[r] \setminus \text{supp}(a_i)$  với  $i > s', s' \leq s$ . Khi đó theo (8) ta có thể giả sử rằng

$$\Gamma = \langle [r] \setminus \text{supp}(a_i) \cup \text{supp}^-(\alpha) \mid i = 1, \dots, s'' \rangle \text{ với } s'' \leq s'. \quad (9)$$

Với vectơ dòng  $a = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$  kí hiệu  $a' = (a_1, \dots, a_{r'}) \in \mathbb{R}^{r'}$ . Tương tự vectơ dòng. Ta xét các đa diện:

$$Q_{\Gamma,n} = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{r'} \mid \begin{array}{l} a'_i \cdot x' \leq n \cdot b_i - 1, i = 1, \dots, s'' \\ a'_l \cdot x' \geq n \cdot b_l - 1, l = s'' + 1, \dots, s' \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, r' \end{array} \right\}, \quad (10)$$

$$P_{\Gamma,n} = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{r'} \mid \begin{array}{l} a'_i \cdot x' \leq n \cdot b_i, i = 1, \dots, s'' \\ a'_l \cdot x' \geq n \cdot b_l, l = s'' + 1, \dots, s' \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, r' \end{array} \right\}. \quad (11)$$

**Bổ đề 6.** ([3, Định lý 3.8.]) Khi  $\tilde{H}_{i+r'-r-1}(\Gamma; k) \neq 0$  thì

$$a_{\Gamma,i}(\bar{I}^n) = \sup\{x_1 + \dots + x_{r'} \mid x' \in Q_{\Gamma,n} \cap \mathbb{N}^{r'}\} + r' - r. \quad (12)$$

Ta có nhận xét rằng, nếu gọi

$$\begin{aligned} \psi_n &= \max\{x_1 + \dots + x_{r'} \mid x' \in P_{\Gamma,n}\}, \\ \Psi_n &= \max\{x_1 + \dots + x_{r'} \mid x' \in Q_{\Gamma,n}\}, \\ M_n &= \max\{x_1 + \dots + x_{r'} \mid x' \in Q_{\Gamma,n} \cap \mathbb{N}^{r'}\}. \end{aligned} \quad (13)$$

thì  $\psi = \psi_1, \psi_n, \Psi_n$  đạt được tại một đỉnh của  $P_{\Gamma,1}, P_{\Gamma,n}, Q_{\Gamma,n}$  và  $\psi_n = \psi n$ . Theo [3, mệnh đề 1.3.] ta có  $\Psi_n = \psi \cdot n + b_0$  khi  $n$  đủ lớn. Theo công thức (12) ta có  $a_{\Gamma,i}(\bar{I}^n) = M_n + r' - r$ . Do  $Q_{\Gamma,n} \subset P_{\Gamma,n}$  nên  $M_n \leq \Psi_n \leq \psi_n$ . Điều này giúp ta khẳng định tính tuyến tính của hàm  $\text{reg}(\bar{I}^n)$ .

Hai kết quả dưới đây cho ta thấy  $\text{reg}(\bar{I}^n)$  là một hàm tuyến tính khi  $n$  đủ lớn và một chặn trên chỉ số dừng  $\text{reg} - \text{stab}(I)$ .

**Bổ đề 7.** ([7, Định lý 4.10]) Cho  $I$  là một ideal đơn thức khác không của  $R$ . Khi đó có số nguyên dương  $p$  và một số không nguyên không âm  $0 \leq e \leq \dim(R/I)$  sao cho  $\text{reg}(\bar{I}^n) = pn + e$  với  $n$  đủ lớn. Hơn nữa  $pn \leq \text{reg}(\bar{I}^n) \leq pn + \dim(R/I)$  với mọi  $n > 0$ .

**Bổ đề 8.** ([3, Định lý 3.13]) Cho  $I$  là một ideal đơn thức khác không của vành  $R = k[x_1, \dots, x_r]$  có bậc sinh cực đại là  $d(I)$ . Khi đó tồn tại số nguyên dương  $p \leq d(I)$  và một số nguyên không âm  $0 \leq e \leq \dim(R/I)$  sao cho  $\text{reg}(\bar{I}^n) = pn + e$  với mọi  $n \geq (r+1)(r+$

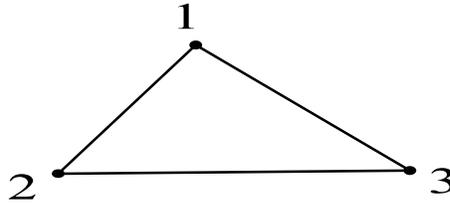
2).  $r^r \cdot d(I)^{2r^2}$  và  $pn \leq \text{reg}(\bar{I}^n) \leq pn + \dim(R/I)$  với mọi  $n \geq 1$ . Đặc biệt  $\overline{\text{reg} - \text{stab}(I)} \leq (r+1)(r+2) \cdot r^r \cdot d(I)^{2r^2}$ .

### 2.3. Ideal cạnh của một đơn đồ thị

Một đơn đồ thị  $G$  là một cặp  $(V, E)$  trong đó  $V = \{1, 2, \dots, r\}$  gọi là tập đỉnh của  $G$ , tập  $E = \{\{i, j\} | i, j \in V\}$  gọi là tập cạnh của  $G$ .

Ideal cạnh của đồ thị  $G$  là ideal đơn thức được sinh từ cạnh của đồ thị  $G$  tức là  $I = I(G) = (x_i x_j | \{i, j\} \in E)$ .

**Ví dụ 9.** Cho đồ thị  $G = (V, E)$  với  $V = \{1, 2, 3\}$ ,  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ , đây là một chu trình  $C_3$  như hình dưới đây:



Hình 1. Đồ thị  $C_3$

Ideal cạnh của đồ thị  $C_3$  là  $I = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_1) \in k[x_1, x_2, x_3]$

### 2.4. Đồ thị Petersen và chỉ số chính quy

Đồ thị Petersen  $G = (V, E)$  với tập đỉnh  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  và tập cạnh  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}, \{10, 6\}, \{1, 9\}, \{2, 7\}, \{3, 10\}, \{4, 8\}, \{5, 6\}\}$ .

Ideal cạnh của đồ thị  $G$  là ideal đơn thức, không chứa bình phương trong  $R = k[x_1, x_2, \dots, x_{10}]$ , được xác định:  $I = I(G) = (x_i x_j | \{i, j\} \in E)$ .

Từ Bổ đề 2. ta có được đa diện Newton của ideal  $I$  là nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{array} \right.$$

hay  $Ax \geq b$ , (6) trong đó



Với  $\alpha \in \mathbb{Z}^{10}$ ,  $\text{supp}^-(\alpha) = \emptyset \in \Delta(I)$ . Khi đó đa diện  $P_{\Gamma,1}$  gồm các  $x \in \mathbb{R}^{10}$  thỏa mãn:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{array} \right.$$

Đa diện  $P_{\Gamma,1}$  này có một đỉnh  $(1,1,0,0,0,0,0,0,0)$ . Do vậy  $\psi \geq 2$ . Kết hợp  $p = \psi \leq d(I)=2$  nên  $\psi = 2$ . Do đó với  $n$  đủ lớn  $\text{reg}(\bar{I}^n) = 2n + e$ , với  $e$  là hằng số nguyên  $0 \leq e \leq 4$ .

### 3. KẾT LUẬN

Trong bài báo trên tác giả đã chỉ ra với  $I$  là ideal cạnh của đồ thị Petersen mọi  $n \geq 132 \cdot 10^{10} \cdot 2^{200}$  thì  $\text{reg}(\bar{I}^n)$  là hàm tuyến tính với hệ số góc 2 và ta có  $\overline{\text{reg} - \text{stab}}(I) \leq 132 \cdot 10^{10} \cdot 2^{200}$ . Một hướng nghiên cứu tiếp theo là tìm ra chỉ số dừng  $\overline{\text{reg} - \text{stab}}(I)$  nhỏ hơn và tìm chính xác được hằng số  $e$ ,  $0 \leq e \leq 4$  thỏa mãn  $\text{reg}(\bar{I}^n) = 2n + e$ .

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. Cutkosky, J. Herzog and N.V. Trung (1999), Asymptotic behavior of the Castelnuovo-Mumford regularity, *Compositio Math.*
2. Mumford, D. (1966), *Lectures on curves on an algebraic surface*. Princeton University Press, New Jersey.
3. Hoa, L.T. (2022) *Asymptotic behavior of integer programming and the stability of the Castelnuovo-Mumford regularity*. *Math. Program.* 193, 157–194. <https://doi.org/10.1007/s10107-020-01595-x>.
4. Takayama, Y. (2005), *Combinatorial characterizations of generalized, Cohen-Macaulay monomial ideals*, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 48, pp. 327–344.
5. Arvind Kumar, Rajiv Kumar (2022), *Regularity comparison of symbolic powers, integral closure of powers and powers of edge ideals*. arXiv:2108.08609 [math.AC], <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.08609>.
6. Nguyen Cong Minh, Thanh Vu, (2022), *Integral closure of powers of edge ideals and their regularity*, *Journal of Algebra*, Volume 609, Pages 120-144, ISSN 0021-8693, <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.06.010>.

7. Hoa, L.T., Trung, T.N, (2018), *Stability of Depth and Cohen-Macaulayness of Integral Closures of Powers of Monomial Ideals*. Acta Math Vietnam 43, 67–81. <https://doi.org/10.1007/s40306-017-0225-0>.

## CASTELNUOVO-MUMFORD REGULARITY OF THE INTEGRAL CLOSURE OF POWERS OF THE EDGE IDEAL OF THE PETERSEN GRAPH

**Abstract:** For a monomial ideal, the function  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  being linear for sufficiently large  $s$  is a well-known property of the regularity index function. The problem of determining the stabilization index  $s_0$  such that  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  becomes linear, and finding the coefficients  $a, b$  in the expression  $\text{reg}(\bar{I}^s) = as + b$  for all  $s \geq s_0$ , has attracted much attention from researchers. This problem can be approached through the concept of minimal free resolutions, the properties of generators of the ideal  $I$ , or linear programming methods. In this paper, I show that the regularity index function of the integral closure of powers of the edge ideal  $\text{reg}(\bar{I}^s)$  is a linear function with slope 2 for sufficiently large  $s$ , and determine the stabilization index  $\overline{\text{reg} - \text{stab}}(I)$  for the Petersen graph via Newton polyhedra and linear programming.

**Keywords:** integral closure, Castelnuovo-Mumford regularity, stabilization index, Petersen graph, edge ideal.