TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM THỰC CỦA PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Hoàng Ngọc Tuyến

Trường Đại học Thủ đô Hà nội

Tóm tắt: *Bài viết đề cập đến vấn đề thường gặp của khoa học - kỹ thuật: Tính nghiệm gần đúng của phương trình phi tuyến tính một ẩn số với độ chính xác theo yêu cầu (sai số cho phép) bằng phương pháp chia đôi và thuật toán của phương pháp.*

Từ khóa: *Phương trình, khoảng cô lập nghiệm, nghiệm thực xấp xỉ, sai số.*

Nhận bài ngày 2.7.2023; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 24.7.2023

Liên hệ tác giả: Hoàng Ngọc Tuyến; Email: hntuyen@daihocthudo.edu.vn

1. MỞ ĐẦU

Nhiều vấn đề của khoa học – kỹ thuật cần được giải quyết bằng công cụ toán học. Trong số đó, không ít trường hợp dẫn đến bài toán tìm nghiệm của phương tình phi tuyến:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

(trong đó *f(x)* là hàm đại số hoặc siêu việt)

Đơn giản nhất là giải một phương trình đại số:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = 0 \tag{2}$$

Khi bậc của (2) bằng 3 hay 4 khá phức tạp (mặc dù có công thức tính nghiệm). Nếu bậc của (2) lớn hơn 4, hoặc (1) là phương trình siêu việt thì không có công thức tính nghiệm. Đó là một khó khăn khi tìm nghiệm của phương trình.

Ngoài ra, các giá trị (bằng số) của một đại lượng dùng trong tính toán (dữ liệu định lượng để mô hình hóa, thiết lập phương trình) là kết quả nhận được từ thực nghiệm: đo đạc, thí nghiệm, thống kê,… chỉ là các số gần đúng. Hay nói khác, ta không biết được giá trị chính xác của thông tin. Thêm nữa, lâu nay chúng ta vẫn sử dụng, tính toán với các số vô tỷ như $e, \pi, \sqrt{2}, \ldots$ Tuy nhiên, cách viết $e, \pi, \sqrt{2}, \ldots$ chỉ là ký hiệu hình thức, còn giá trị của các số vô tỷ đó cũng không xác định (số thập phân vô hạn không có chu kỳ).

Với những lý do trên, vấn đề tìm nghiệm đúng ($\xi \in R : f(\xi) = 0$) của phương trình là không thể. Để giải quyết "Bài toán" của khoa học - kỹ thuật, ta chấp nhận giá trị

$\alpha \in R : f(\alpha) \approx 0$ thay cho ξ với độ chính xác (nào đó). Phương pháp chia đôi được xây dựng như một công cụ hữu hiệu để tính nghiệm gần đúng của phương trình phi tuyến một ẩn số (1). Quy trình tính toán và kiểm tra sai số có tính chất như một thủ tục lặp nên có thể lập trình trên máy tính điện tử để tính ra nghiệm xấp xỉ khá đơn giản nhưng vẫn đảm bảo độ chính xác theo yêu cầu nào đó.

2. NỘI DUNG

Trong bài viết, luôn giả sử *f(x)* là hàm xác định và liên tục trên một khoảng (hữu hạn hoặc vô hạn) nào đó. Mỗi số thực $\xi \in R : f(\xi) = 0$ gọi là nghiệm thực (đúng) của (1) (hay không điểm của hàm *f(x)*). Ngoài ra, cũng giả thiết rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm cô lập.

Phương pháp chung để tính nghiệm gần đúng của (1) có thể tiến hành theo thứ tự như sau:

(i): Tìm khoảng *(a;b)* cô lập nghiệm thực của *f(x) = 0* (nghĩa là trong khoảng *(a;b)* chỉ chứa duy nhất một nghiệm thực của phương trình)

(ii): Xuất phát từ *(a;b)* tìm được ở *(1)*, tìm nghiệm gần đúng $\alpha \in (a;b)$ đạt độ chính xác (theo yêu cầu).

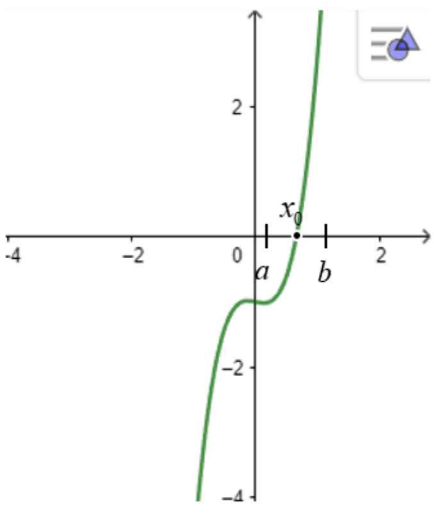
2.1. Khoảng cô lập nghiệm (KCLN)

2.1.1. Định lý 1.1

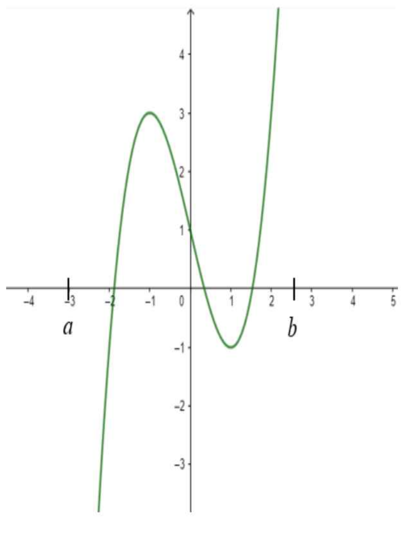
Giả sử *f(x)* xác định và liên tục trên *(a,b)*, nếu:

$f(a).f(b) < 0$ và đạo hàm bậc nhất của *f(x)* tồn tại, không đổi dấu trên *(a,b).*

Thì *(a,b)* là khoảng cô lập nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.



(a;b) là khoảng cô lập nghiệm



(a;b) không phải khoảng cô lập nghiệm

2.1.2. Phương pháp tìm khoảng cô lập nghiệm (Phương pháp giải tích)

Giả sử *f(x)* xác định và liên tục trên tập xác định và có đạo hàm trên tập xác định. Để kiểm tra xem khoảng *(a,b)* có cô lập nghiệm thực của phương trình (1) hay không, có thể làm như sau:

Bước 1: Tính các giá trị *f(a), f(b)*:

- Nếu $f(a).f(b) > 0$ thì dừng và (a,b) không cô lập nghiệm thực của (1)
- Nếu $f(a).f(b) < 0$ thì chuyển (Bước 2)

Bước 2: Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên (a,b) thì có nghiệm đúng $\xi \in (a,b)$.

Và (a,b) là khoảng cô lập nghiệm của (1)

Thí dụ: Tìm KCLN của phương trình: $x^3 - x - 2 = 0$.

Ta có: $f(x) = x^3 - x - 2$

$f(1) = -2$

$f(2) = 4$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

Tìm không điểm của đạo hàm bậc nhất: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có bảng dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+			

Ta thấy, $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(1,2)$

Như vậy, $(1,2)$ là khoảng cô lập nghiệm thực của phương trình đã cho.

2.2. Phương pháp chia đôi

Ý tưởng của phương pháp là: Xuất phát từ một lân cận (KCLN) đã biết, ta thu hẹp dần lân cận chứa nghiệm và chọn nghiệm xấp xỉ trong lân cận tùy ý đạt độ chính xác nhất định.

2.2.1. Nội dung phương pháp

Giả sử (a,b) là khoảng cô lập nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (1)

Chia đôi khoảng (a,b) bởi điểm chia: $\frac{a+b}{2}$

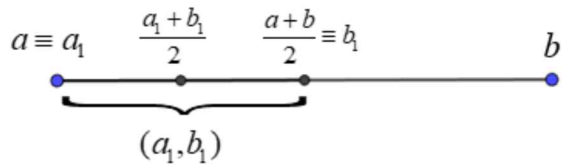
\+ Nếu $f(\frac{a+b}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \xi$ (là nghiệm đúng của (1)).

Tuy nhiên, trường hợp này gần như không bao giờ xảy ra.

\+ Ngược lại, $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$. Khi đó $f(\frac{a+b}{2})$ sẽ trái dấu với hoặc $f(a)$ hoặc $f(b)$

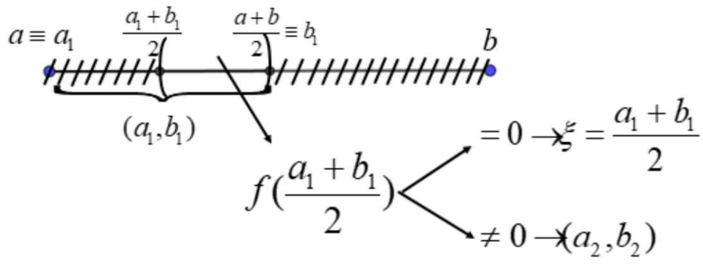
Vậy KCLN mới của (1) là một trong hai khoảng sau đây: $(a, \frac{a+b}{2})$ hoặc $(\frac{a+b}{2}, b)$.

Đặt KCLN mới là (a_1, b_1) sao cho $f(a_1).f(b_1) < 0$.



Tiếp tục chia khoảng (a_1,b_1) bởi điểm chia $\frac{a_1+b_1}{2}$

Kiểm tra $f(\frac{a_1+b_1}{2})$



Quá trình lặp lại …

Từ đó tìm được nghiệm α xấp xỉ ξ thỏa mãn:

$$|\alpha - \xi| < \varepsilon \text{ với } \varepsilon \text{ là sai số đã cho.}$$

2.2.2. Sự hội tụ của phương pháp

Nếu thực hiện vô hạn lần việc chia đôi các KCLN xuất phát từ (a,b), thì hoặc tại một bước nào đó ta tìm được nghiệm đúng ξ là điểm giữa của khoảng chia hoặc nhận được một dãy vô hạn các khoảng chồng lên nhau và thu nhỏ dần.

$$(a,b) \supset (a_1,b_1) \supset ... \supset (a_n,b_n) \supset ...$$

Sao cho $f(a_n).\ f(b_n) < 0$ (*)

Và $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ (n = 1, 2, …)

Dãy các đầu mút trái (a_n) đơn điệu không giảm, bị chặn trên bởi b

Dãy các đầu mút phải (b_n) đơn điệu không tăng, bị chặn dưới bởi a

Từ đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \xi; \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \xi$

$$\text{và } f(a_n).f(b_n) \xrightarrow{n\to+\infty} (f(\xi))^2 \le 0$$

Chứng tỏ $f(\xi) = 0$, và ξ là nghiệm đúng của phương trình.

2.2.3. Đánh giá sai số

Về mặt lý thuyết, nếu thực hiện vô hạn lần việc chia đôi các KCLN $(n \to +\infty)$ sẽ tìm được nghiệm đúng của (1). Tuy nhiên, trong thực tiễn quá trình đó là điều không thể. “Bài toán” của khoa học – kỹ thuật yêu cầu được giải và cho ra kết quả định lượng bằng số, do đó quy trình tính nghiệm của (1) phải dừng ở một bước (hữu hạn) nào đó – đồng nghĩa là chấp nhận giá trị (số) xấp xỉ với sai số chấp nhận được làm kết quả tính toán.

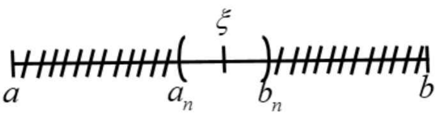
Sau mỗi bước (lặp), ta có KCLN mới với độ dài bằng $\frac{1}{2}$ KCLN cũ (trước nó).

$$(b_1 - a_1) = \frac{1}{2}|a_0 - b_0| = \frac{1}{2}(b - a)$$

....

$$(b_n - a_n) = \frac{1}{2}|a_{n-1} - b_{n-1}| = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Nếu dừng lại ở bước lặp thứ n (hữu hạn): (a_n, b_n) là KCLN của (1) chứa nghiệm đúng là: ξ .



Ta có thể chọn nghiệm xấp xỉ α là một giá trị tùy ý: $a_n \le \alpha \le b_n$

Tuy nhiên, để tiện cho việc kiểm tra sai số (Thuật toán dừng hay thêm bước lặp) ta chọn α

+ Nếu $\alpha = a_n \to |\alpha - \xi| = |a_n - \xi|$

$$\le \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) = \frac{1}{2^n}\left(b - a\right)$$

+ Nếu $\alpha = b_n \to \left|\alpha - \xi\right| \le \frac{1}{2^n}\left(b - a\right)$

+ Nếu $\alpha = \frac{a_n + b_n}{2} \to \left|\alpha - \xi\right| = \left|\frac{a_n + b_n}{2} - \xi\right|$

$$\le \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(b - a\right).$$

2.2.4. Đánh giá phương pháp

Phương pháp chia đôi là phương pháp đơn giản, dễ tính toán, dễ lập trình. Trong quá trình tính toán ít đề cập đến các thông tin của hàm *f(x)*. Sau mỗi bước lặp thứ i, ta chỉ tính một giá trị $f(\frac{a_i + b_i}{2})$ làm cơ sở để chọn khoảng cô lập nghiệm mới (đó là ưu điểm). Tuy nhiên, nhược điểm của phương pháp là tốc độ hội tụ chậm (hội tụ tuyến tính – khối lượng tính toán không nhỏ)

2.2.5. Thí dụ mô phỏng

Tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ bằng phương pháp chia đôi.

Ta có: $f(x) \equiv x^3 - x - 1$

$$f(1) = -1; f(2) = 5 \Rightarrow f(1).f(2) < 0$$

Ngoài ra *f(x)* xác định và liên tục trên (1;2) và trong khoảng này $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$

Xuất phát từ KCLN $(1;2)$

+ Chia $(1,2)$ bởi điểm chia: 1.5

Tính $f(1.5) = 0.875 > 0$

+ Chọn KCLN mới là $(1;1.5)$

Áp dụng phương pháp chia đôi xuất phát từ $(1,1.5)$ bởi điểm chia 1.25

Ta có: $f(1.25) = -0.296875 < 0$

+ Chọn KCLN mới là $(1.25,1.5)$

Áp dụng phương pháp chia đôi xuất phát từ $(1.25,1.5)$ bởi điểm chia 1.375

Ta có: $f(1.375) = 0.224609375 > 0$

+ Chọn KCLN mới là $(1.25,1.375)$

Tiếp tục quá trình…

Nếu quá trình dừng ở bước lặp thứ 5, có thể tóm tắt bằng bảng (đã quy tròn số liệu) như sau:

n	a_n	b_n	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$	$b_n - a_n$
0	1	2	1.5	0.875	1
1	1	1,5	1.25	-0.29688	0.5
2	1.25	1.5	1.375	0.22461	0.25
3	1.25	1.375	1.3125	-0.05151	0.125
4	1.3125	1.375	1.34375	0.08261	0.0625
5	1.3125	1.34375	1.328125	-0.01458	0.031255
6					
…					

Ta có thể chọn nghiệm xấp xỉ: $x_5 = 1.328125$ và sai số so với nghiệm đúng của (1) là:

$$|x_5 - \xi| \le \frac{1}{2^6}.(b-a) = \frac{1}{2}(0.031255) = 0.0156275$$

Nếu quá trình tiếp tục, ta sẽ tính được nghiệm xấp xỉ với độ chính xác tùy ý.

3. KẾT LUẬN

Xuất phát từ thực tế rằng nhiều vấn đề của khoa học – kỹ thuật cần phải thiết lập một quan hệ hàm giữa hai đại lượng *(x và f(x))* cũng như nhiều bài toán dẫn đến việc tìm nghiệm của phương trình phi tuyến dạng *f(x) = 0*. Trong đó *f(x)* là hàm xấp xỉ bằng nội suy, phương pháp bình phương cực tiểu…

Việc nghiên cứu để tìm ra phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ và xây dựng thuật toán để tính toán và lập trình trên MTĐT là rất quan trọng. Phương pháp chia đôi là một trong số đó giúp ta đạt được mục tiêu đã nêu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Trọng Vinh, Trần Minh Toàn (2013). *Giáo trình Phương pháp tính và Matlab*. Nxb. Bách khoa Hà Nội.
2. Hà Huy Khoái, Phạm Huy Điển (2003). Số học thuật toán. Viện Toán học Việt nam.
3. Phạm Kỳ Anh (1996). *Giải tích số*. Nxb. ĐHQGHN.

FINDING APPROXIMATE SOLUTIONS TO NON-LINEAR EQUATIONS USING THE BISECTION METHOD

Abstract: *When deadling with engineering practical problems, we often end up solving non-linear equations. Therefore, this article will discuss the use of bisection method to find approximate solutions to non-line ar equations in one variable with a given tolerance.*

Keywords: *Equation, isolating interval, approximate real roots, error.*