PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH VÀ VIỆC VẬN DỤNG TRONG GIẢI BÀI TOÁN TÍNH TỔNG CỦA MỘT VÀI CẤP SỐ CỘNG (CẤP SỐ NHÂN) ĐẶC BIỆT

Nguyễn Thị Thúy Vinh

Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

Tóm tắt: *Phương pháp diện tích thường sử dụng khi giải quyết một vài lớp các toán hình học. Ngoài ra, cũng là công cụ hỗ trợ đắc lực trong quá trình giải một số bài toán thuộc lĩnh vực đại số, giải tích ở cấp THPT. Trong bài viết này, xin được trình bày việc sử dụng phương pháp diện tích đối với một số bài toán tính tổng các số hạng của một vài cấp số cộng, cấp số nhân đặc biệt.*

Từ khóa: *Phương pháp diện tích, miền đa giác, hàm diện tich, cấp số cộng cộng, cấp số nhân, tổng n số hạng đầu.*

Nhận bài ngày 13.6.2023; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 24.7.2023

Liên hệ tác giả: Nguyễn Thị Thúy Vinh; Email: nttvinh@hnmu.edu.vn

1. MỞ ĐẦU

Phương pháp diện tích là một trong những phương pháp thường được sử dụng khi giải các bài toán hình học, đặc biệt là các bài toán chứng minh, định lượng trong hình học phẳng ở cấp THCS. Việc vận dụng phương pháp này vào lĩnh vực đại số – giải tích trong chương trình Toán cấp THPT chưa được khai thác nhiều. Tuy nhiên, chủ đề cấp số cộng, cấp số nhân (môn toán lớp 11) có nhiều bài toán có thể giải quyết bằng công cụ diện tích như một khẳng định về mối liên hệ giữa hình học và đại số. Ngoài ra nó cũng cho ta những hình ảnh trực quan hơn về các đối tượng toán học trừu tượng.

2. NỘI DUNG

2.1. Phương pháp diện tích

2.1.1. Phân hoạch của đa giác [1]

Đa giác H gọi là được phân hoạch thành các đa giác H1, H2, …, Hs nếu:

Miền đa giác H là hợp của các miền đa giác Hi: $[H] = \bigcup_{i=1}^{s}[H_i]$.

Các đa giác Hi đôi một không có điểm trong chung, tức là: $H_i \cap H_j = \emptyset$ với $i \neq j$.

2.1.2. Hàm diện tích [1]

Định lí: Kí hiệu D là tập hợp tất cả các đa giác đơn trong mặt phẳng.

Khi đó tồn tại duy nhất ánh xạ S: D → $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn các tính chất sau:

Nếu hai đa giác H1 và H2 bằng nhau thì S(H1) = S(H2).

Nếu đa giác H được phân hoạch thành các đa giác H1, H2…, Hn thì $S(H) = \sum_{i=1}^{n} S(H_i)$.

Nếu hình vuông có cạnh bằng 1 thì S(V)=1.

Ánh xạ S: D → $\mathbb{R}^+$ nêu trong định lí trên gọi là hàm diện tích. Với H là một đa giác đơn thì S(H) được gọi là diện tích của đa giác H.

2.1.3. Phương pháp diện tích

Theo [6] phương pháp diện tích là phương pháp giải bài toán hình trong mặt phẳng qua diện tích của một miền phẳng nào đó. Để giải bài toán đã cho ta chọn một miền phẳng (D) với diện tích S, sau đó đem chia miền (D) thành n miền nhỏ một cách thích hợp rồi tính diện tích S1, S2…, Sn của các miền nhỏ đó. Từ S = S1+ S2 +…+ Sn suy ra lời giải của bài toán.

Như vậy trong phương pháp diện tích ngoài việc sử dụng các công thức tính diện tích của các đa giác đặc biệt như: tam giác (tam giác vuông, tam giác thường); tứ giác (hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, hình thang) ta còn sử dụng tính chất rất quan trọng của hàm diện tích (tính chất thứ 2): "Nếu đa giác H được phân hoạch thành các đa giác H1, H2, Hn thì $S(H) = \sum_{i=1}^{n} S(H_i)$."

2.2. Vận dụng phương pháp diện tích trong việc tính tổng các số hạng của một vài cấp số cộng, cấp số nhân

2.2.1. Bài toán 1

Tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$,công sai d=2.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

Đây chính là bài toán tính tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên. Đối với HS lớp 11, các em có thể áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có $\mathrm{u}_1 = 1$, $\mathrm{u}_\mathrm{n} = 2\mathrm{n} - 1$, công sai d = 2 như sau:

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1).n}{2} = n^2$$

Với việc vận dụng phương pháp diện tích trong bài toán này, chúng ta có thể hình dung thông qua các bước sau:

Cho hình vuông có cạnh bằng n được chia thành n^2 hình vuông có cạnh bằng 1. Khi đó diện tích của mỗi hình vuông nhỏ là 1 (đvdt) và diện tích của hình vuông ban đầu là n^2 (đvdt).

Để đưa ra được công thức tính S_n, ta lần lượt xét diện tích S_1, S_2 , S_3, S_4 , ... của các hình vuông có 1 đỉnh là A, cạnh bằng 1, 2, 3, 4, 5,…, n bằng cả 2 hướng tiếp cận: thứ nhất áp dụng trực tiếp công thức tính diện tích hình vuông khi biết độ dài cạnh; thứ hai áp dụng tính chất thứ 2 của hàm diện tích.

S_1 là diện tích của hình vuông có cạnh bằng 1 ⇒ $S_1 = 1^2$

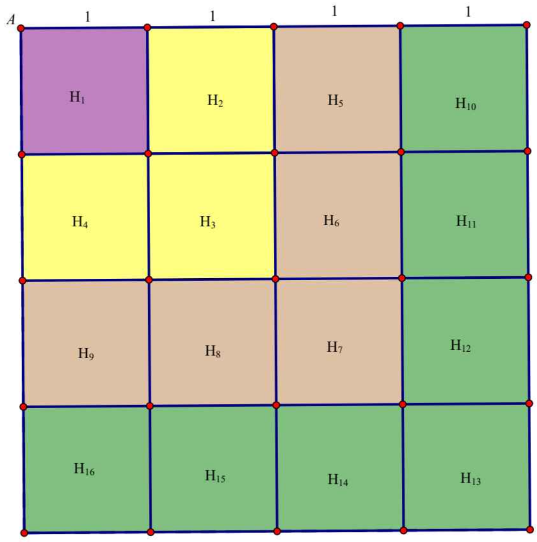
Hình vuông này gồm 1 hình vuông nhỏ H_1 ⇒ $S_1 = 1$.

Do đó, ta có: $1 = 1^2$

S_2 là diện tích của hình vuông có cạnh bằng 2 ⇒ $S_2 = 2^2$

Hình vuông này gồm 4 hình vuông nhỏ H_1, H_2, H_3, H_4 trong đó 3 hình vuông H_2, H_3, H_4 bao quanh H_1 $\Rightarrow S_2$ = 1+3

Do đó, ta có: 1 + 3 = 2^2



S_3 là diện tích của hình vuông có cạnh bằng 3 $\Rightarrow S_3 = 3^2$

Hình vuông này gồm 9 hình vuông nhỏ $H_1, H_2, H_3, H_4,\ H_5, H_6, H_7, H_8, H_9$, trong đó 5 hình vuông H_5, H_6, H_7, H_8, H_9 bao quanh các hình vuông H_2, H_3, H_4; 3 hình vuông H_2, H_3, H_4 bao quanh H_1 $\Rightarrow S_3$ = 1+ 3 + 5. Do đó, ta có: 1 + 3 + 5 = 3^2

S_4 là diện tích của hình vuông có cạnh bằng 4 $\Rightarrow S_4 = 4^2$

Lập luận tương tự như trên $\Rightarrow S_3$ = 1+ 3 + 5 +7

Do đó, ta có: 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2

Cứ tiếp tục quá trình như vậy ta sẽ có kết quả: 1 + 3 + 5 + 7 + … + (2n -1) = n^2

hay $S_n = n^2$

Bàn luận: Với việc vận dụng phương pháp diện tích như trên ta thấy rằng không chỉ giúp cho HS có thêm một hướng để xây dựng công thức tính tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên (đặc biệt là đối với HS cấp THCS khi mà các em chưa có kiến thức về dãy số, cấp số cộng) mà còn giúp HS dễ nhớ kết quả thông qua biểu diễn trực quan hình học.

2.2.2. Bài toán 2

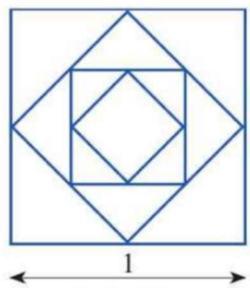
Tính tổng vô hạn của cấp số nhân (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

Đây là cấp số nhân lùi vô hạn nên HS lớp 11 có thể áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{1}{2}$, công bội q = $\frac{1}{2}$ như sau:

S = $\frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Để HS có cái nhìn trực quan hơn về tổng trên chúng ta sẽ cùng xem xét cách sử dụng phương pháp diện tích đã được thể hiện trong SGK 11 (Bộ Cánh diều) thông qua bài tập sau:



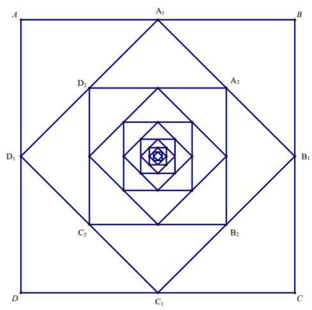
Hình 3

"Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như Hình 3. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a, Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n.

b, Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành." [4]

Gợi ý lời giải:



Ở bước 1, ta được hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và $S_1 = \frac{1}{2}$

Để tính được S_1 như trên ta sử dụng 2 cách:

Cách 1: (Sử dụng CT diện tích hình vuông thông qua cạnh của nó)

Cách 2: Ta nhận thấy hình vuông ABCD được phân hoạch thành: 4 hình tam giác vuông bằng nhau và 1 hình vuông $A_1B_1C_1D_1$. Ngoài ra, tổng diện tích 4 hình tam giác vuông bằng diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1$. Hơn nữa ghép 4 tam giác đó với nhau tạo thành 1 hình vuông bằng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Vì vậy $S_1 = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}$

Ở bước 2, ta được hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ và tính tương tự ta có $S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

……

Ở bước n, ta được hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ và $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Như vậy nếu tiếp tục quá trình tạo ra các hình vuông đến vô hạn thì ta có tổng diện tích các hình vuông chính là:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn tìm được $S = 1$.

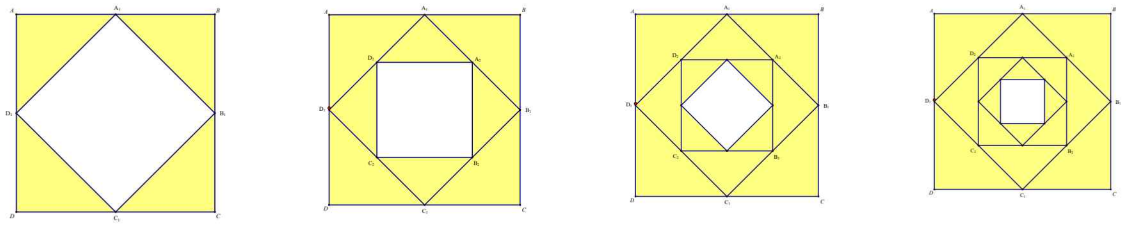
Ta có thể hiểu rằng tổng diện tích các hình vuông được tạo ra sau vô hạn bước như trên bằng đúng diện tích hình vuông ban đầu.

Bàn luận: Sau đây sẽ sử dụng biểu diễn trực quan để HS có hình dung cụ thể hơn.

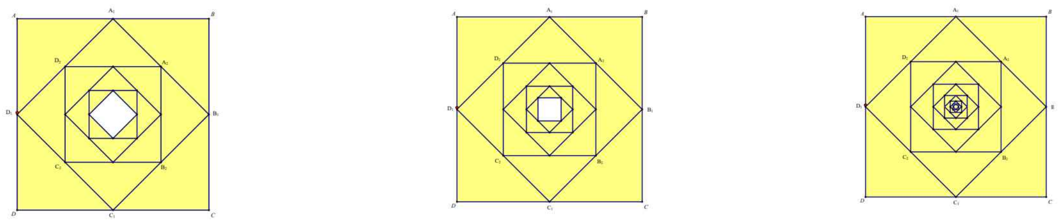
Trong cách 2 ở bước 1, ta thấy rằng diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có thể được thay bằng tổng diện tích của 4 tam giác vuông A_1AD_1, C_1DD_1, C_1CB_1, A_1BB_1; diện tích hình vuông

$A_2B_2C_2D_2$ có thể được thay bằng tổng diện tích của 4 tam giác vuông $A_1A_2D_2$, $D_1C_2D_2, C_1B_2C_2, B_1A_2B_2$. Tương tự đối với các hình vuông còn lại. Vậy thì sau vô hạn bước tổng diện tích các hình vuông được tạo ra chính là tổng diện tích của tất cả các tam giác vuông thu được sau mỗi bước. Và đó chính là diện tích của hình vuông ABCD ban đầu.

Hình ảnh dưới đây sẽ mô tả cho quá trình đi đến kết quả trên (phần hình được tính diện tích tô màu vàng)



S_1 $\quad$ $S_1 + S_2$ $\quad$ $S_1 + S_2 + S_3$ $\quad$ $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$



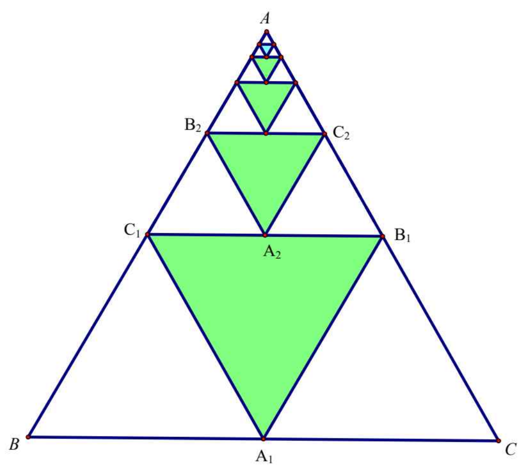
$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$ $\quad$ $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$ $\quad$ $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$

Bài toán 3: Tính tổng vô hạn của cấp số nhân với $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$S = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots$$

Đây là cấp số nhân lùi vô hạn nên HS lớp 11 có thể áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{1}{4}$, công bội $q = \frac{1}{4}$ như sau:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$



Vận dụng phương pháp diện tích được thể hiện qua việc giải quyết tình huống sau:

Cho hình tam giác đều ABC có diện tích S, từ tam giác đều này ta đục tam giác đều ở giữa A_1 B_1 C_1 (đây là tam giác có các đỉnh là các trung điểm các cạnh của tam giác đều ABC ban đầu), tương tự tiếp tục đục tam giác đều ở trên 〖A〗_2 B_2 C_2 (tam giác có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác đều AB_1 C_1),….. Sau n bước ta sẽ thu được n tam giác đều A_1 B_1 C_1 , 〖A〗_2 B_2 C_2 , 〖A〗_3 B_3 C_3 ,…, 〖A〗_n B_n C_n (các tam giác màu xanh trong hình 3). Hãy tính tổng diện tích của các hình tam giác thu được sau vô hạn bước theo diện tích tam giác đều ABC. [3]

Gợi ý: Sau n bước ta tạo thành 3 dãy tam giác bằng nhau. Vì vậy tổng diện tích của các hình tam giác thu được sau vô hạn bước bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác đều ABC.

Mặt khác: $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ABC}$, $S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{4}S_{A_1B_1C_1} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_{ABC}$,…, $S_{A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n S_{ABC}$

Do đó: $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots = \frac{1}{3}$ hay $S = \frac{1}{3}$

3. KẾT LUẬN

Bài báo đề cập đến phương pháp diện tích và ứng dụng vào giải một số bài toán đại số, giải tích (tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng, tổng của cấp số nhân lùi vô hạn) thông qua một vài ví dụ cụ thể trong chương trình toán phổ thông nhằm mục đích giới thiệu thêm một công cụ (thuộc lĩnh vực hình học) có thể được vận dụng trong việc giải quyết các bài toán thuộc lĩnh vực đại số, giải tích.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Văn Như Cương (chủ biên), Hoàng Ngọc Hưng, Đỗ Mạnh Hùng, Hoàng Trọng Thái (2005). *Hình học sơ cấp và thực hành giải toán*. Nxb. Đại học Sư phạm
2. G. Polya (1997a). *Giải bài toán như thế nào?*. Nxb. Giáo dục Việt Nam.
3. Trần Vui (2009). Biểu diễn trực quan trong việc học toán. *Tạp chí Giáo dục*, số 227 (kì 1 – 12/2009), tr 53,54,55,39.
4. SGK – Toán 11 (tập 1) – Bộ Cánh diều. Công ty cổ phần đầu tư xuất bản – thiết bị Giáo dục Việt Nam.
5. SGK – Toán 11 (tập 1) – Bộ Chân trời sáng tạo. Nxb. Giáo dục Việt Nam.

APPLYING THE AREA METHOD TO COMPUTE SUMS OF SPECIAL ARITHMETIC PROGRESSIONS AND GEOMETRIC PROGRESSIONS

Abstract: *The area method is commonly used to solve certain classes of geometric problems. It is also a powerful tool in solving algebraic or calculus problems in high school. In this article, we mention the area method and how to apply it to calculate sums of terms in certain arithmetic progressions and geometric progressions.*

Keywords: *Area method, polygons, the area function, arithmetic progression, geometric progression*