

TÍNH LIÊN TỤC VÀ RỜI RẠC, CHUYỂN ĐỘNG VÀ ĐỨNG YÊN TRONG LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN

NGUYỄN PHÚ LỘC(*)

Tóm tắt: *Mối quan hệ giữa liên tục và rời rạc, giữa hữu hạn và vô hạn, giữa chuyển động và đứng yên là những vấn đề quan trọng không chỉ của triết học, mà cả của triết học trong toán học. Thông qua sự phân tích việc giải quyết các vấn đề trên trong lịch sử phát triển phép tính vi phân và tích phân, tác giả cho rằng, có thể phân ngành toán học này thành 2 giai đoạn: Giai đoạn trước Weierstrass, phép tính vi phân và tích phân có tính trực giác, dựa chủ yếu vào quan điểm chuyển động. Giai đoạn từ Weierstrass trở về sau, tính "chuyển động" bị lược bỏ khỏi các khái niệm giới hạn và khái niệm liên tục. Nhờ vậy, chúng ta đã có một ngành giải tích đồ sộ giúp cho việc nghiên cứu và ứng dụng thuộc tính "chuyển động" của vật chất được thuận lợi hơn.*

Trong lịch sử toán học, phép tính tích phân ra đời trước phép tính vi phân. Phép tính tích phân có nguồn gốc từ Hy Lạp cổ đại. Song, các công trình được coi là cội nguồn của phép tính tích phân, như Phương pháp "vét kiệt" (Method of Exhaustion) của Eudoxus (408-355 TCN); "Phương pháp" của Archimedes (287-212 TCN), chỉ được tìm thấy vào năm 1906. Bằng việc sử dụng khái niệm các yếu tố (elements) của một hình (đường thẳng được tạo thành bởi các điểm, một hình phẳng được tạo bởi các đường thẳng, một hình khối được tạo bởi các mặt phẳng), Archimedes đã thu được những kết quả quan trọng về thể tích và diện tích. Trong thế kỷ thứ XIV, bài toán nếu một cố thể di chuyển với vận tốc thay đổi, nó sẽ đi được một quãng đường là bao nhiêu trong một thời gian cho trước đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Với cách biểu diễn vận tốc bằng hình học, Nicole Oresme (1323- 1382) đã xác định quãng đường đi được của cố thể đó bằng diện tích tạo bởi các thanh biểu diễn vận tốc. Còn Niuton thì cho rằng, xét về phương diện cơ học, tất cả các bài toán của môn phép tính vi phân và tích phân có thể quy về hai bài toán:

1) Xác định vận tốc tức thời của chuyển động trên quãng đường đã biết;

2) Xác định quãng đường đi được trong khoảng thời gian đã cho và theo vận tốc đã biết của chuyển động.

Như vậy, phép tính tích phân có liên quan đến việc phân chia một đại lượng liên tục thành vô hạn các đại lượng vô cùng bé, còn việc nghiên cứu chuyển động trở thành một trong những nguyên nhân chính cho sự ra đời của phép tính vi phân và tích phân. Tuy nhiên, để đạt được sự chặt chẽ như ngày nay, các nhà nghiên cứu phép tính vi phân và tích phân đã phải đối mặt các vấn đề về mối quan hệ giữa liên tục và rời rạc; giữa hữu hạn và vô hạn; giữa chuyển động và đứng yên. Đó là những vấn đề lớn không chỉ của triết học, mà cả của triết học trong toán học (Philosophy of Mathematics).

1. Về mối quan hệ giữa liên tục và rời rạc, vô hạn và hữu hạn. Trong cuộc sống, chúng ta coi thời gian và không gian vừa liên tục, vừa gián đoạn, cả hữu hạn lẫn vô hạn. Thời gian có thuộc tính liên tục, nhưng người ta lại phân nó thành giây, phút, giờ - đó lại là rời rạc. Đường thẳng cũng là trường hợp điển hình cho sự liên tục. Nhưng một điểm trên đường thẳng hay các con số tự nhiên kết hợp với điểm trên đường thẳng lại là rời rạc. Từ đó, một câu hỏi được đặt ra là làm thế nào để tính

(*) Bộ môn Toán, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ.

liên tục có thể được mô tả thông qua tính rời rạc?

Từ khái niệm nguyên tử với tư cách hạt vật chất không thể phân chia nhỏ thêm được nữa của Demócrit (460 – 370 TCN) thì đường thẳng được quan niệm là cái được tạo thành bởi vô số các nguyên tử. Thế nhưng, luận điểm này đã không thể đứng vững được trước lập luận của Dênon (490 – 430 TCN). Theo Dênon, nếu nguyên tử có độ dài bằng không thì không thêm vào không vẫn là không và do vậy, tổng vô hạn các đại lượng bằng không vẫn bằng không. Vậy, đường thẳng có độ dài bằng không - đó là điều vô lý. Ngược lại, nếu nguyên tử có độ dài thì tổng vô hạn các nguyên tử sẽ có độ dài vô hạn và do vậy, độ dài của một đoạn thẳng là vô hạn. Đó cũng là điều vô lý. Từ đó, Dênon kết luận rằng, đoạn thẳng (hay đường thẳng) sẽ không thể được phân chia thành vô hạn các phần tử hay nguyên tử. Phải chăng vì những mâu thuẫn này, những mâu thuẫn mà các nhà toán học Hy Lạp cổ đại đã không giải quyết được, nên phép tính tích phân và vi phân không phát triển thêm bao nhiêu trong một thời gian dài của lịch sử, kể từ sau nền toán học Hy Lạp cổ đại.

2. Về mối quan hệ giữa chuyển động và đứng yên. Ngày nay, các khái niệm của phép tính vi phân và tích phân, như khái niệm giới hạn hay khái niệm liên tục được định nghĩa ở cấp độ hình thức theo ngôn ngữ “ ϵ , δ ” có tính chất tĩnh (static); nhưng người ta vẫn thấy yếu tố chuyển động - dấu vết của lịch sử - liên quan đến các thuật ngữ dùng cho các khái niệm đó, như hàm số $f(x)$ dần tới L khi x dần tới a , hay hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới a . Các khái niệm “dần tới” này hiện đã được định nghĩa một cách chính xác. Nhưng, trong lịch sử toán học, khi đề cập đến sự “dần tới” có tính chất chuyển động, người ta đã gặp phải những nghịch lý nổi tiếng của Dênon. Đó là:

- Nghịch lý phân đôi. Để đi qua một đoạn đường nào đó, trước hết chúng ta phải đi qua nửa đoạn đường đó. Và, để đi qua nửa đoạn đường này, ta lại phải đi qua phân nửa của nó..., cứ mãi thế đến vô tận. Rốt cuộc là chúng ta chỉ đứng yên ở vị trí ban đầu. Như vậy, chuyển động không xảy ra.

- Nghịch lý mũi tên. Nếu thời gian được chia thành những khoảnh khắc nhỏ không thể phân chia được thì trong từng khoảnh khắc đó, mũi tên không chuyển động. Như vậy, mũi tên đứng im và không có sự chuyển động.

Từ những nghịch lý đó, Dênon cho rằng, không có chuyển động xảy ra nếu có sự phân chia một đại lượng liên tục thành vô hạn những đại lượng rời rạc. Tìm câu trả lời thỏa đáng bằng toán học cho các nghịch lý của Dênon là một vấn đề khó, dù rằng, về mặt triết học, Hêgen cho rằng vận động là quá trình thống nhất biện chứng giữa vận động và đứng yên. Và, Ph.Ăngghen cũng nhấn mạnh rằng, ngay cả vận động cơ học cũng là quá trình chứa đựng và giải quyết mâu thuẫn: sự vận động, vừa đứng yên; nó vừa ở vị trí này đồng thời lại không ở vị trí đó.

3. Khái niệm vô cùng bé. “Nỗi sợ hãi” khái niệm vô hạn kéo dài từ Dênon đến thế kỷ thứ XVII. Nhưng rất may, khái niệm vô hạn được quan tâm trở lại bởi J.Kêple (1571-1630), khi ông sử dụng phương pháp vô cùng bé (infinitesimals), và bởi B.Cavalieri (1598-1647) với công trình dựa trên “cái không phân chia được” (indivisibles). Các công trình này đã mở đường cho I.Niutơn (1642-1727) và G.W.Lépniét (1646-1716) phát triển môn phép tính vi phân và tích phân sau này.

Lépniét xem vi phân là một vô cùng bé và bằng hiệu của hai giá trị gần nhau của đại lượng (từ đó vô cùng bé được kí hiệu bằng d là chữ cái đầu của từ La tinh differentia - có nghĩa là hiệu, và tỉ số các

$\frac{dy}{dx}$ ứng với đạo hàm); đường cong được

xem như đường gấp khúc với vô cùng lớn các cạnh vô cùng bé. Năm 1688, Lép-nít đã xem tích phân như là tổng một số vô hạn các vi phân và kí hiệu là $\int$ ($\int$ là chữ cái đầu của từ La tinh summa - có nghĩa là tổng). Như vậy, các khái niệm cơ bản của giải tích vô cùng bé của Lép-nít là vi phân - hiệu vô cùng bé, và tích phân - tổng vô hạn các vi phân.

Mặc dù phép tính vi phân và tích phân được phát triển trên cơ sở khái niệm vô cùng bé, nhưng khái niệm này vào thời đó còn khá mơ hồ, không đủ chặt chẽ: có khi nó là một biến số, có khi nó lại là một hằng số; khi thì nó là một đại lượng hữu hạn, khi thì nó lại là một đại lượng vô cùng nhỏ hoặc là bằng không. Chẳng hạn, khi coi "dy" và "dx" trong $\frac{dy}{dx}$ là đại lượng

vô cùng bé, Lép-nít cho rằng, dx là một số gia vô cùng bé và khác không của x và dy, được định nghĩa là $dy=f(x+dx)-f(x)$ cũng luôn khác không. Ví dụ, nếu $y=f(x)=x^2$, thì $dy=(x+dx)^2-x^2=2x(dx)+(dx)^2$ (I)

$$\frac{dy}{dx} = 2x+dx \text{ (II). Theo Lép-nít, nếu cho}$$

$dx=0$, ta có tiếp tuyến tại x với hệ số góc là 2x.

Theo cách lập luận trên đây, nếu dx là một số khác không thì mới có thể thực hiện phép chia hai vế của (I) để có (II) và như vậy, hệ số góc của tiếp tuyến không bằng 2x. Rõ ràng, lập luận của Lép-nít có mâu thuẫn, vì có lúc ông xem dx là một đại lượng khác không, có lúc ông lại xem dx là đại lượng bằng không.

P.Phécma (1601 - 1665) là một trong những người có công đầu trong việc xây dựng phép tính vi phân. Lập luận mà ông đưa ra để tìm cách chia một đại lượng cho trước thành hai đại lượng sao cho tích của hai đại lượng này đạt giá trị lớn nhất như sau: Gọi B là đại lượng cho trước. Chia B thành hai phần A và B - A, E là đại lượng vô cùng bé. Thay A bởi đại lượng A - E: (A -

E) (B - (A - E)). Sau đó, cho nó bằng A (B - A): $A(B - A) = (A - E)(B - (A - E))$ hay $2AE - BE - E^2 = 0$. Tiếp theo chia hai vế cho E: $2A - B - E = 0$. Nếu $E=0$ thì $2A - B = 0$ hay $A = \frac{B}{2}$.

Như vậy, Phécma đã tìm được cách giải bài toán được đặt ra ở trên. Tuy nhiên, trong quá trình lập luận trên, có lúc Phécma đã cho E khác không (khi thực hiện phép chia cho E) và có lúc ông lại cho $E = 0$.

4. *Vô cùng bé, chuyển động và liên tục.*
Để làm rõ khái niệm vô cùng bé nhằm làm cho phép tính vi phân và tích phân có cơ sở chặt chẽ, người ta phải đối mặt với *vấn đề chuyển động*. Chẳng hạn, khi định nghĩa khái niệm vô cùng bé là một biến dần tới số 0, nhưng sự "dần tới" một giá trị nào đó lại liên quan đến khái niệm chuyển động mà trong phép tính vi phân và tích phân, chuyển động là một *quá trình liên tục* với nghĩa là biến phải nhận mọi giá trị trong khoảng diễn ra chuyển động. Vậy, làm thế nào để mô tả bằng toán học biến di chuyển qua tất cả các điểm kế tiếp nhau trong một khoảng? Ta không thể nói rằng "đi từ điểm này đến điểm kế tiếp sau", vì không có điểm kế tiếp (giữa hai điểm bất kỳ luôn có một điểm khác).

B.Bolzano (1781-1848) đã phủ định sự tồn tại của các số vô cùng bé (infinitesimals) và các số vô cùng lớn, song vào năm 1817, ông lại đưa ra một định nghĩa chính xác về tính liên tục: hàm số $f(x)$ là liên tục trong một khoảng, nếu tại bất kỳ x nào trong khoảng đó mà hiệu $f(x+\omega)-f(x)$ có thể làm nhỏ tùy ý khi cho ω đủ nhỏ.

Khái niệm giới hạn khi được chính xác hoá cũng đã gặp những khó khăn tương tự. Bởi vì hằng số c được gọi là giới hạn của x nếu ta có thể làm cho x tiến gần đến c một cách tùy ý (as close as desired) thông qua sự thay đổi liên tục. Khi đó lại xuất hiện vấn đề *làm thế nào có thể mô tả khái niệm "gần một cách tùy ý" bằng toán học*.

A.L.Cauchy (1789 - 1857) là người có công lớn trong việc làm chính xác hoá khái niệm giới hạn và liên tục, khi ông đưa ra định nghĩa về khái niệm giới hạn mà cho đến nay, chúng ta vẫn còn sử dụng: x là biến số thực có giới hạn là c nếu với bất kỳ số dương cho trước nào, giá trị tuyệt đối giữa hiệu của x và c có thể làm nhỏ hơn số dương cho trước đó. Nhà toán học Đức - K.Weierstrass (1815 - 1897) đã làm rõ hơn cụm từ “một biến dần tới giới hạn”, khi coi biến chẳng qua là một chữ cái thay thế cho một phần tử thuộc một tập hợp giá trị mà chữ cái đó có thể nhận được. Biến liên tục là một biến mà nếu x_0 thuộc tập giá trị của biến và δ là một số dương bất kỳ, có những giá trị khác của biến thuộc khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Từ đó, ông định nghĩa khái niệm hàm số liên tục như sau: Hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ khi với mọi số dương ε cho trước, số dương δ cũng đều tồn tại để sao cho với mọi x thoả $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Một cách tương tự, ông đã định nghĩa khái niệm giới hạn của hàm số như sau: Hàm số $f(x)$ có giới hạn là L tại $x = x_0$ nếu với mọi số dương ε cho trước, số dương δ cũng đều tồn tại để sao cho với mọi x thoả $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Như vậy, cả Bolzano, Cauchy lẫn Weierstrass đều loại bỏ tính chất “chuyển động” khi định nghĩa các khái niệm cơ sở của phép tính vi và tích phân. Các thuật ngữ “hàm số $f(x)$ dần tới L khi x dần tới a ”, hay “hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới a ” mà các ông đưa ra chứa đầy mâu thuẫn (bản thân x dần tới a phải được định nghĩa trước đã) hiện vẫn được sử dụng, nhưng chúng hoàn toàn không tương hợp với định nghĩa khái niệm giới hạn của hàm số theo ngôn ngữ “ ε, δ ”. Mặc dù vậy, các ông vẫn được thừa nhận là những người có công lớn trong việc hình thức hoá phép tính vi phân và tích phân, xây dựng nên phép tính vi phân và tích phân “tĩnh tại” không mâu thuẫn, có cơ sở lôgic chặt chẽ, trong đó, các khái niệm “liên tục”, “dần tới”, “giới hạn”,... đã được mô tả một cách chính xác bằng toán học,

được định nghĩa như là đối tượng (object) chứ không phải như là quá trình (process) để từ đó, có đủ cơ sở giải quyết các nghịch lý của Dênon, và lý giải được những vướng mắc khác có liên quan đến các khái niệm mà phép tính vi phân và tích phân dựa vào trực giác (chẳng hạn, tính “chuyển động” hay “quá trình”) không sao lý giải được; (chẳng hạn, dãy $(\frac{1}{n})$ có giới hạn

là 0 khi n dần tới ∞ , nhưng giới hạn 0 này liệu có thể đạt được hay không khi $\frac{1}{n} > 0$

với mọi n).

Tóm lại, dựa vào thuộc tính vận động của vật chất, chúng ta có thể phân ngành toán học phép tính vi phân và tích phân này thành hai giai đoạn:

- Giai đoạn trước Weierstrass: phép tính vi phân và tích phân có tính trực giác, dựa chủ yếu vào quan điểm chuyển động.

- Giai đoạn từ Weierstrass trở về sau: phép tính vi phân và tích phân được hình thức hoá, có cơ sở chặt chẽ. Tính “chuyển động” bị tước bỏ khỏi các khái niệm giới hạn và khái niệm liên tục – hai khái niệm cơ sở của phép tính vi phân và tích phân. Chính vì vậy mà chúng ta đã có được một ngành giải tích đồ sộ và chặt chẽ như ngày nay và nhờ đó, việc nghiên cứu thuộc tính “chuyển động” của vật chất để ứng dụng vào hầu hết các ngành khoa học khác cũng trở nên thuận lợi hơn. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO CHÍNH

1. Eves H. (1982), *An introduction to the history of mathematics*, New York: Saunders College Publishing.
2. Kline M. (1990), *Mathematics thought from ancient to modern times*, Oxford: Oxford University Press.
3. Nguyễn Phú Lộc (2004), Nguồn gốc phát sinh phép tính vi phân và tích phân, *Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ*, số 327(9/2004), Hà Nội.
4. Luchins A.S. & Luchins E.H. (1965), *Logical foundations of mathematics for behavioral scientists*, New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.
5. Priestley W. M. (1979), *Calculus: An Historical Approach*, New York: Springer-Verlag.
6. Nguyễn Hữu Vui (chủ biên) (2002): *Lịch sử Triết học*, Nxb Chính trị Quốc gia, Hà Nội.

A.L.Cauchy (1789 - 1857) là người có công lớn trong việc làm chính xác hoá khái niệm giới hạn và liên tục, khi ông đưa ra định nghĩa về khái niệm giới hạn mà cho đến nay, chúng ta vẫn còn sử dụng: x là biến số thực có giới hạn là c nếu với bất kỳ số dương cho trước nào, giá trị tuyệt đối giữa hiệu của x và c có thể làm nhỏ hơn số dương cho trước đó. Nhà toán học Đức - K.Weierstrass (1815 - 1897) đã làm rõ hơn cụm từ “một biến dần tới giới hạn”, khi coi biến chẳng qua là một chữ cái thay thế cho một phần tử thuộc một tập hợp giá trị mà chữ cái đó có thể nhận được. Biến liên tục là một biến mà nếu x_0 thuộc tập giá trị của biến và δ là một số dương bất kỳ, có những giá trị khác của biến thuộc khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Từ đó, ông định nghĩa khái niệm hàm số liên tục như sau: Hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ khi với mọi số dương ε cho trước, số dương δ cũng đều tồn tại để sao cho với mọi x thoả $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Một cách tương tự, ông đã định nghĩa khái niệm giới hạn của hàm số như sau: Hàm số $f(x)$ có giới hạn là L tại $x = x_0$ nếu với mọi số dương ε cho trước, số dương δ cũng đều tồn tại để sao cho với mọi x thoả $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Như vậy, cả Bolzano, Cauchy lẫn Weierstrass đều loại bỏ tính chất “chuyển động” khi định nghĩa các khái niệm cơ sở của phép tính vi và tích phân. Các thuật ngữ “hàm số $f(x)$ dần tới L khi x dần tới a ”, hay “hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới a ” mà các ông đưa ra chứa đầy mâu thuẫn (bản thân x dần tới a phải được định nghĩa trước đã) hiện vẫn được sử dụng, nhưng chúng hoàn toàn không tương hợp với định nghĩa khái niệm giới hạn của hàm số theo ngôn ngữ “ ε, δ ”. Mặc dù vậy, các ông vẫn được thừa nhận là những người có công lớn trong việc hình thức hoá phép tính vi phân và tích phân, xây dựng nên phép tính vi phân và tích phân “tĩnh tại” không mâu thuẫn, có cơ sở logic chặt chẽ, trong đó, các khái niệm “liên tục”, “dần tới”, “giới hạn”,... đã được mô tả một cách chính xác bằng toán học,

được định nghĩa như là đối tượng (object) chứ không phải như là quá trình (process) để từ đó, có đủ cơ sở giải quyết các nghịch lý của Dênon, và lý giải được những vướng mắc khác có liên quan đến các khái niệm mà phép tính vi phân và tích phân dựa vào trực giác (chẳng hạn, tính “chuyển động” hay “quá trình”) không sao lý giải được; (chẳng hạn, dãy $(\frac{1}{n})$ có giới hạn

là 0 khi n dần tới ∞ , nhưng giới hạn 0 này liệu có thể đạt được hay không khi $\frac{1}{n} > 0$

với mọi n).

Tóm lại, dựa vào thuộc tính vận động của vật chất, chúng ta có thể phân ngành toán học phép tính vi phân và tích phân này thành hai giai đoạn:

- Giai đoạn trước Weierstrass: phép tính vi phân và tích phân có tính trực giác, dựa chủ yếu vào quan điểm chuyển động.

- Giai đoạn từ Weierstrass trở về sau: phép tính vi phân và tích phân được hình thức hoá, có cơ sở chặt chẽ. Tính “chuyển động” bị tước bỏ khỏi các khái niệm giới hạn và khái niệm liên tục – hai khái niệm cơ sở của phép tính vi phân và tích phân. Chính vì vậy mà chúng ta đã có được một ngành giải tích đồ sộ và chặt chẽ như ngày nay và nhờ đó, việc nghiên cứu thuộc tính “chuyển động” của vật chất để ứng dụng vào hầu hết các ngành khoa học khác cũng trở nên thuận lợi hơn. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO CHÍNH

1. Eves H. (1982), *An introduction to the history of mathematics*, New York: Saunders College Publishing.
2. Kline M. (1990), *Mathematics thought from ancient to modern times*, Oxford: Oxford University Press.
3. Nguyễn Phú Lộc (2004), Nguồn gốc phát sinh phép tính vi phân và tích phân, *Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ*, số 327(9/2004), Hà Nội.
4. Luchins A.S. & Luchins E.H. (1965), *Logical foundations of mathematics for behavioral scientists*, New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.
5. Priestley W. M. (1979), *Calculus: An Historical Approach*, New York: Springer-Verlag.
6. Nguyễn Hữu Vui (chủ biên) (2002): *Lịch sử Triết học*, Nxb Chính trị Quốc gia, Hà Nội.