

CÁC TÍNH CHẤT PHI CỎ ĐIỆN BẬC CAO CỦA CÁC TRẠNG THÁI KẾT HỢP PHI TUYẾN ĐIỆN TÍCH

Đặng Hữu Định*

Tóm tắt

Trong bài báo này, nén bậc cao và antibunching bậc cao trong các trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích được nghiên cứu. Thu được các biểu thức giải tích điều kiện xuất hiện của nén bậc cao và antibunching bậc cao. Biểu diễn các trạng thái ở đó xuất hiện tất cả nén bậc cao, antibunching bậc cao. Tuy nhiên, tính antibunching bậc cao có thể thể tồn tại hoặc không tùy thuộc vào các tham số của các trạng thái này.

Từ khóa: *nén bậc cao, antibunching bậc cao*

1. Giới thiệu

Cùng với các tiến bộ vượt bậc cả lý thuyết và thực nghiệm hiện nay trong tất cả các lĩnh vực khoa học, khoa học thông tin lượng tử đã dẫn đến nhận thức chung tính năng phi cổ điển trong thế giới lượng tử có thể được sử dụng trong các mạng truyền thông để đạt được các nhiệm vụ khác nhau mà tính năng cổ điển không thể thực hiện được, chẳng hạn như mật mã lượng tử [14, 15, 22] viễn tải lượng tử [16, 17], tính toán lượng tử [18, 24, 21, 23], v.v... Ví dụ, ánh sáng nén có thể được áp dụng cho dịch chuyển các bit lượng tử bị rối [2] và ánh sáng phản kết chùm (antibunching) rất hữu ích để thực hiện truyền thông lượng tử và tính toán lượng tử [3]. Mặc dù áp dụng thực tế cho nhu cầu hàng ngày vẫn còn là viễn cảnh, nhưng hiệu ứng phi cổ điển hứa hẹn tiềm năng ứng dụng đáng kể trong tương lai. Vì vậy, việc tìm kiếm và nghiên cứu các trạng thái mới phi cổ điển là vấn đề cấp thiết. Ngoài các trạng thái phi cổ điển được biết đến cho đến nay, một trạng thái phi cổ điển mới được giới thiệu trong [6, 7, 9, 10]. Đây là những trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích từ việc tổng quát hóa các trạng thái kết hợp phi tuyến [19, 20]. Xét hàm f và các toán tử biến dạng

$$A_i = a_i f(n_i), \quad A_i^+ = f^+(n_i) a_i^+, \quad (1)$$

Ở đây a_i, a_i^+ và $n_i = a_i^+ a_i, i = 1, 2$ tương ứng là các toán tử hủy, sinh và là các toán tử số boson của mode thứ i , và $f(n)$ là một hàm phi tuyến đặc trưng các hệ vật lý. Cặp toán tử hủy boson biến dạng $A_1 A_2$ của hàm f và toán tử điện tích giao hoán với nhau, tức là $[Q, A_1 A_2] = 0$, ở đây toán tử điện tích được định nghĩa $Q = a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2$. Như vậy, hai toán tử này phải thỏa mãn các phương trình giá trị riêng dưới đây:

$$\begin{aligned} Q|\xi, q, f\rangle &= q|\xi, q, f\rangle \\ A_1 A_2|\xi, q, f\rangle &= \xi|\xi, q, f\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

* ThS, GV Trường CĐCN Tuy Hòa, Phú Yên

ở đây $\xi \in C$ và q là một số nguyên đã được gọi là số điện tích. Các trạng thái riêng có biểu thức tổng quát sau:

$$|\xi, q, f\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} |n, m\rangle. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) và tính toán các hệ số khai triển một cách trực tiếp thu được hai trạng thái riêng biệt như sau:

$$|\xi, q, f\rangle^{(+)} = N^{(+)} (|\xi|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{[f(n)]! [f(n+q)]! \sqrt{n!} \sqrt{[n+q]!}} |n+q, n\rangle, \quad q \geq 0, \quad (4)$$

$$|\xi, q, f\rangle^{(-)} = N^{(-)} (|\xi|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{[f(n)]! [f(n-q)]! \sqrt{n!} \sqrt{[n-q]!}} |n, n-q\rangle, \quad q \leq 0. \quad (5)$$

Các trạng thái này có thể được đặt trong một biểu thức sau:

$$|\xi, q, f\rangle = N (|\xi|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{[f(n)]! [f(n+|q|)]! \sqrt{n!} \sqrt{[n+|q|]!}} \left| n + \frac{q+|q|}{2}, n - \frac{q-|q|}{2} \right\rangle, \quad (6)$$

với hằng số chuẩn hóa được cho bởi

$$N (|\xi|^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n! [n+|q|]! \{ [f(n)]! [f(n+|q|)]! \}^2}. \quad (7)$$

Trong các biểu thức (4) - (7) chúng tôi dùng các định nghĩa sau:

$$[f(n)]! \doteq f(n)f(n-1)\dots f(1), \quad [f(0)]! \doteq 1, \quad (8)$$

và

$$\begin{aligned} [n+|q|]! &\doteq (n+|q|)(n-1+|q|)\dots(1+|q|), & [|q|]! &\doteq 1, \\ [f(n+|q|)]! &\doteq f(n+|q|)f(n-1+|q|)\dots f(1+|q|), & [f(|q|)]! &\doteq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Để kiểm nghiệm các định nghĩa đã nêu, chúng tôi thay thế $f(n) = 1$ trong các biểu thức và kiểm tra thu được các trạng thái kết hợp điện tích chuẩn.

2. Antibunching bậc cao

2.1. Antibunching đơn mode

Antibunching bậc cao đơn mode được định nghĩa bởi bất đẳng thức [9, 10]

$$\langle n_x^{(l+1)} \rangle \langle n_x^{(m-1)} \rangle < \langle n_x^{(l)} \rangle \langle n_x^{(m)} \rangle, \quad (10)$$

ở đây $\langle \dots \rangle$ là ký hiệu trung bình lượng tử, $x = \{a, b\}$, l, m là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $l \geq m \geq 1$ và $n_x^{(l)} = \prod_{j=0}^{l-1} (n_x - j)$. Antibunching bậc một tương ứng với $m=l=1$ khi đó phương trình (10) trở thành

$$\langle n_x^2 \rangle < \langle n_x \rangle^2, \quad (11)$$

và ta có bất đẳng thức

$$\langle (\Delta n_x)^2 \rangle \equiv \langle n_x^2 \rangle - \langle n_x \rangle^2 < \langle n_x \rangle. \quad (12)$$

Ở đây chúng ta khảo sát trường hợp $l \geq m$ của antibunching bậc l tồn tại với mode x nếu

$$\langle n_x^{(l+1)} \rangle < \langle n_x^l \rangle \langle n_x \rangle, \quad (13)$$

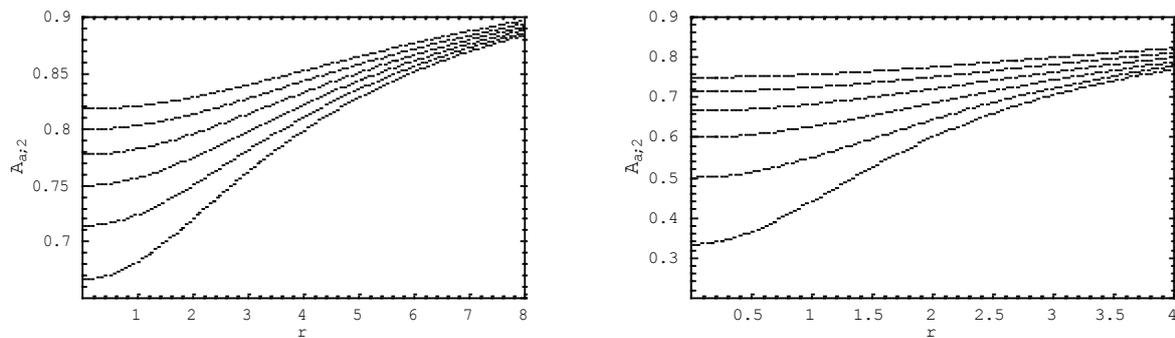
hoặc, tương tự

$$A_{x;l} \equiv \frac{\langle n_x^{(l+1)} \rangle}{\langle n_x^l \rangle \langle n_x \rangle} < 1. \quad (14)$$

Hàm $A_{x;l}$ đo mức antibunching đơn mode bậc l ; $A_{x;l}$ càng nhỏ hơn 1 thì tính antibunching càng thể hiện rõ nét.

Trong trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích $|\xi, q, f\rangle$ biểu diễn bởi phương trình (6) chúng ta thu được với l bất kỳ

$$\langle n_a^{(l)} \rangle = \langle a^{+l} a^l \rangle = N(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+|q|]! \{ [f(n)]! [f(n+|q|)]! \}^2} \frac{\left[n + \frac{q+|q|}{2} \right]!}{\left[n + \frac{q+|q|}{2} - l \right]!}, \quad (15)$$



Hình 1. Antibunching đơn mode bậc hai của mode a , $A_{a;2}$ như một hàm của r . Hình bên trái với $q = 6, 7, 8, 9, 10, 11$; hình bên phải với $q = 0, -1, -2, -3, -4, -5$.

nếu $q \geq l$ thì

$$\langle n_a^{(l)} \rangle = N^{(+)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+q-l]! \{ [f(n)]! [f(n+q)]! \}^2}, \quad (16)$$

với

$$N^{(+)}(|\xi|^2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+q]! \{ [f(n)]! [f(n+q)]! \}^2} \right),$$

nếu $0 \leq q \leq l$ thì

$$\langle n_a^{(l)} \rangle = r^{2(l-q)} N^{(+)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n-q+l]! \{ [f(n+l)]! [f(n-q+l)]! \}^2}. \quad (17)$$

Một cách tổng quát với $q \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} \langle n_a^{(l)} \rangle &= r^{|q-l|-(q-l)} N^{(+)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\left[n+q-l+\frac{|q-l|-(q-l)}{2} \right]! \left[n+\frac{|q-l|-(q-l)}{2} \right]!} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left\{ \left[f\left(n+\frac{|q-l|-(q-l)}{2}\right) \right]! \left[f\left(n+q+\frac{|q-l|-(q-l)}{2}\right) \right]! \right\}^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Nếu $q \leq 0$ thì

$$\langle n_a^{(l)} \rangle = r^{2l} N^{(-)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n-q+l]! \{ [f(n+l)]! [f(n-q+l)]! \}^2}, \quad (19)$$

với

$$N^{(-)}(|\xi|^2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n-q]! \{ [f(n)]! [f(n-q)]! \}^2} \right).$$

Tương tự, với mode b,

$$\langle n_b^{(l)} \rangle = \langle b^{+l} b^l \rangle = N(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+|q|]! \{ [f(n)]! [f(n+|q|)]! \}^2} \frac{\left[n-\frac{q-|q|}{2} \right]!}{\left[n-\frac{q-|q|}{2}-l \right]!}, \quad (20)$$

nếu $q \geq 0$ thì

$$\langle n_b^{(l)} \rangle = r^{2l} N^{(+)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+q+l]! \{ [f(n+l)]! [f(n+q+l)]! \}^2}, \quad (21)$$

nếu $q \leq 0$ & $l+q \leq 0$ thì

$$\langle n_b^{(l)} \rangle = N^{(-)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n-q-l]! \{ [f(n)]! [f(n-q)]! \}^2}, \quad (22)$$

nếu $q \leq 0$ & $l+q \geq 0$ thì

$$\langle n_b^{(l)} \rangle = r^{2(q+l)} N^{(-)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+q+l]! \{ [f(n+l)]! [f(n+q+l)]! \}^2}. \quad (23)$$

Tổng quát cho trường hợp $q \leq 0$ đối với mode b ta có:

$$\begin{aligned} \langle n_b^{(l)} \rangle &= r^{|q+l|+(q+l)} N^{(-)}(|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\left[n+\frac{|q+l|+(q+l)}{2} \right]! \left[n-q-l+\frac{|q+l|+(q+l)}{2} \right]!} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left\{ \left[f\left(n+\frac{|q+l|+(q+l)}{2}\right) \right]! \left[f\left(n-q+\frac{|q+l|+(q+l)}{2}\right) \right]! \right\}^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Sử dụng các phương trình (14), (18) và (19) chúng tôi nghiên cứu tính antibunching phụ thuộc vào các tham số trong các phương trình. Đối với mode a chúng tôi tìm tính antibunching bậc l theo tham số r . Trong cả hai trường hợp $q \geq 0$ và $q \leq 0$ đều thu được kết quả giá trị $A_{a,2}$ tăng; nghĩa là tính antibunching giảm khi trị tuyệt đối của điện tích tăng. Hình 1 hiển thị mức tăng tính antibunching theo các đồ thị từ trên xuống dưới.

2.2. Antibunching hai mode

Cho hai mode a và b tùy ý ($a \neq b$), antibunching hai mode bậc cao được định nghĩa bởi bất đẳng thức [9]

$$\langle n_a^{(l+1)} n_b^{(m-1)} + n_b^{(l+1)} n_a^{(m-1)} \rangle < \langle n_a^{(l)} n_b^{(m)} + n_b^{(l)} n_a^{(m)} \rangle, \tag{25}$$

ở đây $l \geq m \geq 1$. Chúng tôi khảo sát trường hợp $l \geq m = 1$, khi đó phương trình (25) trở thành

$$\langle n_a^{(l+1)} + n_b^{(l+1)} \rangle < \langle n_a^{(l)} n_b + n_b^{(l)} n_a \rangle, \tag{26}$$

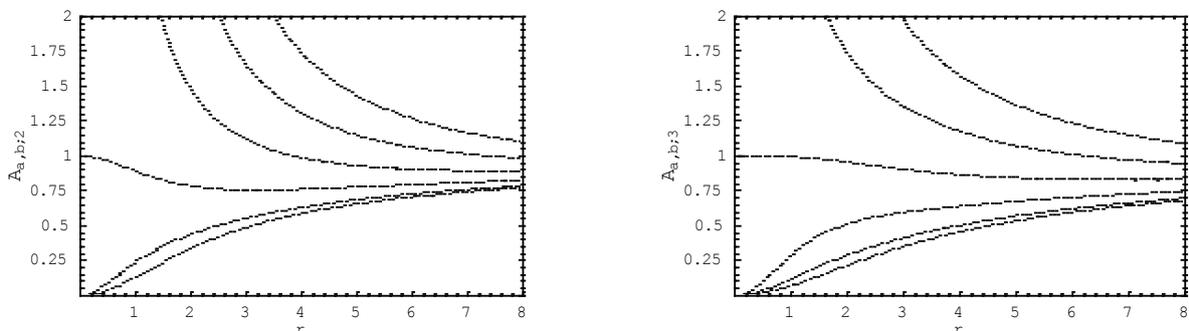
Tương tự, hai mode a và b được gọi có tính antibunching bậc l nếu $A_{a,b;l} < 1$, ở đây

$$A_{a,b;l} = \frac{\langle n_a^{(l+1)} \rangle + \langle n_b^{(l+1)} \rangle}{\langle n_a^{(l)} n_b \rangle + \langle n_b^{(l)} n_a \rangle}, \tag{27}$$

là một số đo của antibunching hai mode bậc l .

Chúng tôi nghiên cứu hiệu ứng antibunching hai mode bậc l với trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích. Trong các phép toán được tính, chúng tôi chọn l và m là các số nguyên dương. Các giá trị trung bình lượng tử được phân tích bởi các biểu thức sau

$$\langle n_a^{(l)} n_b^{(m)} \rangle = \begin{cases} r^{2m} N^{(+)} (|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+q-l+m]! \{ [f(n+m)]! [f(n+q+m)]! \}^2} & \text{nếu } q \geq 0 \text{ \& } q+m \geq l; \\ r^{2(l-q)} N^{(+)} (|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n-q+l-m]! \{ [f(n+l)]! [f(n-q+l)]! \}^2} & \text{nếu } q \geq 0 \text{ \& } q+m \leq l. \end{cases} \tag{28}$$



Hình 2. Antibunching hai mode bậc l $A_{a,b;l}$ như một hàm của r với $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Hình bên trái với $l=2$ và hình bên phải với $l=3$.

$$\langle n_a^{(l)} n_b^{(m)} \rangle = \begin{cases} r^{2l} N^{(-)} (|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n-q+l-m]! \{ [f(n+l)]! [f(n-q+l)]! \}^2} \\ \text{nếu } q \leq 0; \& q+m \leq l; \\ r^{2(q+m)} N^{(-)} (|\xi|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n! [n+q-l+m]! \{ [f(n+m)]! [f(n+q+m)]! \}^2} \\ \text{nếu } q \leq 0 \& q+m \geq l. \end{cases} \quad (29)$$

Từ các phương trình (18), (19), (21), (24), (27), (28) và (29) chúng tôi khảo sát sự phụ thuộc antibunching hai mode bậc cao vào các tham số. Chúng tôi khảo sát trong trường hợp với q, r, l biến thiên. Ở trường hợp $q > l$ chúng tôi nhận thấy không có tính antibunching. Khi $q \leq l$ antibunching hai mode xuất hiện. Trong hình 2, các giá trị của $A_{a,b;2}$ và $A_{a,b;3}$ bằng không tại $r = 0$ khi $q < l$. Khi bậc l càng cao thì tính antibunching càng thể hiện rõ nét.

3. Nén bậc cao

3.1. Nén đơn mode

Theo Hillery [11] chúng tôi khảo sát toán tử nén biên độ bậc K

$$D_x(K, \varphi) = \frac{1}{2} ((x^+)^K e^{i\varphi} + x^K e^{-i\varphi}), \quad (30)$$

ở đây $x = \{a, b\}$, $K=1,2,3,\dots$ và φ là pha xác định phương của $\langle x^K \rangle$ trong không gian phức. Các toán tử trong (22) có pha sai khác nhau một góc $\pi/2$ tuân theo hệ thức giao hoán

$$[D_x(K, \varphi), D_x(K, \varphi + \pi/2)] = \frac{i}{2} L_x(K), \quad (31)$$

với $L_x(K)$ được cho bởi

$$L_x(K) = \sum_{l=1}^K \frac{K! K^{(l)}}{(K-l)! l!} (x^+)^{K-l} x^{K-l}, \quad (32)$$

ở đây $K^{(l)} \equiv \prod_{j=0}^{l-1} (K-j)$. Một trạng thái được gọi là nén bậc K trong mode x nếu tồn tại một góc φ sao cho

$$P_x(K, \varphi) \equiv \langle (\Delta D_x(K, \varphi))^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle L_x(K) \rangle < 0. \quad (33)$$

Trong trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích với K và x bất kỳ ta có

$$P_x(K, \varphi) = \frac{1}{2} \langle n_x^{(K)} \rangle, \quad (34)$$

$P_x(K, \varphi)$ không phụ thuộc vào góc φ và luôn dương.

3.3. Nén hai mode

Toán tử biên độ trực giao lũy thừa K của trường hai mode trong quá trình nén bậc cao kiểu Hillery có dạng:

$$D_{ab}(K, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2}} ((a^+ + b^+)^K e^{i\varphi} + (a + b)^K e^{-i\varphi}), \quad (35)$$

Trong đó $K=1,2,3,\dots$ và góc φ là góc tạo bởi $D_{ab}(K, \varphi)$ với trục thực trong mặt phẳng phức. Theo (33) hai thành phần biên độ trực giao tuân theo hệ thức giao hoán

$$[D_{ab}(K, \varphi), D_{ab}(K, \varphi + \pi/2)] = \frac{i}{4} L_{ab}(K), \quad (36)$$

với $L_{ab}(K)$ cho bởi

$$L_{ab}(K) = (a+b)^K (a^+ + b^+)^K - (a^+ + b^+)^K (a+b)^K. \quad (37)$$

Một trạng thái được gọi là nén hai mode bậc K nếu tồn tại một góc φ mà ở đó

$$P_{ab}(K, \varphi) \equiv \langle (\Delta D_{ab}(K, \varphi))^2 \rangle - \frac{1}{8} \langle L_{ab}(K) \rangle < 0. \quad (38)$$

Thực hiện các phép tính đơn giản đối với trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích ta có

$$P_{ab}(K, \varphi) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^K \left(\frac{K!}{(K-l)!l!} \right)^2 \langle n_a^{(K)} n_b^{(K-l)} \rangle. \quad (39)$$

Trong phương trình (39) cho thấy không có góc φ và $P_{ab}(K, \varphi)$ luôn dương. Do đó, không có nén hai mode trong trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát hai tính chất phi cổ điển của các trạng thái phi tuyến điện tích, đó là tính antibunching bậc cao và tính nén bậc cao. Các hình vẽ có được từ việc khảo sát các tính phi cổ điển của trạng thái điện tích chuẩn. Tính antibunching bậc cao trong trường hợp đơn mode xuất hiện ở tất cả các bậc nhưng antibunching bậc cao hai mode chỉ tồn tại tùy thuộc vào các giá trị của l, q . Tính antibunching phụ thuộc vào các tham số đã được khảo sát đối với trường hợp đơn mode và hai mode. Nén bậc cao đơn mode và hai mode trong trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích không tồn tại với bất kỳ bậc nào được khảo sát.

Ngoài một số tính chất phi cổ điển của trạng thái kết hợp phi tuyến điện tích đã được nghiên cứu, chúng tôi cũng đề xuất nghiên cứu tiếp các tính chất phi cổ điển của trạng thái kết hợp phi tuyến chẵn/lẻ điện tích θ

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Agarwal G S 1988 *J. Opt. Soc. Am.* B 5 1940.
- [2] Gorbachev V N, Zhiliba A I and Trubiko A I 2001 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 3 S 25.
- [3] Raginsky M and Kumar P 2001 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 3 L1.
- [4] Nguyen B A and Truong M D 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 4 80.
- [5] Gou S C, Steinbach J and Knight P L 1997 *Phys. Rev. A* 56 4815.
- [6] Liu X M 2001 *Phys. Lett. A* 279 123.
- [7] Liu X M, Quesne C, Song F 2005 *J. Math. Phys.* 46 072106.
- [8] Zheng S B 2001 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 3 298.
- [9] Lee C T 1990 *Phys. Rev. A* 41 1569.
- [10] Lee C T 1990 *Phys. Rev. A* 41 1721..
- [11] Hillery M 1987 *Opt. Commun.* 62 3135.
- [12] Hillery M 1989 *Phys. Rev. A* 40 3147.
- [13] Nguyen B A and Vo T 1999 *Phys. Lett. A* 261 334.
- [14] Wiesner S 1983 *SIGACT News* 15 78.
- [15] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* 67 661.
- [16] Bennett C H et al 1993 *Phys. Rev. Lett.* 70 1895.
- [17] Furusawa A et al 1998 *Science* 282 706.
- [18] Gottesman D and Chuang I 1999 *Nature* 402 390.
- [19] Man'ko V I, Marmo G, Sudarshan, Zaccaria F 1997 *Phys. Scrp.* 55 528.
- [20] Roknizadeh R and Tavassoly M K 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* 37 8111.
- [21] Deutsch D 1985 *Proc. R. Soc. A* 400 97.
- [22] Bennett C H and Brassard G 1985 *IBM Tech. Discl. Bull.* 28 3153.
- [23] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* 21 467.
- [24] Benioff P 1980 *J. Stat. Phys.* 22 56.

Abstract**Higher-order non-classical properties of nonlinear charge coherent states**

In this paper, the higher-order squeezing and the higher-order anti-bunching in two-mode nonlinear charge coherent states are studied. The analytical expressions of the conditions for existing the higher-order squeezing and the higher-order anti-bunching are obtained. It is showed that these states exhibit all the higher-order squeezing and the higher-order anti-bunching behaviors. However, the higher-order anti-bunching may or may not exist depending on the parameters of these states.

Key words: higher-order squeezing, the higher-order anti-bunching