VỀ VÀNH NỬA HOÀN CHỈNH CÓ ĐẾ CỐT YẾU THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN NỘI XẠ BÉ

Nguyễn Thị Thu Hà*

Tóm tắt

Một vành R được gọi là giả-Frobenius phải (gọi tắt là PF) nếu R là tự nội xạ phải, nửa hoàn chỉnh với đế phải cốt yếu. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số tính chất của vành nửa hoàn chỉnh với đế phải cốt yếu thỏa một số điều kiện về nội xạ bé.

Từ khóa: *nửa hoàn chỉnh, nội xạ, nội xạ bé, (m, n)-nội xạ bé*

1. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, chúng ta giả sử rằng mọi vành là kết hợp có đơn vị $1\neq 0$, và mọi môđun là đơn nguyên. Với mỗi môđun M trên vành R ta viết M_R (${}_RM$, tương ứng) để chỉ rằng M là một R-môđun phải (trái, tương ứng). Chúng ta ký hiệu phạm trù các R-môđun phải (R-môđun trái, tương ứng) bởi *Mod-R* (*R-Mod*, tương ứng). Trước hết nhắc lại một vài ký hiệu được dùng trong bài báo này. Cho một môđun M chúng ta ký hiệu $E(M)$, $J(M)$, $Z(M)$ và $Soc(M)$ là bao nội xạ, căn Jacobson, môđun con suy biến và đế của M tương ứng. Trong trường hợp $M = R$ thì $J(R_R) = J({}_RR)$, được ký hiệu chung là J và gọi là căn Jacobson của vành R. Cho một tập A của vành R, $r(A)$ và $l(A)$ là linh hóa tử phải và trái của A trong R tương ứng. Môđun con A của A^* (ký hiệu bởi $A \leq A^*$) sao cho A là cốt yếu trong A^* được ký hiệu bởi $A \leq^e A^*$.

Lũy đẳng được gọi là nâng được môđulô J nếu với mọi $e + J$ là một lũy đẳng của R/J thì tồn tại một lũy đẳng h R sao cho $e + J = h + J$. Vành R được gọi là nửa hoàn chỉnh nếu R/J là nửa đơn và mọi lũy đẳng nâng được môđulô J. Vành R được gọi là hoàn chỉnh phải nếu R/J là nửa đơn và J là T-lũy linh phải. Vành R được gọi là nửa chính quy nếu R/J là vành chính quy von Neumann và mọi lũy đẳng nâng được môđulô J. Dĩ nhiên ta có ngay nửa hoàn chỉnh nửa chính quy. Môđun M_R được gọi là thỏa điều kiện dãy tăng (ACC) (điều kiện dãy giảm (DCC), tương ứng) đối với tập hợp nào đó Ω các môđun con của M, nếu $M_1 \leq M_2 \leq \ldots$ ($M_1 \geq M_2 \geq \ldots$, tương ứng) phải dừng (nghĩa là tồn tại k sao cho $M_k = M_{k+i}$, $i = 1, 2, \ldots$), trong đó $M_1, M_2, \ldots$ Ω. Chúng ta biết rằng M có thể thỏa nhiều điều kiện dãy tăng (dãy giảm, tương ứng) đối với tập Ω các linh hóa tử, các môđun con cốt yếu, … nhưng khi Ω là tập tất cả các môđun con của M thì M lần lượt được gọi là Nơte (Artin, tương ứng).

Trong phạm trù *R-Mod (Mod-R)*, nội xạ và xạ ảnh là hai khái niệm quan trọng được dùng để đặc trưng cho nhiều lớp vành khác nhau. Vào những năm 50 của thế kỷ XX, hai ông Eckmann và Shopf là những người đầu tiên đưa ra những khái niệm này. Tiếp theo, vào năm 1960, Johnson và Wong đưa ra khái niệm tựa-nội xạ và tựa-xạ ảnh. Đây là sự mở rộng của khái niệm nội xạ và xạ ảnh. Năm 1975, Azumaya đưa ra khái niệm A-nội xạ và A-xạ ảnh. Khái niệm này giúp chúng ta có một cách nhìn mới về các lớp môđun nội xạ và môđun xạ ảnh, đồng thời mở ra phương pháp mới tiếp cận các lớp môđun này. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ nêu lên những kết quả cổ điển và những kết quả mới đây về vành R nửa hoàn chỉnh

* ThS, Trường Đại học Công nghiệp Tp HCM

với đế phải cốt yếu thỏa một số điều kiện của tự nội xạ bé và mở rộng của nội xạ bé. Trọng tâm của bài viết này xoay quanh vành giả nội xạ (pseudo-Frobenius), viết tắt là PF, và mở rộng của nó khi giữ nguyên tính chất nửa hoàn chỉnh với đế cốt yếu.

Sau đây là kết quả đầu tiên thúc đẩy chúng tôi viết bài báo này:

Định lý 1.1. ([NY, Theorem 1.56: Azumaya – Kato – Osofsky – Utumi]) *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) R là PF phải, nghĩa là vành mà mọi R-môđun phải trung thành là vật sinh của phạm trù Mod-R,

(2) R là tự nội xạ phải, nửa hoàn chỉnh với đế phải cốt yếu,

(3) R là tự nội xạ phải và hữu hạn đối sinh,

(4) R là vật đối sinh trong phạm trù Mod-R, và ${}_RR$ đối sinh mọi môđun đơn trong R-Mod.

Qua định nghĩa này chúng ta chú ý:

1. Khái niệm PF phải và PF trái là không trùng nhau, điều đó được các tác giả Dischinger và Muller khẳng định trong bài báo của mình ([DM]).

2. Khi ta thay điều kiện tự nội xạ phải bởi các điều kiện suy rộng của tính nội xạ thì có thể có ba trường hợp xảy ra:

- Vành thỏa điều kiện mới thay vẫn còn là PF,
- Vành thỏa điều kiện mới thay có thể không còn là PF nhưng khi thêm một giả thiết khác thì vành sẽ trở lại là vành PF,
- Vành thỏa điều kiện mới thay là một loại vành khác.

Chúng tôi sẽ đi tổng hợp lại một số kết quả đã biết và cho thêm một số kết quả bổ sung.

Trước hết, chúng tôi nhắc lại, lớp vành tựa Frobenius (quasi-Frobenius), viết tắt là QF, là lớp vành mở rộng của vành nửa đơn, có vai trò rất quan trọng trong lý thuyết vành kết hợp không giao hoán và đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, như Faith, Osofsky, Wisbauer, Dung, Huynh, Vanaja, Smith, Thuyet, Quynh, Thoang, … và chúng tôi chỉ đề cập đến một vài đặc trưng quan trọng sau:

Định lý 1.2. ([NY, Theorem 1.50]) *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) R là QF, nghĩa là R là tự nội xạ phải và trái, Nơte phải và trái,

(2)R là tự nội xạ phải (hay trái) và Nơte phải (hay trái),

(3) R là tự nội xạ phải (hay trái) và thỏa điều kiện dãy tăng đối với các linh hóa tử phải,

(4) R là tự nội xạ phải (hay trái) và thỏa điều kiện dãy tăng đối với các iđêan phải cốt yếu.

Để dễ dàng trích dẫn và độc giả dễ theo dõi, tác giả xin nêu ra ở đây 2 quyển sách xuất bản trong thời gian gần đây của Dung, Huynh, Smith và Wisbauer [DHSW] và Nicholson, Yousif [NY], có liên quan nhiều đến bài báo này. Ngoài ra, đối với các khái niệm và kết quả cơ bản không nhắc đến trong bài báo này có thể tìm đọc trong Anderson và Fuller [AF] và Wisbauer [W].

2. KẾT QUẢ

Trước hết, chúng tôi quan tâm đến môđun nội xạ bé. Cho *M* là một *R*-môđun phải trong giản đồ sau:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Nếu tồn tại $h \in Hom_R(R, M)$ sao cho $ih = f$ với mọi iđêan phải bé *I* trong *R*, *i* là phép nhúng và mọi f $Hom_R(I, M)$, thì chúng ta nói rằng *M* là *nội xạ bé*. Nếu R_R là nội xạ bé, thì *R* được gọi là vành nội xạ bé phải. Nhiều tính chất của lớp vành này đã được viết trong [NY].

Vành *R* được gọi là Goldie phải nếu nó

có chiều Goldie phải hữu hạn và thỏa ACC đối với các linh hóa tử phải. Vành *R* được gọi là *QF-2* phải nếu nó là tổng trực tiếp của các iđêan phải đều. Vành *QF-2* trái được định nghĩa tương tự.

Bên cạnh đó, chúng ta cũng xem xét đến một số lớp môđun mở rộng của nội xạ như sau: Môđun *M* được gọi là nội xạ tối tiểu (nội xạ chính) nếu tồn tại $h \in Hom_R(R, M)$ sao cho $hi = f$ với mọi iđêan phải tối tiểu (chính tương ứng) của *R*. Tính chất nội xạ tối tiểu của môđun *M* tương đương với $f = m.$ là phép nhân trái bởi phần tử m nào đó của *M*. Chúng ta cũng gọi một vành *R* là nội xạ tối tiểu phải nếu R_R là nội xạ tối tiểu.

Rõ ràng ta có nội xạ ⇒ nội xạ chính ⇒ nội xạ tối tiểu. Chiều ngược lại nói chung không đúng, chẳng hạn, có thể lấy vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên thì nó chính là vành giao hoán, Nơte, nội xạ tối tiểu nhưng không phải là nội xạ chính.

Cho M_R và N_R là các *R*-môđun phải. Theo Harada, *M* được gọi là s-N- nội xạ (simple-N-injective) nếu với mỗi môđun con $X \leq N$ và mọi *R*- đồng cấu $: X \;\; M$ sao cho im() là tối tiểu, tồn tại một *R*- đồng cấu $: N \;\; M$ sao cho $_X = .$ Chúng ta cũng gọi một vành *R* là s-nội xạ phải nếu R_R là s–R–nội xạ. Điều này cũng tương đương với nếu *I* là một iđêan phải của *R* và $: I \;\; R$ là một *R*-đồng cấu với ảnh đơn, thì $= c.$ là phép nhân trái bởi một phần tử $c \;\; R$ nào đó.

Rõ ràng, chúng ta cũng có nội xạ ⇒ s-nội xạ ⇒ nội xạ tối tiểu. Chiều ngược lại nói chung không đúng, chẳng hạn, có thể lấy vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên thì nó chính là vành giao hoán, Nơte, s-nội xạ nhưng không là nội xạ. Đối với vành nửa nguyên sơ, thì hai khái niệm tự nội xạ phải và s-nội xạ phải là như nhau. Riêng đối với hai lớp vành s-nội xạ và nội xạ chính, cũng đã có ví dụ chứng tỏ rằng một vành nội xạ chính nhưng không s-nội xạ.

Ví dụ 2.1.

(1) Cho R = $\mathbb{Z}$ là vành các số nguyên, thì R là nội xạ bé nhưng không phải tự nội xạ.

(2) Cho $R = \left\{\begin{pmatrix} n & x \\ o & n \end{pmatrix} \mid n \in \mathrm{Z}, x \in \mathrm{Z}_2 \right\}$ (xem [YZ], Example 1.6), thì *R* là một vành giao hoán và $J = S_r = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathrm{Z}_2 \right\}$. Vì vậy, *R* là nội xạ bé, nhưng *R* không là nội xạ.

Trước hết chúng ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2.2. *Cho R là một vành nội xạ bé phải với đế phải cốt yếu. Nếu với mọi dãy vô hạn $a_1, a_2, \ldots$ trong R, dãy $r(a_1) \leq r(a_1a_2) \leq \ldots$ đều dừng, thì R là vành PF phải.*

Chứng minh. Theo [TQ1, Lemma 2.2], *R* là vành nửa hoàn chỉnh và từ đó tự nội xạ phải. Theo Định lý 1.1, *R* là vành PF phải.

Liên quan đến lớp nội xạ bé, chúng ta xét đến lớp vành sau:

Cho R-môđun N, ta ký hiệu N^{mn} cho tập tất cả các ma trận $m \;\; n$ hệ số trong *N*, còn $N^n = N^{1\;\;n}$, $N_n = N^{n\;\;1}$.

Định nghĩa 2.3. Một *R*-môđun phải *M* được gọi là *(m, n)*-nội xạ bé, nếu với mọi *R*-đồng cấu từ một môđun con *n*-sinh của J^m (hay J_m) đến *M* (trong đó *J* là căn Jacobson của vành *R*) có thể mở rộng đến đồng cấu từ R^m (hay R_m) đến *M*. Một vành được gọi là *(m, n)*-nội xạ bé phải, nếu R_R là *(m, n)*-nội xạ bé.

Ví dụ 2.4.

(1) Cho *R* = Z là vành các số nguyên, thì R_R là *(m, n)*-nội xạ bé nhưng không phải *(m, n)*-nội xạ.

(2) Cho $R = \left\{\begin{pmatrix} n & x \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid n \in \mathrm{Z}, x \in \mathrm{Z}_2 \right\}$. Thì R là một vành giao hoán và $J = S_r = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathrm{Z}_2 \right\}$. Vì vậy, *R* là *(m, n)*-

nội xạ bé, với mọi m và n, nhưng R không là *(1, 1)*-nội xạ.

(3) Cho $R = F[x_1, x_2, ..., x_n]$, trong đó F là một trường và x_i là các biến giao hoán thỏa quan hệ $x_i^3 = 0$ với mọi i, $x_i x_j = 0$, với mọi $i \neq j$, và $x_i^2 = x_j^2$, với mọi i, j. Lúc đó R là vành giao hoán, FP-nội xạ, địa phương. Vành này là *(1, n)*-nội xạ, nhưng R không là tự nội xạ. Vì vậy, R là *(m, n)*-nội xạ với mọi m, n, nhưng R không là nội xạ bé.

Đặc trưng của vành này thể hiện qua:

Mệnh đề 2.5. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) R là (m, n)-nội xạ bé phải,

(2) Nếu I là một môđun con bé và m-sinh của một R-môđun xạ ảnh n-sinh P, thì $I = l_P r_{P^*}(I)$, *trong đó* P^* *chính là môđun đối ngẫu của P.*

Chứng minh. Xem [Q, Proposition 2.10].

Ta suy ra ngay kết quả sau:

Mệnh đề 2.6. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R là nửa chính quy đã cho:*

(1) R là (m, n)-nội xạ bé phải,

(2) R là (m, n)-nội xạ phải.

Ngoài ra, ta cũng có:

Mệnh đề 2.7. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) R là (m, n)-nội xạ bé phải, với mọi m, n *N,*

(2) $R^{m\ \ n}$ *là (1, 1)-nội xạ bé phải, với mọi* n *N.*

Chứng minh. Xem [Q, Theorem 2.14].

Từ đó, ta có kết quả sau nêu lên đặc trưng của vành nửa hoàn chỉnh với đế cốt yếu thỏa điều kiện (m, n)-nội xạ bé.

Định lý 2.8. *Cho R là vành nửa hoàn chỉnh ,(m, n)-nội xạ bé với đế phải cốt yếu. Lúc đó:*

(1) R là vành giả Frobenius mở rộng phải (GPF); nghĩa là vành nửa hoàn chỉnh, P-nội xạ phải và đế phải cốt yếu,

(2) R là vành SGPE phải, nghĩa là vành nửa hoàn chỉnh, GP-nội xạ phải và đế phải cốt yếu,

(3) R là Kasch phải và trái,

(4) $Soc(R_R) = Soc({}_RR) = S$ *là cốt yếu trong cả* R_R *và* ${}_RR$,

(5) R là hữu hạn đối sinh trái,

(6) $l(S) = J = r(S)$ *và* $l(J) = S = r(J)$,

(7) $J = Z(R_R) = Z({}_RR)$,

(8) Soc(Re) = Se là đơn và cốt yếu trong Re với mọi lũy đẳng địa phương, e R,

(9) Soc(Re) là thuần nhất và cốt yếu trong eR với mọi lũy đẳng địa phương, e R,

(10) Các ánh xạ K r(K) và T ↦ l(T) là các đẳng cấu dàn ngược nhau giữa các iđêan trái đơn K và các iđêan phải cực đại T,

(11) Nếu $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *là tập cơ sở các lũy đẳng địa phương thì tồn tại các phần tử* $k_1, k_2, ..., k_n$ *trong R và một hoán vị của* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *sao cho các điều sau đúng với mọi* $i = 1, 2, ..., n$:

(a) $k_iR \leq e_iR$ *và* $Rk_i \leq Re_i$,

(b) $k_iR\ \ e_iR / e_i J$ *và* $Rk_i\ \ Re_i / Je_i$,

(c) $\{k_1R, ..., k_nR\}$ *và* $\{Rk_1, ..., Rk_n\}$ *là tập hoàn toàn các đại diện phân biệt của các R-môđun phải và trái đơn, tương ứng,*

(d) $Soc(Re_i) = Rk_i = Se_i\ \ Re_i / Je_i$ *là đơn và cốt yếu trong* Re_i *với mỗi i,*

(e) $Soc(e_iR) \neq 0$ *là thuần nhất và cốt yếu trong* e_iR *với mỗi môđun con đơn đẳng cấu với* e_iR / e_iJ.

Chứng minh.

(1) Theo Mệnh đề 2.7, $R^{m\ \ n}$ là *(1, 1)* - nội xạ bé phải, với mọi n N, đặc biệt với $n = 1$, ta có R là *(1, 1)*-nội xạ bé phải vì $R^{1\ \ 1}$ R. Do R là vành nửa hoàn chỉnh nên nó là nửa chính quy. Theo mệnh đề 2.6, ta có ngay R là *(1, 1)*-nội xạ phải. Từ đó, ta suy ra ngay R là P-nội xạ phải. Vậy ta có ngay (1).

(2) Do vành P-nội xạ phải là GP-nội xạ phải nên ta có ngay (2).

(3)-(11): Suy ra ngay từ (1), (2) và [TT, Proposition 2.2].

Bổ đề 2.9. *Các điều kiện sau là tương* *đương đối với vành Artin phải R đã cho:*

(1) R là vành QF,

(2) R thỏa:

(a) R là vành QF-2,

(b) $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$.

(3) R thỏa:

(a) Soc(eR) là các iđêan phải đơn và Soc(Re) là các iđêan trái đơn với mọi lũy đẳng e R,

(b) $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$.

Chứng minh. Xem [TT, Lemma 2.3].

Định lý 2.10. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) R là vành QF,

(2) R là vành nửa hoàn chỉnh, (m, n)-nội xạ bé với đế phải cốt yếu thỏa điều kiện dãy tăng đối với các linh hóa tử phải.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) là dễ dàng.

(2) $\Rightarrow$ (1). Theo Định lý 2.8, *R* là vành GP-nội xạ phải thỏa điều kiện dãy tăng đối với linh hóa tử phải nên *R* là vành Artin trái. Vì R là vành SGPE phải nên theo Định lý 2.8, $Soc(R_R) = Soc(_RR) = S$ và *Soc(Re), Soc(eR)* là đơn với mọi lũy đẳng địa phương *e R*. Theo Bổ đề 2.9, *R* là vành QF❑

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] ANDERSON F.W. and FULLER K.R. (1992), *Rings and Categories of Modules*, Heidelberg – New York (2nd edition).

[2] DISCHINGER F. and MULLER W. (1986), *Left PF is not right PF*, Comm. Alg., 14(7), 1223-1227.

[3] DUNG N. V., HUYNH D. V., SMITH P. F. and WISBAUER R. (1994), *Extending modules*, Longman Scientific and Technical, New York.

[4] NICHOLSON W. K. and YOUSIF M. F. (2003), *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] QUYNH T. C., *On genalizations of small injective modules*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 35(3) (2012), 621 – 626.

[6] SHEN L. and CHEN J. (2005), *Small injective rings*, arXiv: Math., RA/0505445 v.12.

[7] THUYET L. V. and QUYNH T. C. (2009), *On small injective rings and modules*, J. Algebra Appl. 8, No. 3, 379 – 387.

[8] THUYET L. V. and QUYNH T. C. (2009), *On small injective, simple-injective and quasi-Frobenius rings,* Acta Math. Univ. Comen., New Ser. 78, No. 2, 161-172.

[9] THUYET L. V. and THOANG L. D. (2006), *On the generalizations of injectivity*, Acta Math, Univ. Comenianae 2, 199-208.

[10] WISBAUER R. (1991), *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach.

[11] YOUSIF M. F. and ZHOU Y. Q. (2004), *FP-injective, simple-injective and quasi-Frobenius rings*, Comm. Algebra 32, 2273 – 2285.

Abstract

On semiperfect rings with essential socle satisfying some conditions on small injectivity

A ring R is called right pseudo-Frobenius (briefly, PF) if R is a right self-injective, semiperfect ring with right essential socle. In this paper, we will present some properties of the semiperfect rings with essential socle satifying some conditions on small injectivity.

Key words: *semiperfect, injective, small injective, (m, n)-small injective*