HÀM LỒI XẤP XỈ

Phùng Xuân Lễ*
Trường Đại học Phú Yên

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả của hàm lồi xấp xỉ định nghĩa trên không gian Banach X*. Các kết quả này đã được đưa ra bởi Huỳnh Văn Ngãi, Đinh Thế Lục và Michel Théra, trong [4]. Tuy nhiên, hầu hết chứng minh vắn tắt hoặc không chứng minh. Ở đây, chúng tôi trình bày với chứng minh chặt chẽ và chi tiết.*

Từ khóa: *Hàm lồi xấp xỉ, hàm* $\varepsilon-$ *lồi, hàm* $\varepsilon-$ *liên hợp.*

Abstract

Approximate Convex Function

In this paper, we present some results concerning of approximate convex function defined on a Banach space X*. These results were proposed by Huynh Van Ngai, Dinh The Luc, and Michel Théra, in [4]. However, most of them were not proved in full detail. In here, we present them in more detail with proofs.*

Keywords: *Approximate convex function,* $\varepsilon-$ *convex function,* $\varepsilon-$ *conjugate function.*

1. Giới thiệu

Lớp các hàm lồi đóng một vai trò quan trọng trong Toán học và các ngành khoa học ứng dụng. Suốt thập kỷ qua, nhiều kết quả được mở rộng dựa vào tính lồi. Tuy nhiên, tính lồi thường là những giả thiết quá mạnh trong việc ứng dụng, chẳng hạn như trong Toán kinh tế. Nhiều vấn đề trong thực tiễn, ta phải làm việc với những đối tượng nói chung không lồi theo nghĩa chính thống. Vì vậy, việc khảo sát những đối tượng (tập hợp, hàm) không lồi nhưng vẫn giữ được (một số) tính chất đẹp của tính lồi là có ý nghĩa quan trọng. Những đối tượng như thế được gọi là lồi tổng quát.

Gần đây, người ta quan tâm nhiều đến các lớp hàm lồi tổng quát như lớp các hàm *dưới*$-C^1$, *dưới*$-C^2$ [1], [3]; *hàm nửa trơn* [5]; *hàm lồi xấp xỉ* [4]. Trong bài báo này chỉ khảo sát, nghiên cứu lớp *hàm lồi xấp xỉ*.

2. Các khái niệm và định lý

Một số khái niệm liên quan đến trong phần này mà không nhắc đến trong bài báo, có thể tìm thấy trong [1], [2].

2.1. Một số khái niệm về *hàm lồi* và *hàm* $\varepsilon-$ *lồi.*

Phần này trình bày một số khái niệm sẽ được dùng ở phần sau.

Định nghĩa 2.1.1. Hàm f được gọi là hàm lồi nếu thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \text{ với mọi } x,\, y\in X,\ \lambda\in[0,1].$$

Định nghĩa 2.1.2. Giả sử X là không gian Banach. Hàm $f: X\to\mathbb{R}$ được gọi là Lipschitz

* Email: *phungxuanledt@gmail.com*

địa phương tại $\overline{x} \in X$, nếu tồn tại lân cận U của $\overline{x} \in X$, số $K > 0$ sao cho

$$\left| f(x) - f(x') \right| \le K \|x - x'\|, \text{ với mọi } x,\ x' \in U.$$

Định nghĩa 2.1.3. Hàm f được gọi là *nửa liên tục dưới* tại $\overline{x} \in X$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại lân cận U của $\overline{x}$ sao cho

$$f(\overline{x}) - \varepsilon \le f(y), \text{ với mọi } y \in U.$$

Định nghĩa 2.1.4. Hàm f được gọi là hàm $\varepsilon -$ *lồi* nếu thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x - y\|,\ x,\ y \in X,\ \lambda \in (0,1).$$

Ví dụ. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -|x|$ là hàm $2 -$ *lồi.*

Định nghĩa 2.1.5. Cho f là hàm $\varepsilon -$ *lồi,* $y \in X$ cố định. Hàm $\varepsilon -$ *liên hợp* $f_y^*(\varepsilon,\ .): X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ của f tại y được định nghĩa bởi

$$f_y^*(\varepsilon,\ \xi):\ = \sup_{x \in X} \left\{ \langle \xi, x \rangle - f(x) - \varepsilon \|x - y\| \right\}.$$

Định nghĩa 2.1.6. Hàm $\varepsilon -$ *liên hợp thứ hai* $f_y^{**}(\varepsilon,\ .): X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ của f tại y được định nghĩa bởi

$$f_y^{**}(\varepsilon,\ x) := \sup_{\xi \in X^*} \left\{ \langle \xi, x \rangle - f_y^*(\varepsilon, \xi) \right\}.$$

2.2. Hàm lồi xấp xỉ

Phần này, tôi trình bày một số tính chất cơ bản nhất có thể gọi là đẹp của *hàm lồi xấp xỉ* trên không gian Banach.

Cho $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới. Với mỗi $\delta > 0$, ta định nghĩa hàm f_δ như sau

$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B(x_0,\ \delta) \\ \infty, & x \notin B(x_0,\ \delta). \end{cases}$$

Định nghĩa 2.2.1. Hàm f gọi là lồi xấp xỉ tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho f_δ là hàm $\varepsilon -$ lồi, tức là với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x - y\|,\ \ x,\ y \in B(x_0, \delta),\ \lambda \in (0,1).$$

Hàm f lồi xấp xỉ trên một tập khác rỗng $C \subseteq X$ nếu f là hàm lồi xấp xỉ tại mọi $x \in C.$ Khi $C = X$ ta nói f là hàm lồi xấp xỉ.

Nhận xét 2.2.1. Từ định nghĩa ta thấy, một hàm lồi là lồi xấp xỉ điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, lấy hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x^2.$ Khi đó, f là hàm lồi xấp xỉ nhưng không là hàm lồi. Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0$, chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$ Khi đó, với mọi $\lambda \in (0,1),\ x,\ y \in \mathbb{R},\ |x| < \delta,\ |y| < \delta,$ ta có

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=-\left[\lambda x+(1-\lambda)y\right]^2=-\lambda^2x^2-(1-\lambda)^2y^2-2\lambda(1-\lambda)xy,$$
$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=-\lambda^2x^2-(1-\lambda)^2y^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned}&f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)-\lambda f(x)-(1-\lambda)f(y)-\varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|=\\&=-\lambda^2x^2+\lambda x^2-(1-\lambda)^2y^2+(1-\lambda)y^2-2\lambda(1-\lambda)xy-\varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|\\&=\lambda(1-\lambda)x^2+\lambda(1-\lambda)y^2-2\lambda(1-\lambda)xy-\varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|\\&=\lambda(1-\lambda)\left[(x-y)^2-\varepsilon|x-y|\right]\le 0,\ \forall|x|,\ |y|<\delta.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ f là hàm lồi xấp xỉ. Nhưng f không là hàm lồi, vì với mọi $\lambda\in(0,1)$, với mọi $x\neq y,$ ta có $\lambda(1-\lambda)(x-y)^2>0$ nên

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in(0,1),\ \text{với mọi }x\neq y.$$

Dưới đây ta sẽ đưa ra một và điều kiện đủ để một hàm là lồi xấp xỉ.

Định lý 2.2.2. ([4, tr. 8]) *Cho* $f: X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, *mỗi điều kiện dưới đây là điều kiện đủ để* f *là hàm lồi xấp xỉ tại* $x_0\in X$.

i) f có đạo hàm chặt x_0.

ii) $f=f_1+f_2$ hoặc $f=max\{f_1,f_2\}$, trong đó f_1 và f_2 là các hàm lồi xấp xỉ tại x_0.

iii) $f=g\circ A,$ trong đó A là ánh xạ *affine* liên tục từ X vào không gian *Banach* Y, g là hàm từ $Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ và là hàm lồi xấp xỉ tại $Ax_0\in Y$.

Chứng minh. Giả sử điều kiện (i) được thỏa mãn. Do f có đạo hàm chặt tại x_0 nên với mỗi $\varepsilon>0,$ tồn tại $\delta>0$ sao cho

$$\left|f(x)-f(y)-Df(x_0)(x-y)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\|x-y\|,\ \text{với mọi }x,y\in B(x_0,\delta).$$

Với mọi $x,y\in B(x_0,\delta)$ và $\lambda\in(0,1)$ ta có $\|\lambda x+(1-\lambda)y-x_0\|=\|\lambda(x-x_0)+(1-\lambda)(y-x_0)\|\le\|x-x_0\|+(1-\lambda)\|y-x_0\|<\lambda\delta+(1-\lambda)\delta=\delta,$ tức là $\lambda x+(1-\lambda)y\in B(x_0,\delta),$ do đó ta có

$$\left|f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)-f(x)-(1-\lambda)Df(x_0)(y-x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda)\|x-y\|\ \text{và}$$

$$\left|f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)-f(y)-\lambda Df(x_0)(x-y)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\lambda\|x-y\|.$$

Suy ra

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq f(x)+(1-\lambda)Df(x_0)(y-x)+\frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda)\|x-y\| \text{ và}$$

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq f(y)+\lambda Df(x_0)(x-y)+\frac{\varepsilon}{2}\lambda\|x-y\|.$$

Nhân các bất đẳng thức trên lần lượt với $\lambda,\ 1-\lambda$ sau đó cộng lại ta được

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\lambda\varepsilon(1-\lambda)\|x-y\|.$$

Điều này chứng tỏ f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0.

Giả sử điều kiện (ii) được thỏa mãn. Nếu $f=\max\{f_1, f_2\}$ trong đó f_1, f_2 là các hàm lồi xấp xỉ tại x_0. Hiển nhiên f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0.

Nếu $f=f_1+f_2$, trong đó f_1, f_2 là các hàm lồi xấp xỉ tại x_0. Vì f_1, f_2 là các hàm lồi xấp xỉ tại x_0 nên $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1,\delta_2>0$ sao cho $\forall\lambda\in(0,1)$ ta có

$$f_i\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq \lambda f_i(x)+(1-\lambda)f_i(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|,\quad \forall x,y\in B(x_0,\delta_i), i=1,2.$$

Chọn $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, khi đó $\forall x,y\in B(x_0,\delta), \lambda(0,1)$ ta có

$$\begin{aligned}f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)&= f_1\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)+f_2\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\\&\leq \lambda(f_1+f_2)(x)+(1-\lambda)(f_1+f_2)(y)+2\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|.\end{aligned}$$

Vậy f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0.

Giả sử điều kiện (iii) được thỏa mãn. Vì g là hàm lồi xấp xỉ tại $Ax_0\in Y$ nên $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ sao cho

$$g\left(\lambda\omega+(1-\lambda)\eta\right)\leq\lambda g(\omega)+(1-\lambda)g(\eta)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|\omega-\eta\|, \forall\omega,\eta\in B(Ax_0,\delta), \lambda\in(0,1).$$

Chọn $\delta_1=\dfrac{\delta}{\|A\|}$. Khi đó, với mọi $x,\ y\in B(x_0,\delta);\ Ax,\ Ay\in B(Ax_0,\delta)$ và $\forall\lambda\in(0,1)$.

Ta có

$$\begin{aligned}g\left(\lambda Ax+(1-\lambda)Ay\right)&=\lambda g(Ax)+(1-\lambda)g(Ay)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|Ax-Ay\|\\&\leq\lambda(g\circ A)(x)+(1-\lambda)(g\circ A)(y)+\varepsilon\|A\|\lambda(1-\lambda)\|x-y\|.\end{aligned}$$

Vậy $f=g\circ A$ lồi xấp xỉ tại x_0.

Định lý sau đây thiết lập tính Lipschitz của hàm lồi xấp xỉ.

Định lý 2.2.3. ([4, tr. 9]) *Giả sử $f: X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới, chính thường. Nếu f là hàm lồi xấp xỉ tại $x_0\in Int(domf)$ thì f Lipschitz địa phương tại x_0.*

Chứng minh. Vì f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0 nên tồn tại $\varepsilon>0$ và $\delta>0$ sao cho $B(x_0,\delta)\subset domf$ và

(1)

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|,\forall x,y\in B(x_0,\delta),\lambda\in(0,1)$$

Trước hết ta chứng tỏ f bị chặn địa phương tại x_0. Lấy $U_n:=\{x\in B(x_0,\delta)/f(x)\le n,\ n=1,2...\}$. Khi đó, $B(x_0,\delta)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$ và U_n đóng $\forall n$. Thật vậy, hiển nhiên $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n\subset B(x_0,\delta)$, vì $B(x_0,\delta)\subset domf$ nên ta có bao hàm thức ngược lại. Cố định n, lấy dãy $\{u_m\}\subset U_n, u_m\to u_0$. Ta chứng tỏ $u_0\in U_n$. Vì $u_m\in B(x_0,\delta)$ nên $\|u_m-x_0\|<\delta,\forall m$. Do đó, $\|u_0-x_0\|<\delta$, với m đủ lớn. Vì f là hàm nửa liên tục dưới nên với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $U-$ lân cận của u_0 sao cho

$$f(u_0)\le f(y)+\varepsilon,\forall y\in U.$$

Do $u_m\to u_0$ nên với m đủ lớn ta có

$$f(u_0)\le f(u_m)+\varepsilon\le n+\varepsilon.$$

Cho $\varepsilon\to 0$ ta được $f(u_0)\le n,$ với m đủ lớn. Điều này chứng tỏ $u_0\in U_n$. Vậy U_n đóng $\forall n$.

Theo Định lý Baire, $\exists n_0: IntU_{n_0}\neq\varnothing$. Giả sử $z_0\in IntU_{n_0}$. Khi đó, tồn tại $0<\delta_1$ sao cho $B(x_0,\delta_1)\subset U_{n_0}$. Chọn $\alpha>1$ sao cho $y_0:=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}x_0-\dfrac{1}{\alpha-1}z_0\in B(x_0,\delta)$ và chọn $\gamma=\dfrac{\delta_1}{\alpha}<\delta.$ Khi đó, $\forall x\in B(x_0,\gamma), z:=y_0+\alpha(x-y_0)\in IntU_{n_0}$. Thật vậy, $\|z-z_0\|=\|y_0-z_0+\alpha(x-y_0)\|=\|\alpha(y_0-x_0)+\alpha(x-y_0)\|=\alpha\|x-x_0\|<\alpha\gamma=\delta_1,$ tức là $z\in B(z_0,\delta_1)\subset U_{n_0}$. Vì $z,y_0\in B(x_0,\delta)$ nên theo (1) ta có

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\alpha^{-1}z+\left(1-\alpha^{-1}\right)y_0\right)\\&\le\alpha^{-1}f(z)+\left(1-\alpha^{-1}\right)f(y_0)+\varepsilon\alpha^{-1}\left(1-\alpha^{-1}\right)\|y-z\|\\&\le\alpha^{-1}n_0+\left(1-\alpha^{-1}\right)f(y_0)+\varepsilon\alpha^{-1}\left(1-\alpha^{-1}\right)2\delta.\end{aligned}$$

Như vậy, f bị chặn trên $B(x_0,\gamma)$, do đó tồn tại $M>0$ sao cho $|f(x)|\le M$. Với mọi $x\in B(x_0,\gamma),\ 2x_0-x\in B(x_0,\gamma)$ ta có

$$\begin{aligned}f(x_0)&=f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(2x_0-x)\right)\\&\le\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(2x_0-x)+\frac{\varepsilon}{2}\|x-x_0\|\\&\le\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}M+\frac{\varepsilon}{2}\gamma.\end{aligned}\qquad(2)$$

Suy ra $f(x) \geq 2f(x_0) - M - 2\varepsilon\gamma, \forall x \in B(x_0,\gamma)$. Với $x, y \in B\left(x_0, \frac{\gamma}{2}\right)$ thì

$z := x + \left(\frac{\gamma}{2\eta}(x-y) \in B(x_0,\gamma)\right) \in B(x_0,\gamma),\ \eta = \|x-y\|.$ Khi đó,

$$f(x) = f\left(\frac{2\eta}{\gamma+2\eta}z + \frac{\gamma}{\gamma+2\eta}y\right) \leq \frac{2\eta}{\gamma+2\eta}f(z) + \frac{\gamma}{\gamma+2\eta}f(y) + \frac{2\varepsilon\eta\gamma}{(\gamma+2\eta)^2}\|z-y\|.$$

Vì $|f(x)| \leq M, \forall x \in B(x_0,\gamma)$ nên $f(x) - f(y) \leq \frac{2\eta}{\gamma+2\eta}\big(f(z) - f(y)\big) + \varepsilon\gamma\|x-y\|$

$$\leq \frac{2\eta}{\gamma}\big(f(z) - f(y)\big) + \varepsilon\lambda\|x-y\| \leq \left(\frac{4M}{\gamma} + \varepsilon\gamma\right)\|x-y\|. \quad (3)$$

Đổi vai trò x và y ta được

$$f(y) - f(x) \leq \left(\frac{4M}{\gamma} + \varepsilon\gamma\right)\|x-y\|.$$

Do đó

$$|f(y) - f(x)| \leq \left(\frac{4M}{\gamma} + \varepsilon\gamma\right)\|x-y\|.$$

Vậy f là hàm Lipschizt địa phương tại x_0.

Định lý dưới đây là một tính chất đặc trưng của hàm lồi xấp xỉ.

Định lý 2.2.4. ([4, tr. 10]) *Cho X là một không gian Banach, $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là một hàm nửa liên tục dưới, chính thường. Khi đó, f là hàm lồi xấp xỉ tại $x_0 \in X$ nếu và chỉ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho bất kỳ $y \in B(x_0,\delta)$ ta có thể tìm một hàm lồi, nửa liên tục dưới $g_y(.) : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ thỏa*

$$|f(x) - g_y(x)| \leq \varepsilon\|x-y\|,\ \text{với mọi } x \in B(x_0,\ \delta).$$

Chứng minh. Ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0, khi đó với $\varepsilon > 0$ lấy $\delta > 0$ sao cho hàm f_δ là $\varepsilon -$lồi. Cố định $y \in B(x_0,\delta)$ ta định nghĩa

$$g_y(x) := f^{**}_{\delta y}(\varepsilon, x)$$

Trong đó, $f^{**}_{\delta y}(\varepsilon,.)$ là hàm liên hợp thứ hai của f_δ. Do đó, điều kiện cần được chứng minh.

Ta chứng minh điều kiện đủ. Theo giả thiết, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $z \in B(x_0,\delta)$ ta có thể tìm một hàm lồi g_z thỏa

$$|f(x) - g_z(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-z\|, \forall x \in B(x_0,\delta).$$

Lấy $x, y \in B(x_0,\delta),\ \lambda \in (0,1),$ khi đó $\|\lambda x + (1-\lambda)y - x_0\| = \|\lambda(x-x_0) + (1+\lambda)$ $(y-x_0)\| < \lambda\delta + (1-\lambda)\delta = \delta,$ tức là $\lambda x + (1-\lambda)y \in B(x_0,\delta).$ Do đó, ta có

$$\left| f(x) - g_{\lambda x+(1-\lambda)y}(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda)\|x-y\|$$

$$\left| f(y) - g_{\lambda x+(1-\lambda)y}(y) \right| \le \frac{\varepsilon}{2}\lambda\|x-y\|.$$

Suy ra

$$\lambda f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\| \ge \lambda g_{\lambda x+(1-\lambda)y}(x) \quad (4)$$

$$(1-\lambda) f(y) + \frac{\varepsilon}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\| \ge (1-\lambda) g_{\lambda x+(1-\lambda)y}(y). \quad (5)$$

Cộng vế theo vế (4), (5), và do $g_{\lambda x+(1-\lambda)y}(.)$ là hàm lồi, hơn nữa

$$g_{\lambda x+(1-\lambda)y}(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Ta được

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|.$$

3. Kết luận

Bài báo đã thực hiện được các vấn đề sau:

Chứng minh chi tiết các kết quả, định lý 2.2.2, định lý 2.2.3, định lý 2.2.4.

Định lý 2.2.2, đưa ra một vài điều kiện đủ để một hàm là *lồi xấp xỉ.*

Định lý 2.2.3, thiết lập tính Lipschitz của *hàm lồi xấp xỉ.*

Định lý 2.2.4, đây là định lý quan trọng nói về tính chất đặc trưng của *hàm lồi xấp xỉ.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đỗ Văn Lưu, *Giải tích lồi*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, (2000).

[2] Hoàng Tụy, *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB ĐHQG Hà Nội, (2003).

[3] Hoang Tuy, *Convex Analyis and Global Optimization*, (1997).

[4] Ngai H.V, Luc T. D, Thera M, *Approximate convex function*, (2000).

[5] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analyis*, (1972).

[6] W.Rudin, *Functional Analyis*, Second Edition, (1991).

(*Ngày nhận bài: 02/05/2019; ngày phản biện: 21/05/2019; ngày nhận đăng: 03/06/2019)*