MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ÁNH XẠ MỞ ĐA TRỊ VÀ ỨNG DỤNG

Phùng Xuân Lễ*

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả liên quan đến nguyên lý ánh xạ mở và ánh xạ ngược của ánh xạ đa trị. Các kết quả được ứng dụng nghiên cứu tính điều khiển được của hệ điều khiển hữu hạn chiều. Các kết quả này đã được đưa ra bởi Frankowska [2], tuy nhiên hầu hết chứng minh vắn tắt hoặc không chứng minh. Ở đây, chúng tôi trình bày với chứng minh chặt chẽ và chi tiết.

Từ khóa: *Định lý ánh xạ mở, định lý ánh xạ ngược cấp một, tính điều khiển được, tính tối ưu.*

1. Giới thiệu

Một trong những vấn đề trung tâm của giải tích biến phân là nghiên cứu tính ổn định nghiệm của tập nghiệm của phương trình $y = G(x)$ hoặc $y \in G(x)$ trong trường hợp tổng quát $G : X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị, khi y hoặc cả G bị nhiễu. Một công cụ quan trọng để nghiên cứu vấn đề này là định lý ánh xạ mở. Quay lại nguyên lý ánh xạ mở cổ điển nổi tiếng của Banach (1930) trong giải tích hàm nói rằng một toán tử tuyến tính liên tục, toàn ánh từ một không gian Banach X lên một không gian Banach Y thì biến mỗi tập mở trong X thành một tập mở trong Y. Như đã biết, nguyên lý ánh xạ mở Banach cho ánh xạ tuyến tính là một nguyên lý nền tảng trong Giải tích hàm. Nguyên lý này sau đó đã được tổng quát cho những ánh xạ phi tuyến bởi Lyusternik và Graves…. Những năm gần đây, cùng với sự phát triển của Giải tích Đa trị và Giải tích Biến phân, nhằm mục đích ứng dụng vào những bài toán biến phân xuất hiện trong thực tiễn, nhiều dạng định lý ánh xạ mở cho ánh xạ đa trị trên một số lớp không gian khác nhau đã được xem xét bởi nhiều tác giả, và đạt được nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học, chẳng hạn như trong Lý thuyết Tối ưu và Lý thuyết Điều khiển.

2. Các khái niệm và định lý

Các khái niệm liên quan đến phần này mà không nhắc đến trong bài báo, chúng ta có thể xem trong [1], [2].

Định nghĩa 2.1. Cho X, Y là hai tập hợp bất kỳ. Ánh xạ $G : X \to 2^Y$ cho tương ứng mỗi $x \in X$, $G(x)$ là một tập hợp con của Y được gọi là ánh xạ đa trị từ X vào Y.

Định nghĩa 2.2. Đồ thị của G ($Graph(G)$) được xác định bởi

$$Graph(G) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in G(x)\}.$$

Miền hữu hiệu của G ($dom(G)$) được xác định bởi

$$dom(G) := \{x \in X : G(x) \neq \emptyset\}.$$

---

* ThS, Trường Đại học Phú Yên

Miền ảnh của G $(range(G))$ được xác định bởi

$$range(G) := \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ sao cho } y \in G(x) \}.$$

Định nghĩa 2.3. Ánh xạ ngược $G^{-1} : Y \to 2^X$ của ánh xạ đa trị $G : X \to 2^Y$ được xác định bởi công thức

$$G^{-1}(y) := \{ x \in X : y \in G(x) \}, \text{ với mọi } y \in Y.$$

Định nghĩa 2.4. Với $x \in X$, $h > 0$ ta kí hiệu

$\overset{o}{B}_h(x)$ hình cầu mở tâm x, bán kính h;

$B_h(x)$ hình cầu đóng tâm x, bán kính h.

Định nghĩa 2.5. a) Cho X là một không gian metric với metric d. Ta định nghĩa khoảng cách từ một điểm $x \in X$ đến tập $A \subset X$ là số $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$.

b) Ta gọi khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B trong X là số

$$d_H(A, B) := max \left\{ \sup_{x \in B} d(x, A); \sup_{x \in A} d(x, B) \right\}.$$

Định lý 2.1. (**Nguyên lý biến phân Ekeland**)

Giả sử (X, d) là không gian metric đầy đủ và hàm $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên X. Giả sử $\bar{x} \in dom\varphi$ thỏa mãn

$$\varphi(\bar{x}) \le \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon, \text{ với } \varepsilon > 0.$$

Khi đó, với $\lambda > 0$ là một số thực cho trước, thì tồn tại $\hat{x} \in X$ sao cho

i) $\varphi(\hat{x}) \le \varphi(\bar{x})$;

ii) $d(\hat{x}, \bar{x}) \le \lambda$;

iii) Với mọi $x \in X \setminus \{\hat{x}\}$, $\varphi(\hat{x}) < \varphi(x) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \hat{x})$.

Định nghĩa 2.6. (Giới hạn theo Painlevé –Kuratowski)

Cho T là một không gian metric, $\{A_\tau\}_{\tau \in T}$ là một họ tập hợp phụ thuộc vào tham số $\tau \in T$, $A_\tau \subset Y$ với mọi τ, Y là không gian định chuẩn. Giới hạn trên và giới hạn dưới theo Painlevé –Kuratowski của họ $\{A_\tau\}_{\tau \in T}$ khi $\tau \to \tau_0$ xác định bởi

$$\limsup_{\tau \to \tau_0} A_\tau = \left\{ v \in Y : \liminf_{\tau \to \tau_0} d(v, A_\tau) = 0 \right\},$$

$$\liminf_{\tau \to \tau_0} A_\tau = \left\{ v \in Y : \lim_{\tau \to \tau_0} d(v, A_\tau) = 0 \right\}.$$

Định nghĩa 2.7. Cho $G : X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y, X là không gian metric và Y là không gian Banach. Giả sử $(x, y) \in Graph(G)$, k>0.

i) Biến phân tiếp xúc của G tại (x,y) là tập con đóng của Y được xác định bởi

$$G^{(1)}(x,\ y) := \limsup_{h\to 0^+} \frac{G(B_h(x)) - h}{h}.$$

ii) Biến phân cấp k của G tại (x,y) là tập con đóng của Y được xác định bởi

$$G^{k}(x,\ y) := \liminf_{\substack{(x',\, y')\to_G (x,\, y) \\ h\to 0^+}} \frac{G(B_h(x')) - y'}{h^k}.$$

Nhận xét 2.1. i) Với $\to_G$ kí hiệu sự hội tụ trong $Graph(G)$;

ii) $v \in G^{(1)}(x,\ y)$ khi và chỉ khi tồn tại dãy $h_i \to 0^+, v_i \to v$ sao cho $y + h_i v_i \in G(B_{h_i}(x))$;

Tương tự, $v \in G^k(x,\ y)$ khi và chỉ khi $h_i \to 0^+$, $(x_i,\ y_i) \to_G (x,\ y)$, tồn tại dãy $v_i \to v$ sao cho $y_i + h_i^k v_i \in G(B_{h_i}(x_i))$.

Định lý sau đây cho mối liên hệ giữa nguyên lý ánh xạ mở đều và tính chính quy của ánh xạ ngược G^{-1}.

Định lý 2.2. Giả sử X là không gian metric đầy đủ và Y là không gian metric. Xét ánh xạ đa trị $G: X \to 2^Y$ có đồ thị đóng và $y_0 \in G(x_0)$.

Nếu tồn tại $k > 0,\ \varepsilon > 0,\ \rho > 0,\ 0 < \beta < 1$ sao cho với mọi $(x,\ y) \in Graph(G) \cap B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0)$ và với mọi $h \in [0, \varepsilon]$, thỏa

$$\sup_{b\in B_{\rho h^k}(y)} d\big(b, G(B_h(x))\big) \le \beta\rho h^k,$$

Thì với mọi $(x_1,\ y_1) \in Graph(G) \cap B_{\varepsilon/2}(x_0) \times B_{\varepsilon/2}(y_0)$, với mọi $h \ge 0$ thỏa $max\left\{\frac{h}{1-\beta^{1/k}},\ 2\rho h^k\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $y_2 \in B_{\rho h^k}(y_1)$, ta có

$$d\big(x_1,\ G^{-1}(y_2)\big) \le \frac{1}{1-\beta^{1/k}} h$$

hoặc tương đương với mọi $(x_1,\ y_1) \in Graph(G) \cap B_{\varepsilon/2}(x_0) \times B_{\varepsilon/2}(y_0)$ và với mọi $y_2 \in Y$ thỏa $d(y_1,\ y_2) < \min\left\{\frac{\varepsilon}{4},\ \rho\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k \left(1-\beta^{1/k}\right)^k\right\}$, ta có

$$d\big(x_1,\ G^{-1}(y_2)\big) \le \frac{1}{1-\beta^{1/k}} \cdot \frac{1}{\rho^{1/k}} d(y_1,\ y_2)^{1/k}.$$

Chứng minh. Cố định $\beta < \alpha < 1$ sao cho $\dfrac{h}{1-\alpha^{1/k}} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Thì với mọi $(x, y) \in Graph(G) \cap B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0)$ và với mọi $h \in (0, \varepsilon]$, ta có

$$\sup_{b \in B_{\rho h^k}(y)} d\left(b,\ G\left(B_h(x)\right)\right) < \alpha\rho h^k. \tag{2.1}$$

Giả sử x_1, y_1, y_2, h như trong kết luận của định lý trên. Xét trường hợp $h \ne 0$. Ta tìm $x_2 \in G^{-1}(y_1)$ thỏa $d(x_1, x_2) \le h / \left(1-\alpha^{1/k}\right)$. Ta xây dựng giới hạn của một dãy như sau.

Đặt $u_0 = x_1$. Từ (2.1), tồn tại $(u_1, v_1) \in Graph(G)$ sao cho $d(u_0, u_1) = d(x_1, u_1) \le h,$ $d(v_1, y_2) < \alpha\rho h^k.$

Giả sử chúng ta đã xây dựng được $(u_i, v_i) \in Graph(G)$ với $i = 1, ..., n$ sao cho

$$d(u_{i-1}, u_i) \le \alpha^{(i-1)/k} h, \tag{2.2}$$

$$d(v_i, y_2) \le \rho\alpha^i h^k = \rho\left(\alpha^{i/k} h\right)^k. \tag{2.3}$$

Thì

$$d(x_1, u_i) \le \sum_{j=1}^{i} d(u_{j-1}, u_j) \le h\sum_{j=0}^{i-1} \alpha^{j/k} \le \frac{h}{1-\alpha^{1/k}} \tag{2.4}$$

và

$$d(x_0, u_i) \le d(x_0, x_1) + d(x_1, u_i) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{h}{1-\alpha^{1/k}} \le \varepsilon,$$

$$d(y_0, v_i) \le d(y_0, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, v_i) \le \frac{\varepsilon}{2} + \rho h^k + \rho\alpha^i h^k \le \varepsilon.$$

Do đó, từ (2.1) và (2.3) áp dụng cho (u_n, v_n), tồn tại $(u_{n+1}, v_{n+1}) \in Graph(G)$ sao cho

$$d(u_n, u_{n+1}) \le \alpha^{n/k} h, \quad d(v_{n+1}, y_2) < \rho\alpha^{n+1} h^k.$$

Từ (2.2), suy ra $\{u_i\}$ là một dãy Cauchy và từ (2.3) suy ra $\lim_{i\to\infty} v_i = y_2$. Giả sử x_2 là giới hạn của $\{u_i\}$. Vì $Graph(G)$ là đóng, $(x_2, y_2) \in Graph(G)$ do đó $x_2 \in G^{-1}(y_2)$. Hơn nữa, từ (2.4), ta có $d(x_1, x_2) \le \dfrac{h}{1-\alpha^{1/k}}$ do đó

$$d\left(x_1, G^{-1}(y_2)\right) \le \frac{1}{1-\alpha^{1/k}} h.$$

Vì $\alpha \in (\beta, 1)$ có thể chọn tùy ý. Vậy định lý đã được chứng minh.

Định lý tiếp theo là một định lý hàm ngược đa trị dựa vào biến phân cấp một.

Định lý 2.3. *Giả sử* X *là không gian metric đầy đủ và* Y *là không gian Banach. Xét ánh xạ đa trị* $G: X \to 2^Y$ *có đồ thị đóng. Giả sử chuẩn của* Y *khả vi Gâteaux tại mọi điểm* *khác* 0 *và xét* $y_0 \in G(x_0)$. *Nếu tồn tại* $\varepsilon > 0,\ \rho > 0,\ M > 0,$ *sao cho*

$$\rho B \subset \bigcap_{\substack{(x,\,y)\in Graph(G)\\ (x,\,y)\in B_\varepsilon(x_0)\times B_\varepsilon(y_0)}} c\overline{o}\left(G^{(1)}(x,\,y)\cap MB\right), \tag{2.5}$$

thì với mỗi $(x_1,\, y_1) \in Graph(G)\cap B_{\varepsilon/4}(x_0)\times B_{\varepsilon/4}(y_0),\ y_2 \in Y$ *thỏa*

$$\|y_2 - y_1\| \le \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon\rho}{4}\right\}, \textit{ta có } d\left(x_1,\ G^{-1}(y_2)\right) \le \frac{1}{\rho}\|y_1 - y_2\|.$$

Chứng minh. Từ định lý 2.2, ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{\rho}{1+\lambda}\overset{0}{B} \subset \dfrac{G\left(B_h(x)\right) - y}{h}$ đúng với mọi $\lambda > 0,\ (x,\ y) \in Graph(G)\cap B_{\varepsilon/2}(x_0)\times B_{\varepsilon/2}(y_0),\ 0 < \overline{h} \le \dfrac{\varepsilon}{2},\ 0 < h < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Cố định $\lambda,\ \overline{h},\ (t;z) = (x;y)$ và giả sử tồn tại $\overline{y} \in z + \dfrac{\rho\overline{h}}{1+\rho}\overset{0}{B},\ \overline{y} \notin G\left(B_{\overline{h}}(x)\right)$.

Đặt $0 < \Theta < 1$ với $\Theta^2 = \dfrac{\|z - \overline{y}\|(1+\lambda)}{\rho\overline{h}}$ và $K := Graph(G)\cap B_{\overline{h}}(t)\times Y$. Áp dụng nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm liên tục $(x, y) \to \|y - \overline{y}\|$ trên không gian metric đầy đủ K với metric $d\left((x,\ y),(x',\ y')\right) = d(x,\ x') + \dfrac{\lambda}{M}\|y - y'\|,$ ta tìm được $(x,\ y) \in B_{\Theta\overline{h}}(t)\times B_{\Theta\overline{h}}(z)$, sao cho

$$\|y - \overline{y}\| \le \|\mathbf{w} - \overline{y}\| + \frac{\Theta\rho}{1+\lambda}\left(d(u,\ x) + \frac{\lambda}{M}\|\mathbf{w} - y\|\right),\ \text{ với mọi } (u, \mathbf{w}) \in K \tag{2.6}$$

Do cách chọn $\overline{y}$, ta có $y \ne \overline{y}$. Do tính khả vi của chuẩn trong Y, tồn tại $p \in Y^*,\ \|p\|_{Y^*} = 1$ sao cho với mọi $h_j \to 0^+,\ v_j \to v,$ ta có

$$\|y + h_j v_j - \overline{y}\| = \|y - \overline{y}\| + \langle p, h_j v\rangle + o_v(h_j). \tag{2.7}$$

Với $\liminf\limits_{j\to\infty} \dfrac{o_v(h_j)}{h_j} = 0$. Cố định $v \in G^{(1)}(x,\ y)$ và cho $h_j \to 0^+,\ v_j \to v,$ sao cho $y + h_j v_j \in G\left(B_{h_j}(x)\right)$. Từ (2.6) và (2.7), ta có

$$0 \le \langle p,\ h_j v\rangle + \frac{\Theta\rho}{1+\lambda}\left(h_j + \frac{\lambda}{M}h_j\|v_j\|\right) + o_v(h_j).$$

Cho $h_j \to 1$ và lấy giới hạn ta được $\langle p, v\rangle \ge -\dfrac{\Theta\rho}{1+\lambda}\left(1 + \dfrac{\lambda}{M}\|v\|\right)$.

Do đó, với mọi $v \in c\overline{o}\left(G^{(1)}(\overline{x},\ \overline{y})\cap MB\right)$, ta có $\langle p,\ v\rangle \ge -\rho\Theta.$ (2.8)

Vì $(x,\ y) \in B_\varepsilon(x_0)\times B_\varepsilon(y_0)$ và $\rho B \subset c\overline{o}\left(G^{(1)}(x,\ y)\cap MB\right)$, ta có $-\rho p \in \rho B$ suy ra

$\langle p,-\rho p\rangle = -\rho \geq -\Theta\rho.$ Điều này, mâu thuẫn với $0<\Theta<1.$ Vậy định lý được chứng xong.

3. Ứng dụng trong tối ưu và điều khiển

Trong phần này, giả sử U là không gian metric tách được, E là không gian Banach và hàm $f: E\times U \to E$ liên tục, khả vi.

Chúng ta cần những giả thiết sau:

$a)$ f là Lipschitz địa phương trên $U,$ nếu với mỗi $x\in E,$ tồn tại $L>0$ và $\varepsilon>0,$ sao cho với mọi $u\in U, f(.\,,u)$ là L-Lipschitz trên $B_\varepsilon(x),$ tức là với mọi $x',\ x''\in B_\varepsilon(x),$ $\|f(x',u)-f(x'',u)\|\leq L\|x'-x''\|.$

$b)$ Với mỗi $u\in U$ đạo hàm $\dfrac{\partial f}{\partial x}(.\,,u)$ là liên tục.

$c)$ Với mỗi $x\in E$ tập $f(x\,,U)$ bị chặn.

Với mọi $T>0,$ hàm đo được (Lebesgue) $u:[0,\ T]\to U$ gọi là một điều kiển chấp nhận được. Kí hiệu $\mathscr{U}_T$ tập tất cả các điều khiển chấp nhận được trên $[0,\ T].$ Định nghĩa metric trên tập $\mathscr{U}_T$ là

$$d_T(u,\ v)=\mu\Big(\big\{t\in[0,\ T]\big|u(t)\neq v(t)\big\}\Big),$$

với μ là độ đo Lebesgue. Không gian $(\mathscr{U}_T,\ d_T)$ là không gian đầy đủ. Cho $E=\mathbb{R}^n, x_0\in E$ và $f,\ U$ như ở trên.

Xét hệ điều khiển hữu hạn chiều: $\begin{cases} x'=f(x,\ u(t)),\ u\in\mathscr{U}_T,\ T>0 \\ x(0)=x_0. \end{cases}$ (3.1)

Một hàm liên tục tuyệt đối $x\in \mathrm{W}^{1,1}(0,T)$ (không gian Sobolev) gọi là quỹ đạo của hệ điều khiển (3.1) nếu $x(0)=x_0$ và tồn tại $u\in\mathscr{U}_T$ sao cho $x'(t)=f(x(t),\ u(t)).$

Với mọi $T>0,$ tập tiếp cận được của hệ (3.1) tại thời điểm T xác định bởi

$$R(T)=\big\{x(T)\big|x\in \mathrm{W}^{1,1}(0,\ T)\text{ là một quỹ đạo của}(3.1)\big\}.$$

Giả sử $z\in \mathrm{W}^{1,1}(0,\ T)$ là quỹ đạo và $\bar{u}\in\mathscr{U}_T$ là một điều khiển tương ứng. Ta xem xét điều kiện đủ để có

$$z(T)\in IntR(T)$$

Xét hệ điều khiển tuyến tính hóa

$$\begin{cases} \mathbf{w}'(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(z(t),\ \bar{u}(t))\mathbf{w}(t)+y(t) \\ y(t)\in c\overline{o}f(z(t),\ U)-f(z(t),\ \bar{u}(t)) \\ \mathbf{w}(0)=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

và định nghĩa tương ứng tập tiếp cận được xác định bởi

$$R^L(T)=\{w(T)|w\in W^{1,1}(0,\ T) \text{ là một quỹ đạo của } (3.2)\}.$$

với mọi $s\in[0,\ T]$, kí hiệu $S_{\bar{u}}(.\ ;\ s)$ là ma trận nghiệm của hệ

$$\begin{cases} Z'(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(z(t),\ \bar{u}(t))Z(t);\ \ t\in[s,\ T] \\ Z(s)=I. \end{cases}$$

với I là ma trận đơn vị. Thì

$$R^L(T)=\left\{\int_0^T S_{\bar{u}}(T;\ s)y(s)ds\,\middle|\,y(s)\in c\overline{o}f(z(s),\ U)-f(z(s),\ \bar{u}(s))\right\}.$$

Với mỗi $u\in\mathcal{U}_T$, ta kí hiệu x_u là nghiệm của (3.1) tương ứng điều khiển u.

Định lý sau đây cho điều kiện đủ để có $z(T)\in IntR(T)$.

Định lý 3.1 *Giả sử*

$$0\in IntR^L(T) \tag{3.3}$$

Thì $z(T)\in IntR(T)$ *và tồn tại* $\varepsilon>0,\ L>0$ *sao cho mỗi điều khiển* $u\in\mathcal{U}_T$ *thỏa* $d_T(u,\ \bar{u})\le\varepsilon$ *và với mỗi* $b\in B_\varepsilon(z(T))$, *ta tìm được một điều khiển* $\hat{u}\in\mathcal{U}_T$ *với*

$$x_{\hat{u}}(T)=b,\quad \mu(\{t\in[0,\ T]|\hat{u}(t)\ne u(t)\})\le L\|b-x_u(T)\|.$$

Đặc biệt, với mọi $b\in B_\varepsilon(z(T))$, *tồn tại một điều khiển* $u\in\mathcal{U}_T$ *sao cho*

$$x_u(t)=b,\quad \mu(\{t\in[0,\ T]|u(t)\ne\bar{u}(t)\})\le L\|b-z(T)\|.$$

Chứng minh. Thay t bởi $\dfrac{t}{T}$, ta có thể giả sử $T=1$. Đặt $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1$. Từ bất đẳng thức Gronwall với $\delta>0$, ánh xạ $\varphi(u)=x_u:B_\delta(\bar{u})\to C(0,\ 1\ ;\ E)$ là ánh xạ đơn trị và Lipschitz liên tục. Với mọi $u\in B_\delta(\bar{u})$ và $s\in[0,\ 1]$, kí hiệu $S_u(.;\ s)$ là ma trận nghiệm của hệ tuyến tính.

$$\begin{cases} Z'(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_u(t),\ u(t))Z(t),\ \ \mathbf{t}\in[s,\ 1], \\ Z(s)=I. \end{cases}$$

Cố định $u\in B_{\frac{\delta}{2}}(\bar{u})$, $v\in U$ và cho $0<t_0<1$ sao cho $x_u'(t_0)=f(x_u(t_0),\ u(t_0))$ với mọi $h>0$ đủ nhỏ, xét điều khiển

$$u_h(t)=\begin{cases} v, & t_0-h<t\le t_0 \\ u(t), & \text{ngoài ra.} \end{cases} \tag{3.4}$$

và kí hiệu x_h là nghiệm của (3.1) tương ứng u_h. Hệ (3.4) là nhiễu nhỏ của u và

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{x_h(1) - x_u(1)}{h} = S_u(1\,;\,t_0)\Big(f\big(x_u(t_0),\,v\big) - f\big(x_u(t_0),\,u(t_0)\big)\Big). \qquad (3.5)$$

Xét tập $V_u(t) = f\big(x_u(t),\,U\big) - f\big(x_u(t),\,u(t)\big)$ và định nghĩa ánh xạ Lipschitz liên tục $G : B_\delta(\bar{u}) \to E$ xác định bởi

$$G(u) = \varphi(u)(1) = x_u(1).$$

Từ (3.5), cố định $u \in B_{\frac{\bar{\delta}}{2}}(\bar{u})$, với mọi $t_0 \in [0,\,1]$ và $v \in V_u(t_0)$, $\mathrm{S}_u(1;\,t_0)v \in G^{(1)}\big(u,\,x_u(1)\big)$. Giả sử M là hằng số Lipschitz của G. Do đó, $G^{(1)}\big(u, x_u(1)\big) \subset MB$ và ta chứng minh với mỗi $t_0 \in [0,\,1]$ và với mỗi $y \in c\overline{o}V_u(t_0)$; $\mathrm{S}_u(1\,;\,t_0)y \in c\overline{o}\Big(G^{(1)}\big(u,\,x_u(1)\big) \cap MB\Big)$. Từ $y(t) \in c\overline{o}V_u(t_0)$, ta có

$$\int_0^1 S_u(1\,;\,t)y(t)dt \in c\overline{o}\Big(G^{(1)}\big(u,\,x_u(1)\big) \cap MB\Big). \qquad (3.6)$$

Từ (3.3), tồn tại $\rho > 0$, sao cho

$$\rho B \subset \left\{ \int_0^1 S_u(1\,;\,t)y(t)dt \,\middle|\, y(t) \in c\overline{o}V_u(t) \right\}. \qquad (3.7)$$

Từ bất đẳng thức Gronwall và giả thiết (a), (b), ta có $\{S_u(1;\,.)\}$ hội tụ đều đến $S_{\bar{u}}(1;\,.)$ khi $u \to \bar{u}$. Từ giả thiết (a), (c) và tính liên tục của f, ta có

$$\lim_{u \to \bar{u}} \int_0^1 d_H\big(c\overline{o}V_{\bar{u}}(t),\,c\overline{o}V_u(t)\big)dt = 0.$$ Với d_H là khoảng cách Hausdorff.

Vì vế phải của (3.6) là lồi, $0 < \bar{\delta} < \frac{1}{2}\delta$ và với mọi $u \in B_{\bar{\delta}}(\bar{u})$, ta có

$$\frac{\rho}{2}B \subset \left\{ \int_0^1 S_u(1\,;\,t)y(t)dt \,\middle|\, y(t) \in c\overline{o}V_u(t) \right\} \subset c\overline{o}\Big(G^{(1)}\big(u, x_u(1)\big) \cap MB\Big). \qquad (3.8)$$

Từ định lý 2.3 và (3.6), (3.8), ta có kết luận của định lý. Vậy định lý đã được chứng minh.

4. Kết luận

Về mặt lý thuyết: Chúng tôi chứng minh chặt chẽ và chi tiết định lý 2.2 và định lý 2.3. Định lý 2.2 cho mối liên hệ giữa nguyên lý ánh xạ mở đều và tính chính quy của ánh xạ ngược G^{-1}. Định lý 2.3 là định lý hàm ngược đa trị dựa vào biến phân cấp một.

Về mặt ứng dụng: Chúng tôi sử dụng định lý 2.2 và định lý 2.3 để chứng minh định lý 3.1. Ý nghĩa của định lý 3.1 là cho kết quả, điều kiện đủ để hệ điều khiển hữu hạn chiều (3.1) điều khiển được tại thời điểm T nếu hệ điều khiển tuyến tính hóa (3.2) điều khiển được tại 0 ❒

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Aubin J.-P., Frankowska H.,(1990) Set-valued Analysis, Birkh¨auser, Boston, Basel, Berlin (seconde ´edition en pr´eparation).

[2] Frankowska H., Some inverse mapping theorems, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 7, 183-234, (1990).

[3] Frankowska H., (1987) An open mapping principle for set-valued maps, J. of Math. Analysis and Appl., 127, 172-180.

[4] Graves L. M., Some mapping theorems, *Duke Math. J.*, 17, 111-114, (1950).

[5] Ngai H.V., Tron N. H. Thera M., Implicit multifunction theorems in metric spaces, *Mathematical programming*, 139 (1-2), 301-326 (2013).

Abstract

Some open mapping theorems for set-valued maps and application

In this paper we present some results concerning with the open mapping theorem and the inverse mapping theorem for set-valued mapping. These results are applied to study the controllability for finite dimensional control system. They are given by Frankowska in [2], however most of them did not be proved in full detail. In here we present with the detail in proof.

Keywords: *Open mapping theorem, first order inverse mapping theorem, controllability, optimality.*