ĐIỀU KIỆN ĐỂ VÀNH NỬA HOÀN CHỈNH LÀ VÀNH CHUỖI TỔNG QUÁT

Lê Thị Phương*

Tóm tắt

Vành R được gọi là nửa hoàn chỉnh nếu R/J là vành nửa đơn và mọi lũy đẳng nâng được theo modulo J với J=rad(R). Vành R được gọi là chuỗi tổng quát nếu R là tổng trực tiếp của các môđun chuỗi. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra ví dụ phân biệt hai lớp vành vừa nêu trên và làm tường minh kết quả về lớp vành nửa hoàn chỉnh là lớp vành tổng quát của lớp vành chuỗi trong các tài liệu [1] và [5]. Hơn nữa, chúng tôi còn làm rõ một số điều kiện để vành nửa hoàn chỉnh là vành chuỗi tổng quát phải (hoặc trái).

Từ khóa: *vành nửa hoàn chỉnh, vành chuỗi tổng quát*

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, vành R đã cho là vành có đơn vị và mọi R-môđun là môđun phải unita. Để thuận tiện, ta sẽ nói môđun thay cho môđun phải và kí hiệu M thay cho kí hiệu M_R. Khi cần thiết, ta sẽ nói rõ M là môđun phải hay trái.

Các kết quả về vành nửa hoàn chỉnh ta có thể xem trong [5].

Khi R là vành nửa hoàn chỉnh thì $R_R=e_1R\oplus e_2R\oplus \dots \oplus e_nR$ và ${}_RR=Re_1\oplus Re_2\oplus \dots \oplus Re_n$ với $e_1, \dots, e_n$ là các lũy đẳng nguyên thủy (đôi một) trực giao. Chúng ta dùng ký hiệu này về vành nửa hoàn chỉnh trong suốt bài báo.

Môđun M được gọi là môđun chuỗi nếu các môđun con của nó được sắp tuyến tính theo quan hệ bao hàm (nghĩa là, nếu A và B là hai môđun con của M thì $A\subseteq B$ hoặc $B\subseteq A$). Môđun M được gọi là chuỗi tổng quát nếu M là một tổng trực tiếp của các môđun chuỗi. Vành R được gọi là vành chuỗi (chuỗi tổng quát) phải nếu môđun R_R là chuỗi (chuỗi tổng quát). Một vành chuỗi (chuỗi tổng quát) trái được định nghĩa tương tự. Vành R là vành chuỗi (chuỗi tổng quát) nếu R là vành chuỗi (chuỗi tổng quát) trái và phải.

Một vành chuỗi tổng quát bất kỳ luôn là vành nửa hoàn chỉnh. Ví dụ như vành $R=\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ (với F là một trường) là vành chuỗi tổng quát và tất nhiên nó là vành nửa hoàn chỉnh.

Các khái niệm liên quan đến phần này mà không nhắc đến trong bài báo chúng ta có thể xem [1] và [4].

2. Kết quả

Mệnh đề 1. Vành chuỗi tổng quát phải (hoặc trái) là vành nửa hoàn chỉnh.

Chứng minh

Giả sử vành R là chuỗi tổng quát phải. Khi đó $R=e_1R\oplus e_2R\oplus \dots \oplus e_nR$ với mỗi môđun e_iR là chuỗi và $1=\sum_{i=1}^{n} e_i$ trong đó e_i là các lũy đẳng đôi một trực giao không phân tích được. Vì

* CN, Trường PT Dân tộc nội trú tỉnh Phú Yên

e_iR là chuỗi nên e_iR có duy nhất một môđun con cực đại. Cho nên e_iR là địa phương. Suy ra R là vành nửa hoàn chỉnh.

Như vậy, vành chuỗi tổng quát phải (hoặc trái) là vành nửa hoàn chỉnh. Tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đúng. Ví dụ sau cho ta thấy điều đó.

Ví dụ 2. Vành nửa hoàn chỉnh nhưng không là vành chuỗi tổng quát trái.

Cho vành $R = \begin{pmatrix} \text{¤} & \text{¡} \\ 0 & \text{¡} \end{pmatrix}$ với ¤ và ¡ là các trường. Khi đó R là vành nửa hoàn chỉnh nhưng không phải là vành chuỗi tổng quát trái.

Chứng minh

Ta có $\{e_{11}; e_{22}\}$ với $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là một tập hợp đầy đủ các lũy đẳng nguyên thủy trực giao của R.

Cho nên $R_R = \begin{pmatrix} \text{¤} & \text{¡} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{¡} \end{pmatrix} = e_{11}R \oplus e_{22}R$.

Ta dễ dàng kiểm tra được môđun con thực sự khác không duy nhất của $e_{11}R = \begin{pmatrix} \text{¤} & \text{¡} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ là môđun $\begin{pmatrix} 0 & \text{¡} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Do đó $e_{11}R$ là một môđun chuỗi có độ dài của dãy hợp thành bằng 2. Hơn nữa, $e_{22}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{¡} \end{pmatrix}$ là môđun đơn nên $e_{22}R$ là chuỗi.

Do đó $R_R = e_{11}R \oplus e_{22}R$ là vành chuỗi tổng quát phải Artin phải. Khi đó theo ([1], Theorem 10.3.5) ta suy ra R là vành nửa hoàn chỉnh với tập các lũy đẳng nguyên thủy trực giao $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $J = J(R) = \begin{pmatrix} 0 & \text{¡} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Giả sử R là vành chuỗi tổng quát trái.

Khi đó ${}_RR = Re_{11} \oplus Re_{22} = \begin{pmatrix} \text{¤} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \text{¡} \\ 0 & \text{¡} \end{pmatrix}$ với Re_{11} và Re_{22} là chuỗi.

Giả sử K là trường trung gian giữa ¤ và ¡. Khi đó $\text{¤} \text{ Ø } K \text{ Ø } \text{¡}$.

Ta dễ dàng ta kiểm tra được $\begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ là Re_{22}-môđun trái. Suy ra $\begin{pmatrix} 0 & \text{¤} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{Ø} \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{Ø} \begin{pmatrix} 0 & \text{¡} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{Ø} \begin{pmatrix} 0 & \text{¡} \\ 0 & \text{¡} \end{pmatrix}$ là chuỗi.

Chọn $K = K_1 = \text{¤}\left[\sqrt{2}\right]$ và $K = K_2 = \text{¤}\left[\sqrt{3}\right]$. Khi đó $\text{¤ Ø } K_1 \text{ Ø ¡}$ và

¤ Ø K_2 Ø ¡ là hai dãy khác nhau. Vì thế suy ra Re_{22} không là chuỗi và điều này là mâu thuẫn. Vậy $_RR$ không là chuỗi tổng quát trái.

Như vậy, vành nửa hoàn chỉnh không là vành chuỗi tổng quát phải (hoặc trái). Thế thì khi nào điều này xảy ra. Các mệnh đề sau cho ta các điều kiện để vành nửa hoàn chỉnh là vành chuỗi tổng quát phải (hoặc trái).

Như ta biết, mỗi môđun xạ ảnh hữu hạn sinh trên một vành nửa hoàn chỉnh là đẳng cấu với một tổng trực tiếp của các môđun xiclic xạ ảnh e_iR. Giả sử R là vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó R được biểu diễn $R=e_1R\oplus\ldots\oplus e_nR=Re_1\oplus\ldots\oplus Re_n$. Vì thế mỗi phần tử $x\in R$ ta có thể được viết $r=\sum r_{ij}$ với $r_{ij}=e_ire_j\in e_iRe_j=R_{ij}$. Do đó mỗi phần tử của một vành nửa hoàn chỉnh được biểu diễn bởi một ma trận vuông cấp n: $A(r)=(r_{ij})$ sao cho phép nhân vành tương ứng với tích các ma trận: $A(rs)=A(r).A(s)$. Hơn nữa, nếu R là một vành chuỗi tổng quát thì R_{ij} được ký hiệu $R_{ij}=e_iRe_j$ là một nhóm aben với $i, j = 1, 2,\ldots, n$. Khi đó $R_i=R_{ii}$ là một vành và R_{ij} là một R_i-R_j – song môđun.

Mệnh đề 3. Cho R là vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó R là vành chuỗi tổng quát phải nếu và chỉ nếu với mỗi $r\in R_{ij}$, $s\in R_{ik}$ ta có $u\in R_{kj}$, $v\in R_{jk}$ sao cho $r = su$ hoặc $s = rv$.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử R là chuỗi tổng quát phải và r, $s\in R$ được chọn như trên. Khi đó $r,s\in e_iR$. Suy ra $r\in sR$ hoặc $s\in rR$.

Nếu $r\in sR$ thì $r = st$, $t\in R$. Vì $s\in Re_k$, $r\in Re_j$ nên $su=se_kte_j=ste_j=re_j=r$ và $u=e_kte_j\in R_{kj}$. Nếu $s\in rR$, tương tự.

($\Leftarrow$) Để chứng minh R là chuỗi tổng quát phải, ta chứng minh e_iR là chuỗi. Theo giả thiết, tất cả các môđun rR, $r\in R_{ij}$ với i cố định và j bất kỳ, được sắp tuyến tính với quan hệ bao hàm. Nhưng với $r\in e_iR$ ta có $r = re_1+\ldots+re_n$. Vì vậy $rR=\Sigma_j re_jR$. Do đó $rR=re_jR=e_ire_jR$ với một số j nào đó. Vì thế tất cả các môđun con xiclic của e_iR được sắp xếp thành một chuỗi, do đó tất cả các môđun con của e_iR tương tự cũng được sắp xếp thành một chuỗi. Hay e_iR là chuỗi. Vậy R là một chuỗi tổng quát phải.

Định nghĩa 4. Vành nửa hoàn chỉnh $R=e_1R\oplus e_2R\oplus\ldots\oplus e_nR$ được gọi là cơ sở nếu $e_iR\ncong e_jR$ với mọi $i\neq j$.

Mệnh đề 5. Cho R là một vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó R là vành cơ sở và là chuỗi tổng quát phải nếu và chỉ nếu mỗi R_{ij} là một R_j-môđun chuỗi phải và $r\in sR_{kj}$ hoặc $s\in rR_{jk}$ (không đồng thời xảy ra) với mỗi $0\neq r\in R_{ij}, 0\neq s\in R_{ik}$ và $j\neq k$.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử R là vành chuỗi tổng quát. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử rằng $r\in sR$ và $s\in rR$ cùng xảy ra, nghĩa là $r = su$ và $s = rv$ với $u\in R_{kj}$ và $v\in R_{jk}$. Vì vậy $r = rvu$ và $vu\in R_j$. Nếu $vu\in J(R_j)$ với $J(R_j)$ là căn Jacobson của vành R_j thì

$e_j - vu \in \mathrm{U}(R_j)$ và $r(e_j\text{-}vu)=0$ với U(R) là tập các phần tử khả nghịch trong R. Suy ra $r = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì thế $vu \in \mathrm{U}(R_j)$.

Hơn nữa, vì R là vành nửa hoàn chỉnh nên ta suy ra $e_iR \cong e_jR$ (xem ([4], Fact 1.20). Điều này là mâu thuẫn.

($\Leftarrow$) Giả sử rằng tất cả các giả thiết trên là đúng. Ta cần chứng minh các môđun e_iR là chuỗi dựa theo Mệnh đề 3. Giả sử $e_iR \cong e_jR, i \neq j$. Khi đó đẳng cấu này được cho bởi phép nhân trái do một số $r \in R_{ji}$. Vì $r \not\subset J(R)$ nên $e_j \in rR_{ij}$ và $r \in e_jR_{ji}$. Điều này là mâu thuẫn.

Tiêu chuẩn khác của tính chất chuỗi tổng quát ở một vành nửa hoàn chỉnh được thể hiện trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 6. Cho R là một vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó các khẳng định sau là tương đương.

(i) R là một vành chuỗi tổng quát phải (trái);

(ii) Hai đồng cấu khác 0 bất kỳ của các R-môđun xiclic phải (trái) $f_i : P_i \longrightarrow P\ (i=1,2)$ và $P, P_1, P_2 \in \{e_1R, \dots, e_nR\}$ thì tồn tại đồng cấu $x : P_1 \longrightarrow P_2$ sao cho $f_1=f_2x$ hoặc tồn tại đồng cấu $y : P_2 \longrightarrow P_1$ sao cho $f_2=f_1y$.

(iii) Hai đồng cấu khác 0 bất kỳ của các R-môđun xiclic trái (phải) $f_i : P \longrightarrow P_i\ (i=1,2)$ và $P, P_1, P_2 \in \{Re_1, \dots, Re_n\}$ thì tồn tại đồng cấu $x : P_2 \longrightarrow P_1$ sao cho $f_1=xf_2$ hoặc tồn tại đồng cấu $y : P_1 \longrightarrow P_2$ sao cho $f_2=yf_1$.

Chứng minh.

((i) $\Rightarrow$ (ii)) Giả sử vành R là chuỗi tổng quát phải. Khi đó $\mathrm{Im}\, f_1 \subset \mathrm{Im}\, f_2$ hoặc $\mathrm{Im}\, f_2 \subset \mathrm{Im}\, f_1$

Trường hợp $\mathrm{Im}\, f_1 \subset \mathrm{Im}\, f_2$**:** Vì P, P_1, P_2 là các R-môđun xiclic và $P, P_1, P_2 \in \{e_1R, \dots, e_nR\}$ nên P_1 là xạ ảnh. Ta có $f_1 : P_1 \longrightarrow P$ là đồng cấu. Vì P_2 và P là các môđun xiclic nên $f_2 : P_2 \longrightarrow P$ là toàn cấu. Vì P_1 là xạ ảnh nên ta có biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[d, "f_1"] \arrow[ddddl, "x"'] & \\
 & P \arrow[d, equal] & \\
 & \mathrm{Im} f_1 & \\
 & \mathrm{I} & \\
P_2 \arrow[r, "f_2"] & \mathrm{Im} f_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, hay tồn tại $x : P_1 \longrightarrow P_2$ sao cho $f_1=f_2x$.

Trường hợp $\operatorname{Im} f_2 \subset \operatorname{Im} f_1$**:** Tương tự, ta có P_2 là xạ ảnh nên suy ra biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
 & P_2 \arrow[d, "f_2"] \arrow[dddl, "y"'] & \\
 & P \arrow[d, phantom, "|||"] & \\
 & Imf_2 \arrow[d, phantom, "\mathrm{I}"] & \\
P_1 \arrow[r, "f_1"] & Imf_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

, hay tồn tại $y: P_2 \longrightarrow P_1$ sao cho $f_2=f_1y$.

((ii) $\Rightarrow$ (i)) Giả sử vành R không là chuỗi tổng quát phải. Khi đó trong số R-môđun xiclic phải P có các môđun con M_1 và M_2 khác 0 và các phần tử $a_1 \in M_1 \setminus M_2$; $a_2 \in M_2 \setminus M_1$ khác 0. Do đó có các lũy đẳng địa phương $e_1; e_2 \in R$ sao cho $a_1e_1 \in M_1 \setminus M_2$ và $a_2e_2 \in M_2 \setminus M_1$. Ký hiệu $P_i=e_iR$ và $f_i : P_i \longrightarrow P\ (i=1,2)$ là các phép đồng cấu biến e_i thành a_ie_i. Vì R không là chuỗi tổng quát phải nên $\operatorname{Im} f_1 \not\subset \operatorname{Im} f_2$ và $\operatorname{Im} f_2 \not\subset \operatorname{Im} f_1$. Suy ra không tồn tại các đồng cấu $x: P_1 \longrightarrow P_2$ sao cho $f_1=f_2x$ và $y: P_2 \longrightarrow P_1$ sao cho $f_2=f_1y$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy R là vành chuỗi tổng quát phải.

((ii) $\Leftrightarrow$ (iii)) Điều kiện tương đương giữa (ii) và (iii) được suy ra từ các đẳng cấu Hom(eR,fR) $\cong$ fRe $\cong$ Hom(Rf,Re) khi f và e là các lũy đẳng của vành R.

Hệ quả 7. Cho R là một vành nửa hoàn chỉnh và cho $1 = e_1 + \ldots + e_n$ là một sự phân tích của $1 \in R$ thành một tổng của các lũy đẳng địa phương đôi một trực giao. Vành R là chuỗi tổng quát phải nếu và chỉ nếu mỗi vành eRe là chuỗi tổng quát phải với e là một tổng của không quá ba lũy đẳng địa phương khác nhau từ tập $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ trong R.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử R là một vành chuỗi tổng quát phải và $e \in R$ là một lũy đẳng khác không. Khi đó vành eRe là chuỗi tổng quát phải. Đặt $1 = e + f$, $eRe = R_1$, $eRf = X$, $fRe = Y$, $fRf = R_2$.

Giả sử $e = e_1 + \ldots + e_m$ là sự phân tích e thành tổng của các lũy đẳng địa phương đôi một trực giao. Giả sử môđun e_iRe không là chuỗi. Khi đó trong e_iRe tồn tại hai eRe-môđun con M_1 và M_2 sao cho $M_1 \cap M_2 \neq M_1$ và $M_1 \cap M_2 \neq M_2$. Đặt $\overline{M_1} = M_1R$ và $\overline{M_2} = M_2R$. Rõ ràng $\overline{M_1} \subset e_iR$ và $\overline{M_1}e = M_i$ với $i = 1, 2$. Do đó R-môđun xiclic e_iR không là chuỗi. Điều này mâu thuẫn với giả thiết R là vành chuỗi tổng quát phải.

($\Leftarrow$) Giả sử eRe là vành chuỗi tổng quát phải. Để chứng minh R là vành chuỗi tổng quát phải ta chứng minh e_iR là chuỗi. Bằng phản chứng ta giả sử R-môđun xiclic $P = e_iR$ không là chuỗi. Khi đó tồn tại hai môđun con K và L của P sao cho $K \cap L \neq K$ và $K \cap L \neq L$. Vì vậy ta có thể chọn $k \in K$ và $l \in L$ sao cho $k \notin L$ và $l \notin K$. Giả sử $K_1=kR$ và $L_1=lR$. Giả sử $P(K_1) = \oplus_{j=1}^{s} P_j^{m_j}$ với $P_j=e_jR$ và $m_1 + \ldots + m_s \geq 2$.

Nếu tồn tại t sao cho $m_t \geq 2$ thì vành $(e_i+e_t)R(e_i+e_t)$ không là chuỗi tổng quát phải.
Trong trường hợp nếu tồn tại hai số m_p=1và m_q=1 thì vành $(e_i+e_p+e_q)R(e_i+e_p+e_q)$ không là chuỗi tổng quát phải. Vì vậy K_1 là một môđun địa phương, nghĩa là $P(K_1)=P_j$. Tương tự, $P(L_1)=P_m$. Cho nên vành $(e_i+e_j+e_m)R(e_i+e_j+e_m)$ không là chuỗi tổng quát phải. Điều này mâu thuẫn với giả thiết❐

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Hazewinkel, Nadiya Gubareni and V.v. Kirichenko, Algebras (2004), *Ring and Modules*, volume 1, Kluwer Academic Publishers.

[2] T.Y. Lam (2001), *A first Course in Noncommutative Rings* (Second Edition), Springer-Verlag. New York, Inc.

[3] B.J. Muller (1992), *The structure of Serial Rings, Methods in Module Theory*, Marcel Derker, 249 – 270.

[4] G.Puninski (reprint 2001), *Serial Rings*, Springer – Science + Business Media, B.V.

[5] L.H. Rowen (1991), *Ring Theory*, Academic Press.

Abstract

Conditions for semiperfect ring to be a serial ring

A ring R is called a semiperfect if R/J is a semisimple ring and any idempotent can be lifted following the modulo J with J = rad(R). A ring R is called a serial if R is a direct sum of uniserial submodules. This paper, I would like to propose some examples to distinguish the above-mentioned two-class rings and clarify the results of the fact that the class of semiperfect rings is a generalization of the class of serial rings in the document [1] and [5]. Moreover, we would also like to verify some of the conditions for the semiperfect ring to be the right serial ring (or left).

Keywords: *Semiperfect rings, serial rings*