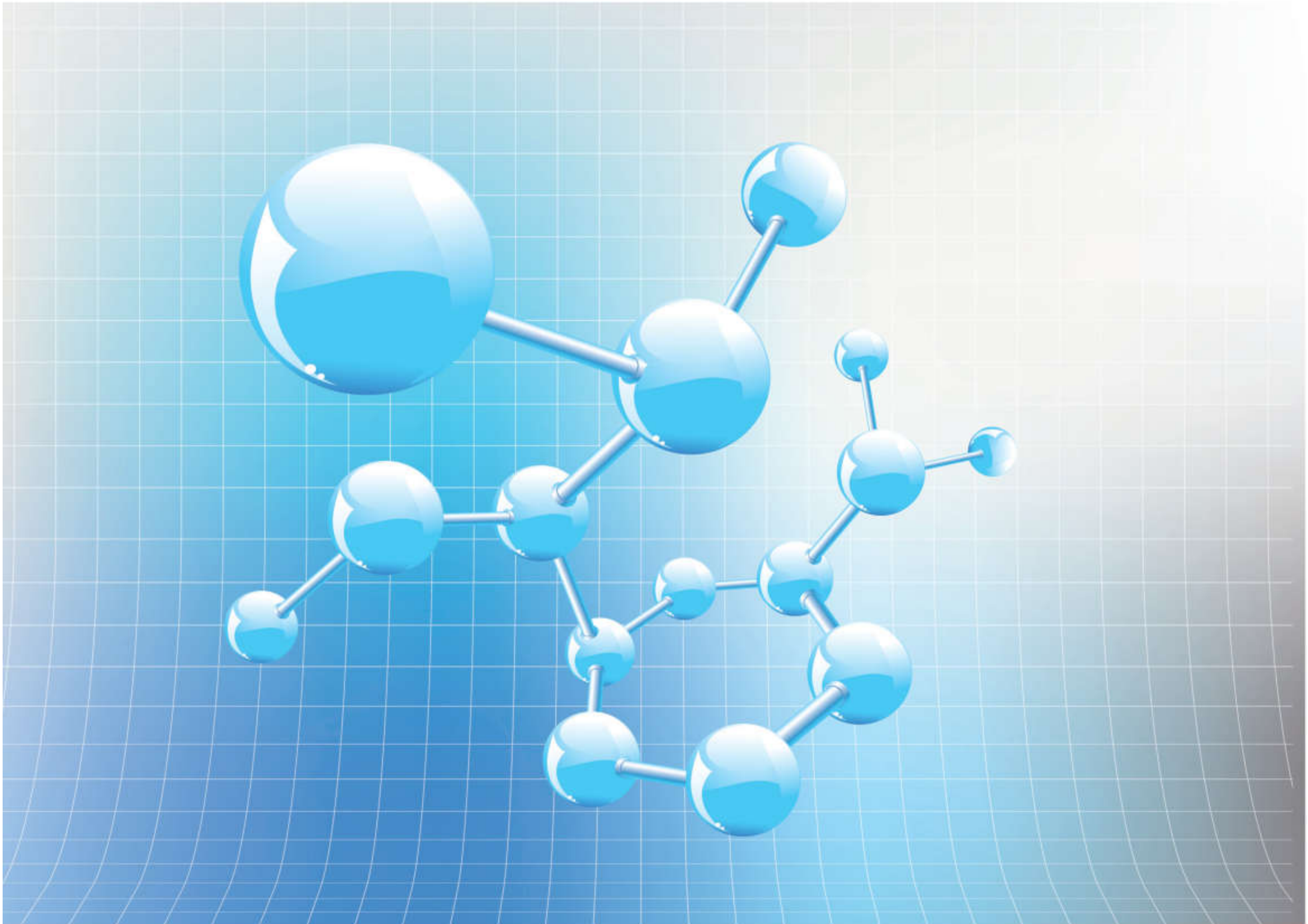
Tạp chí NGHIÊN CỨU KHOA HỌC ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

SCIENTIFIC JOURNAL - SAO DO UNIVERSITY

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X



Số 4 (87)
2024

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 4(87) 2024

LIÊN NGÀNH ĐIỆN - ĐIỆN TỬ - TỰ ĐỘNG HÓA

LIÊN NGÀNH CƠ KHÍ - ĐỘNG LỰC

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 4(87) 2024

NGÀNH KINH TẾ

NGÀNH TOÁN HỌC

NGÀNH HÓA HỌC - THỰC PHẨM

NGÀNH KHOA HỌC GIÁO DỤC

LIÊN NGÀNH TRIẾT HỌC - XÃ HỘI HỌC - CHÍNH TRỊ HỌC

Sự không tồn tại nghiệm của một lớp hệ phương trình gradient elliptic suy biến

Non-existence of a class of degenerate elliptic gradient equation systems

Nguyễn Thị Diệp Huyền

Tác giả liên hệ: diephuyendhsaodo@gmail.com

Trường Đại học Sao Đỏ

Ngày nhận bài: 03/9/2024
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 21/11/2024
Ngày chấp nhận đăng: 29/11/2024

Tóm tắt

Trong bài báo này, bằng cách thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev suy rộng, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm dương của hệ phương trình gradient elliptic chứa toán tử suy biến kiểu Grushin trong toàn không gian.

Từ khóa: *Đồng nhất thức kiểu Pohozaev suy rộng; sự không tồn tại nghiệm; toán tử Grushin; hệ phương trình gradient elliptic suy biến.*

Abstracts

In this paper, by establishing the generalized Pohozaev-type identity, we study the non-existence of solutions to a semilinear degenerate elliptic gradient system involving the Grushin operator in whole space.

Keywords: *Generalized Pohoaev identity; non-existence solutions; Grushin operator; degenerate elliptic gradient systems.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét phương trình elliptic suy biến chứa toán tử Grushin.

$$\begin{cases} -G_\alpha u + V_1 u = f(u) + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -G_\alpha v + V_2 v = g(v) + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó:

V_1, V_2 và λ là các hằng số dương,

$F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), F(0,0) = 0, \nabla F = (f, g).$

Ở đây:

G_α là toán tử suy biến Grushin (xem [4]) được định nghĩa bởi:

$$G_\alpha u = \Delta_x u + |x|^{2\alpha} \Delta_y u$$

Với:

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N$$

Trong đó:

Δ_x, Δ_y tương ứng là toán tử Laplace theo biến $x \in \mathbb{R}^{N_1}$ và $y \in \mathbb{R}^{N_2}$. Khi số thực $\alpha > 0$, toán tử này suy biến trên mặt $\{x = 0\}$, nhiều kết quả quan trọng về lớp toán tử này, chẳng hạn tính hypoelliptic, sự tồn tại nghiệm (trong miền bị chặn),… đã được nghiên cứu rất rộng rãi bởi nhiều tác giả trong [1, 2, 3, 4].

Người phản biện: 1. PGS.TS. Khuất Văn Ninh
2. TS. Nguyễn Viết Tuân

Khi $\alpha = 0$, thì $G_0 \equiv \Delta$ là toán tử Laplace, khi đó các tác giả trong [3] đã chứng minh được khi α là số nguyên dương và λ = 0, bài toán (1) không có nghiệm cổ điển không âm trong miền Ω kiểu hình sao. Phương pháp chính để chứng minh sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương là thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev suy rộng phù hợp với bài toán và khai thác cấu trúc đặc biệt của miền đang xét.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng các kết quả cho toán tử Laplace trong [5, Phụ lục B] sang trường hợp toán tử Grushin trong toàn miền và có nhiễu tuyến tính, ý tưởng chính là thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev phù hợp với hệ phương trình. Tuy nhiên, có một số khó khăn do tính suy biến của toán tử Grushin gây ra, ở đó chúng tôi không thể áp dụng trực tiếp các tính toán như trong [3], để vượt qua các khó khăn này, chúng tôi khai thác cấu trúc suy biến của toán tử G_α và chọn hàm thử phù hợp.

Chúng tôi giả thiết các hàm f, g thỏa mãn các điều kiện sau:

(V_1) Tồn tại số $\delta \in (0, 1)$ sao cho $0 \le \lambda \le \delta\sqrt{V_1 V_2}$.

Các hàm phi tuyến $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ sao cho $f(s) = 0$, $g(s) = 0$ với $s \le 0$ và thỏa mãn.

(f_1) $\quad \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{f(s)}{s} = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{g(s)}{s} = 0,$

Và

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{s} = a_1,\ \lim_{s\to+\infty}\frac{g(s)}{s} = a_2$$

Với:

$\alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty)$.

Và $\lambda < \sqrt{a_1 a_2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$.

(f_2) với hằng số $\delta \in (0,1)$ trong (V_1).

$$\frac{C_1}{V_1} + \frac{C_2}{V_2} < 1 - \delta$$

Với

$$C_1 = \sup_{s\in\mathbb{R}}\frac{2F(s)}{s^2}, C_2 = \sup_{s\in\mathbb{R}}\frac{2G(s)}{s^2}$$

Với

$$F(s) = \int_0^s f(t)\,dt, G(s) = \int_0^s g(t)\,dt$$

Kết quả chính của bài báo là định lý sau.

Định lý 1. Nếu (V_I) và (f_I) - (f_2) được thỏa mãn thì hệ (1) không có nghiệm không tầm thường.

Kết quả của định lý 1 mở rộng các kết quả tương ứng cho toán tử Laplace trong [5], khi bài toán là hệ gradient xét trên toàn không gian và toán tử suy biến Grushin.

2. Chứng minh kết quả chính

Đặt $N_\alpha = N_1 + (1+\alpha)N_2$ là số chiều thuần nhất của $\mathbb{R}^N$ (xem [1, 3 ,4]) và với $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}$, ký hiệu $\nabla_\alpha = \left(\nabla_x, |x|^\alpha \nabla_y\right)$ là véc-tơ gradient tương ứng với toán tử Grushin, ở đó ∇_x, ∇_y tương ứng là gradient theo biến x và biến y và $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{N_1}^2}$ là chuẩn Euclide.

Ký hiệu các hàm.

$$\lambda_1(z) = \lambda_2(z) = \ldots = \lambda_{N_1}(z) = 1$$

Và

$$\lambda_{N_1+1}(z) = \lambda_{N_1+2}(z) = \ldots = \lambda_{N_1+N_2}(z) = |x|^\alpha$$

Và xét trường véc-tơ.

$$T(u) = \sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j z_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Trong đó:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{N_1} = 1,$$
$$\varepsilon_{N_1+1} = \varepsilon_{N_1+2} = \ldots = \varepsilon_{N_1+N_2} = 1+\alpha.$$

Với mỗi i = 1, 2, ký hiệu E_i là không gian Sobolev $H^1_\alpha\left(\mathbb{R}^N\right)$ trang bị chuẩn.

$$\|u\|^2_{E_i} = \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla_\alpha u|^2 + V_i(x)u^2\right)dz, \quad u \in H^1_\alpha\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Và xét không gian tích $E = E_1 \times E_2$ trang bị chuẩn.

$$\|(u,v)\|^2_E = \|u\|^2_{E_1} + \|v\|^2_{E_2}$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev suy rộng cho hệ (1).

Bổ đề 2.1. Nếu (u, v) là một nghiệm cổ điển của (1) khi đó (u, v) thỏa mãn đẳng thức tích phân.

$$\frac{N_\alpha - 2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla_\alpha u|^2 + |\nabla_\alpha u|^2\right)dz$$
$$= N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} H\ u,v\ dz,$$

Trong đó:

$$H\ u,v\ = F\ u\ + G\ v\ - \frac{V_1}{2}u^2$$
$$-\frac{V_2}{2}v^2 + \lambda uv,\ \ u,v\ \in E.$$

Chứng minh. Giả sử (u, v) là một nghiệm thuộc $C^2\left(\mathbb{R}^N\right)\times C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ của bài toán 1 và xét N là hàm $\psi_1, \ldots, \psi_N \in C_0^\infty\ \ \mathbb{R}$ thỏa mãn.

$$\psi_i(s) = \begin{cases} 1, & |s| \le 1, \\ 0, & |s| \ge 2 \end{cases}$$

Và

$$\left|\psi_i'(s)\right| \le C,\ \ C > 0.$$

Đặt $\psi_n = \psi_1\left(\dfrac{|z_1|^2}{n^2}\right)\times \ldots \times \psi_N\left(\dfrac{|z_N|^2}{n^2}\right)$.

Khi đó, ta có:

$$\nabla_\alpha \psi_n = \frac{2}{n^2}(\psi_1' z_1, \ldots, \psi_{N_1}' z_{N_1}, |x|^\alpha$$
$$\psi_{N_1+1}' z_{N_1+1}, \ldots, |x|^\alpha\ \psi_{N_1+N_2}' z_{N_1+N_2}).$$

Nhân phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai trong hệ (1) tương ứng với $T(u)\psi_n$, $T(v)\psi_n$ sau đó cộng vế với vế ta thu được:

$$-\int_{\mathbb{R}^N}\left[G_\alpha u T(u) + G_\alpha T(v)\right]\psi_n dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left[(-V_1 u + f(u) + \lambda v)T(u)\right. \qquad (2)$$
$$\left.+ (-V_2 v + g(u) + \lambda u)T(u)\right]\psi_n dz.$$

Xét vế phải của (2), ta có:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha u T(u)\psi_n dz \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha u \psi_n \varepsilon_i z_i \frac{\partial u}{\partial z_i} dz \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\psi_n \varepsilon_i z_i \frac{\partial u}{\partial z_i}\right) dz \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i \delta_{ij} \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_i} \psi_n dz \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i z_i \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} \psi_n dz \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i z_i \lambda_j^2(x) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_j} dz \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i \lambda_j^2(z) \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)^2 \psi_n dz + I_{1,1} + I_{1,2},
\end{aligned}
$$

Trong đó:

$\delta_{ij} = 0, i \neq j$ và $\delta_{ij} = 1, i = j, i, j = 1, \ldots, N.$

Đối với $I_{1,1}$, tích phân từng phần ta có:

$$
\begin{aligned}
I_{1,1} &= -\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} (\varepsilon_i z_i \lambda_j^2(x)) \frac{\partial u}{\partial \partial z_j} \psi_n dz \\
&= -\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j} (\varepsilon_i \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \psi_n + \varepsilon_i \frac{\partial \lambda_j^2}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_j} \psi_n \\
&\qquad + \varepsilon_i z_i \lambda_j^2 \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_j} + \varepsilon_i z_i \lambda_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i} \psi_n) dz \\
&= -N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 \psi_n dz - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)^2 T(\lambda_j^2) \psi_n dz \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 T(\psi_n) dz - \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i z_i \lambda_j^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i} \psi_n dz.
\end{aligned}
$$

Do $T(\lambda_j^2) = 2\lambda_j T \lambda_j = 2(\varepsilon_j - 1)\lambda_j^2,$ khi đó:

$$
\begin{aligned}
I_{1,1} &= -N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 \psi_n dz \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)^2 2(\varepsilon_j - 1)\lambda_j^2 \psi_n dz \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_s u\right|^2 T(\psi_n) dz - I_{1,1} \\
&= - \; N_\alpha - 2 \; \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 \psi_n dz \\
&\quad - 2\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 T(\psi_n) dz - I_{1,1}.
\end{aligned}
$$

Từ đó, ta có:

$$
\begin{aligned}
I_{1,1} &= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 \psi_n dz \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 T(\psi_n) dz.
\end{aligned}
$$

Tương tự với $I_{1,2}$,

$$
\begin{aligned}
I_{1,2} &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j z \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_j} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha u \nabla_\alpha \psi_n T(u) dz.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha u T \; u \; \psi_n dz &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
&\quad - \frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 \psi_n dz \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 T \; \psi_n \; dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha u \nabla_\alpha \psi_n T \; u \; dz \\
&= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 \psi_n dz \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 T(\psi_n) dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha u \nabla_\alpha \psi_n T(u) dz.
\end{aligned}
$$

Ta cũng có:

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha v T(v) \psi_n dz &= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 \psi_n dz \\
-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 T(\psi_n) dz &+ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha u \nabla_\alpha \psi_n T(u) dz.
\end{aligned}
$$

Sử dụng định lý hội tụ của Lebesgue, ta có:

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha u T \; u \; \psi_n dz \\
&= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha u\right|^2 dz,
\end{aligned}
$$

Và

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha v T \; v \; \psi_n dz \\
&= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla_\alpha v\right|^2 dz,
\end{aligned}
$$

Vì vậy, ta được:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left[G_\alpha u T(u) + G_\alpha v T(v)\right] dz \\
&= \frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left|\nabla_\alpha u\right|^2 + \left|\nabla_\alpha v\right|^2\right] dz.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Xét vế phải của (1), ký hiệu ma trận.

$A = \begin{pmatrix} -V_1 & \lambda \\ \lambda & -V_2 \end{pmatrix}$ và $U = (u, v)^T$

Khi đó vế phải của hệ (1) trở thành.

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\left\langle AU,U\right\rangle + F(U)\right)$$

Trong đó:

$$\nabla F\left(U\right) = \left(F_u\left(U\right), F_v\left(U\right)\right)^T = \left(f\left(u\right), g\left(v\right)\right)^T$$

Từ hệ (1), ta suy ra:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left[T(u)G_\alpha u + T(v)G_\alpha v\right]dz \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]\psi_n dz \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon_i\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]\psi_n dz \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon_i z_i\frac{\partial\psi_n}{\partial z_i}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]\psi_n dz \\
&= N_\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]\psi_n dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]T(\psi_n)dz.
\end{aligned}$$

Sử dụng định lý hội tụ của Lebesgue, ta có:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left[T(u)G_\alpha u + T(v)G_\alpha v\right]dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left[T(u)G_\alpha u + T(v)G_\alpha v\right]\psi_n dz \\
&= N_\alpha\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]\psi_n dz \\
&\quad + \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]T\ \psi_n\ dz \\
&= N_\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]dz.
\end{aligned} \tag{4}$$

Kết hợp (2) và (3), ta chứng minh được:

$$\begin{aligned}
&\frac{N_\alpha - 2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla_\alpha u\right|^2 + \left|\nabla_\alpha u\right|^2\right)dz \\
&= N_\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle + F(u,v)\right]dz.
\end{aligned}$$

Bổ để được chứng minh.

Chứng minh Định lý 1

Từ (V1), với $\delta \in 0,1$, ta có:

$$0 \le \lambda \le \delta\sqrt{V_1 \cdot V_2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\lambda uv \le \delta\sqrt{V_1 u}\cdot\sqrt{V_2 v} \le \frac{\delta}{2}(V_1 u + V_2 v).$$

Từ đó ta thu được:

$$\begin{aligned}
&H(u,v) \le F(u) + G(v) + \frac{V_1}{2}(\delta - 1)u^2 \\
&+ \frac{V_2}{2}(\delta - 1)v^2, \quad \forall u,v \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Hơn nữa, từ (f1) suy ra:

$$F(u) \le \frac{C_1}{2}u^2 \text{ và } G(v) \le \frac{C_2}{2}v^2, \forall u,v \in \mathbb{R}$$

Nên theo (4) ta suy ra:

$$\begin{aligned}
&H(u,v) \le \frac{V_1}{2}\left(\frac{C_1}{V_1} + \delta - 1\right)u^2 \\
&+ \frac{V_2}{2}\left(\frac{C_2}{V_2} + \delta - 1\right)v^2, \quad \forall u,v \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Do đó, bởi (f_2) và (5), ta thu được:

$$H(u,v) \le 0,\ \forall u,v \in \mathbb{R}.$$

Từ điều này và áp dụng Bổ để 1, ta suy ra:

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla_\alpha u\right|^2 + \left|\nabla_\alpha u\right|^2\right)dx \le 0$$

Suy ra $\nabla_\alpha u = \nabla_\alpha v = 0$ hay $u = v$ = const. Định lý được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. W. Beckner (2001), *On the Grushin operator and hyperbolic symmetry*, Proc. Am. Math. Soc. 129(4), 1233-1246.

[2]. B. Franchi, C.E. Guitérrez, R.L. Wheeden (1994), *Weight Sobolev-Poincaré inequality- ies for Grushin type operator, Comm.Partial Differential Equations,* 19 (3-4), 523-604.

[3]. N.M. Chuong and T.D. Ke (2004), *Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system*, Electron. J. Differential Equations, no. 93, 15 pp.

[4]. R. Monti, D. Morbidelli (2006), *Kelvin transform for Grushin operators and critical semilinear equations*, Duke Math. J. 131, 167-202.

[5]. N.M. Tri (1998), *On Grushin's equation*, Mat. Zametki, 63, 95-105.

[6]. M. Willem (1996), *Minimax Theorems*, Birkhaser, Boston.

AUTHOR INFORMATION

Nguyen Thi Diep Huyen

Corresponding author: diephuyendhsaodo@gmail.com
Sao Do University.