



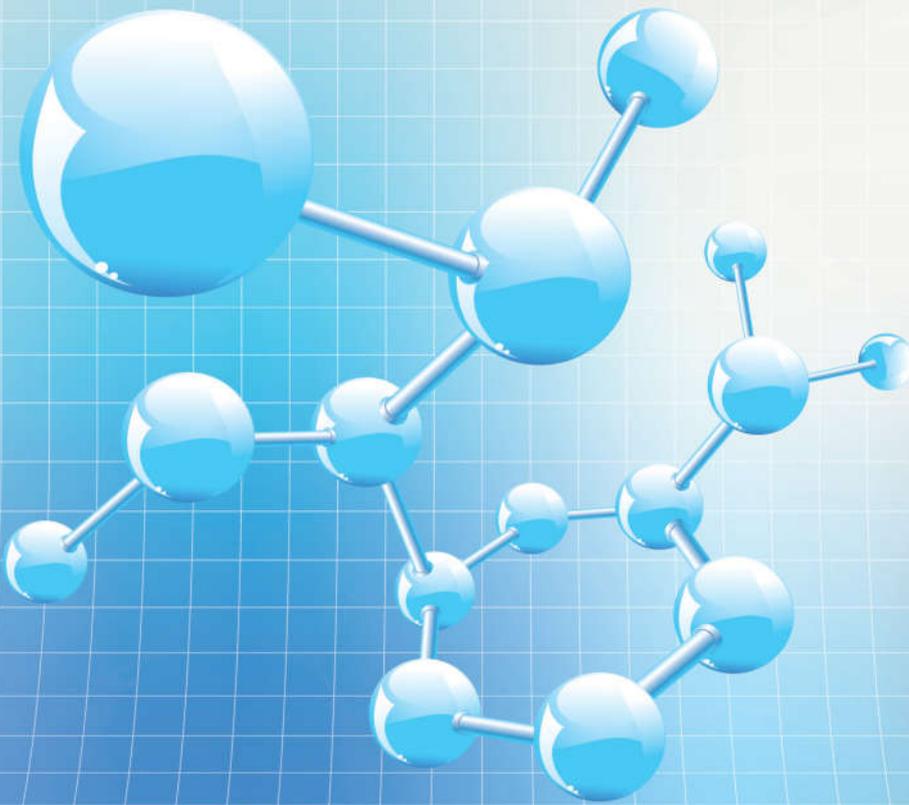
**Tap chí**

# **NGHIÊN CỨU KHOA HỌC**

**ĐẠI HỌC SAO ĐỎ**

**SCIENTIFIC JOURNAL - SAO DO UNIVERSITY**

**P. ISSN 1859-4190  
E. ISSN 2815-553X**



**Số 4 (87)**

**2024**

**P. ISSN 1859-4190**  
**E. ISSN 2815-553X**

■ **Tổng Biên tập**

TS. Đỗ Văn Đĩnh

■ **Phó Tổng biên tập**

TS. Nguyễn Thị Kim Nguyên

■ **Thư ký Tòa soạn**

PGS.TS. Ngô Hữu Mạnh

■ **Hội đồng Biên tập**

**TS. Nguyễn Thị Kim Nguyên - Chủ tịch Hội đồng**

GS.TS. Phạm Thị Ngọc Yến

PGS.TSKH. Trần Hoài Linh

PGS.TS. Nguyễn Văn Liễn

GS.TSKH. Thân Ngọc Hoàn

GS.TSKH. Bành Tiến Long

GS.TS. Nguyễn Đức Toàn

PGS.TS. Lê Thu Quý

GS.TS. Lê Anh Tuấn

GS.TS. Đinh Văn Sơn

PGS.TS. Trương Thị Thủy

PGS.TS. Nguyễn Thị Bất

GS.TS. Đỗ Quang Kháng

PGS.TS. Ngô Sỹ Lương

PGS.TS. Khuất Văn Ninh

GS.TSKH. Phạm Hoàng Hải

PGS.TS. Đoàn Ngọc Hải

PGS.TS. Nguyễn Ngọc Hà

GS.TS. Yu Ming Zhang

GS.TS. Nguyễn Văn Anh

■ **Ban Biên tập**

TS. Vũ Văn Đông - Trưởng ban

ThS. Đoàn Thị Thu Hằng - Phó Trưởng ban

■ **Editor-in-Chief**

Dr. Do Van Dinh

■ **Vice Editor-in-Chief**

Dr. Nguyen Thi Kim Nguyen

■ **Office Secretary**

Assoc.Prof.Dr. Ngo Huu Manh

■ **Editorial Board**

**Dr. Nguyen Thi Kim Nguyen - Chairman**

Prof.Dr. Pham Thi Ngoc Yen

Assoc.Prof.Dr.Sc. Tran Hoai Linh

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Van Lien

Prof.Dr.Sc. Than Ngoc Hoan

Prof.Dr.Sc. Bành Tiến Long

Prof.Dr. Nguyen Duc Toan

Assoc.Prof.Dr. Le Thu Quy

Prof.Dr. Le Anh Tuan

Prof.Dr. Dinh Van Son

Assoc.Prof.Dr. Trương Thị Thủy

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Thi Bat

Prof.Dr. Do Quang Khang

Assoc.Prof.Dr. Ngo Sy Luong

Assoc.Prof.Dr. Khuat Van Ninh

Prof.Dr.Sc. Phạm Hoàng Hai

Assoc.Prof.Dr. Doan Ngoc Hai

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Ngoc Ha

Prof.Dr. Yu Ming Zhang

Prof.Dr. Nguyen Van Anh

■ **Editorial**

Dr. Vu Van Dong - Head

MSc. Doan Thi Thu Hang - Deputy Head

**Địa chỉ Tòa soạn:**

Trường Đại học Sao Đỏ.

Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.

Website: <http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/>Email: [tapchikhcn@saodo.edu.vn](mailto:tapchikhcn@saodo.edu.vn).

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.  
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

LIÊN NGÀNH ĐIỆN - ĐIỆN TỬ - TỰ ĐỘNG HÓA

- Mô hình học sâu cho phát hiện bệnh trên cây lúa ở Việt Nam sử dụng YOLOv10 5 Hàn Hồng Hạnh  
Cần Vũ Sơn Hà  
Trần Văn Kiên  
Đỗ Lê Trà My  
Trịnh Công Đồng  
Võ Đức Nhân  
Ngô Phương Thủy  
Bùi Đăng Thành
- Nghiên cứu, thiết kế, xây dựng hệ thống mạng cảm biến không dây để giám sát trạng thái hoạt động của máy bơm tại nhà máy chế biến khoáng sản ở Việt Nam 12 Phạm Văn Nam  
Triệu Tuấn Anh  
Vương Anh Đức  
Đỗ Văn Đĩnh
- Thiết kế hệ thống giám sát xâm nhập mặn ứng dụng công nghệ IoT 18 Nguyễn Thị Nhật Quỳnh  
Phạm Minh Tiến  
Nguyễn Trung Nam  
Trần Ngọc Tạo  
Nguyễn Văn Thái  
Nguyễn Trọng Các
- Nghiên cứu tổng quan vật liệu silicon trong ngành thiết bị bán dẫn 25 Châu Thanh Phương

LIÊN NGÀNH CƠ KHÍ - ĐỘNG LỰC

- Sự thay đổi đặc tính khi thử nghiệm độ bền kéo trong mặt phẳng của vật liệu kép 30 Phạm Văn Trọng  
Phùng Đức Hải Anh  
Cao Huy Giáp  
Đỗ Tiến Quyết
- Nghiên cứu tối ưu hóa cấu trúc chi tiết máy theo phương pháp thiết kế sinh học 36 Mạc Văn Giang  
Tạ Hồng Phong  
Mạc Thị Nguyên  
Trịnh Văn Cường
- Mô phỏng ứng suất và biến dạng khi làm việc của sàng rung 44 Trần Văn Dũng  
Ngô Hữu Mạnh  
Trần Hải Đăng  
Vũ Văn Tản  
Mạc Văn Giang
- Nghiên cứu ảnh hưởng của một số nhân tố đến lực cắt và dao động khi phay thô thép SKD11 sử dụng mảnh cắt hình tròn 50 Nguyễn Thị Liễu

#### NGÀNH KINH TẾ

- Kiểm soát giá nhằm giảm tác động kép từ bão Yagi và dịp Tết Nguyên đán tại tỉnh Hải Dương 57 Ngô Thị Luyện
- Các yếu tố ảnh hưởng đến quyết định mua hàng đối với sản phẩm bánh trung thu của khách hàng tại Hà Nội 63 Nguyễn Thị Ngọc Mai  
Lê Thị Huyền
- Chính sách hỗ trợ doanh nghiệp nhỏ và vừa tại tỉnh Hải Dương 69 Phạm Thị Hồng Hoa  
Nguyễn Minh Tuấn
- Thu hút vốn đầu tư vào tỉnh Hải Dương và triển vọng những năm tiếp theo 76 Lương Thị Hoa

#### NGÀNH TOÁN HỌC

- Sự không tồn tại nghiệm của một lớp hệ phương trình gradient elliptic suy biến 82 Nguyễn Thị Diệp Huyền

#### NGÀNH HÓA HỌC - THỰC PHẨM

- Ảnh hưởng của các chất keo Carboxymethyl xellulose, Xanthan gum, Alginate natri đến độ bền phân tán của nha đam (*Aloe vera*) trong nước giải khát sắn dây 86 Bùi Văn Tú

#### NGÀNH KHOA HỌC GIÁO DỤC

- Tăng cường đào tạo kỹ năng số cho lực lượng lao động tại Việt Nam 93 Vũ Thị Thanh Thủy
- Phát triển du lịch gắn với phát triển văn hóa ở tỉnh Hải Dương 100 Trần Hoàng Yến  
Đặng Thị Thanh

#### LIÊN NGÀNH TRIẾT HỌC - XÃ HỘI HỌC - CHÍNH TRỊ HỌC

- Lý luận về hàng hóa sức lao động của C. Mác và giá trị trong phát triển thị trường lao động thời kỳ Cách mạng công nghiệp 4.0 ở nước ta 106 Vũ Văn Đông
- Giải quyết việc làm cho lao động nông thôn ở Hải Dương hiện nay 113 Nguyễn Thị Kim Nguyên
- Quan điểm chỉ đạo của Đảng cộng sản Việt Nam về việc đẩy mạnh chuyển đổi số trong quá trình công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước 118 Phạm Văn Dự
- Lý luận của chủ nghĩa Mác-Lênin về giải phóng phụ nữ và sự vận dụng của Đảng Cộng sản Việt Nam 125 Trần Thị Hồng Nhung  
Vũ Văn Đông

# Sự không tồn tại nghiệm của một lớp hệ phương trình gradient elliptic suy biến

## Non-existence of a class of degenerate elliptic gradient equation systems

Nguyễn Thị Diệp Huyền

Tác giả liên hệ: diephuyendhsaodo@gmail.com

Trường Đại học Sao Đỏ

Ngày nhận bài: 03/9/2024

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 21/11/2024

Ngày chấp nhận đăng: 29/11/2024

### Tóm tắt

Trong bài báo này, bằng cách thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev suy rộng, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm dương của hệ phương trình gradient elliptic chứa toán tử suy biến kiểu Grushin trong toàn không gian.

**Từ khóa:** Đồng nhất thức kiểu Pohozaev suy rộng; sự không tồn tại nghiệm; toán tử Grushin; hệ phương trình gradient elliptic suy biến.

### Abstracts

In this paper, by establishing the generalized Pohozaev-type identity, we study the non-existence of solutions to a semilinear degenerate elliptic gradient system involving the Grushin operator in whole space.

**Keywords:** Generalized Pohozaev identity; non-existence solutions; Grushin operator; degenerate elliptic gradient systems.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét phương trình elliptic suy biến chứa toán tử Grushin.

$$\begin{cases} -G_\alpha u + V_1 u = f(u) + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -G_\alpha v + V_2 v = g(v) + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó:

$V_1, V_2$  và  $\lambda$  là các hằng số dương,

$$F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), F(0,0) = 0, \nabla F = (f, g).$$

Ở đây:

$G_\alpha$  là toán tử suy biến Grushin (xem [4]) được định nghĩa bởi:

$$G_\alpha u = \Delta_x u + |x|^{2\alpha} \Delta_y u$$

Với:

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N$$

Trong đó:

$\Delta_x, \Delta_y$  tương ứng là toán tử Laplace theo biến  $x \in \mathbb{R}^{N_1}$  và  $y \in \mathbb{R}^{N_2}$ . Khi số thực  $\alpha > 0$ , toán tử này suy biến trên mặt  $\{x = 0\}$ , nhiều kết quả quan trọng về lớp toán tử này, chẳng hạn tính hypoelliptic, sự tồn

tại nghiệm (trong miền bị chặn),... đã được nghiên cứu rất rộng rãi bởi nhiều tác giả trong [1, 2, 3, 4].

Khi  $\alpha = 0$ , thì  $G_0 \equiv \Delta$  là toán tử Laplace, khi đó các tác giả trong [3] đã chứng minh được khi  $\alpha$  là số nguyên dương và  $\lambda = 0$ , bài toán (1) không có nghiệm cổ điển không âm trong miền  $\Omega$  kiểu hình sao. Phương pháp chính để chứng minh sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương là thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev suy rộng phù hợp với bài toán và khai thác cấu trúc đặc biệt của miền đang xét.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng các kết quả cho toán tử Laplace trong [5, Phụ lục B] sang trường hợp toán tử Grushin trong toàn miền và có nhiều tuyến tính, ý tưởng chính là thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev phù hợp với hệ phương trình. Tuy nhiên, có một số khó khăn do tính suy biến của toán tử Grushin gây ra, ở đó chúng tôi không thể áp dụng trực tiếp các tính toán như trong [3], để vượt qua các khó khăn này, chúng tôi khai thác cấu trúc suy biến của toán tử  $G_\alpha$  và chọn hàm thử phù hợp.

Chúng tôi giả thiết các hàm  $f, g$  thỏa mãn các điều kiện sau:

$$(V_1) \text{ Tồn tại số } \delta \in (0, 1) \text{ sao cho } 0 \leq \lambda \leq \delta \sqrt{V_1 V_2}.$$

Các hàm phi tuyến  $f, g \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}^N$  sao cho  $f(s) = 0, g(s) = 0$  với  $s \leq 0$  và thỏa mãn.

Người phản biện: 1. PGS.TS. Khuất Văn Ninh  
2. TS. Nguyễn Viết Tuấn

$$(f_1) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = 0,$$

Và

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = a_1, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s} = a_2$$

Với:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty).$$

$$\text{Và } \lambda < \sqrt{a_1 a_2} \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^N.$$

$(f_2)$  với hằng số  $\delta \in (0, 1)$  trong  $(V_1)$ .

$$\frac{C_1}{V_1} + \frac{C_2}{V_2} < 1 - \delta$$

Với

$$C_1 = \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{2F(s)}{s^2}, \quad C_2 = \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{2G(s)}{s^2}$$

Với

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt, \quad G(s) = \int_0^s g(t) dt$$

Kết quả chính của bài báo là định lý sau.

**Định lý 1.** Nếu  $(V_1)$  và  $(f_1) - (f_2)$  được thỏa mãn thì hệ (1) không có nghiệm không tầm thường.

Kết quả của định lý 1 mở rộng các kết quả tương ứng cho toán tử Laplace trong [5], khi bài toán là hệ gradient xét trên toàn không gian và toán tử suy biến Grushin.

## 2. Chứng minh kết quả chính

Đặt  $N_\alpha = N_1 + (1 + \alpha)N_2$  là số chiều thuần nhất của  $\mathbb{R}^N$  (xem [1, 3, 4]) và với  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ , ký

hiệu  $\nabla_\alpha = \left( \nabla_x, |x|^\alpha \nabla_y \right)$  là véc-tơ gradient tương

ứng với toán tử Grushin, ở đó  $\nabla_x, \nabla_y$  tương ứng là

gradient theo biến  $x$  và biến  $y$  và  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{N_1}^2}$

là chuẩn Euclide.

Ký hiệu các hàm.

$$\lambda_1(z) = \lambda_2(z) = \dots = \lambda_{N_1}(z) = 1$$

Và

$$\lambda_{N_1+1}(z) = \lambda_{N_1+2}(z) = \dots = \lambda_{N_1+N_2}(z) = |x|^\alpha$$

Và xét trường véc-tơ.

$$T(u) = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j z_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Trong đó:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{N_1} = 1,$$

$$\varepsilon_{N_1+1} = \varepsilon_{N_1+2} = \dots = \varepsilon_{N_1+N_2} = 1 + \alpha.$$

Với mỗi  $i = 1, 2$ , ký hiệu  $E_i$  là không gian Sobolev

$H_\alpha^1(\mathbb{R}^N)$  trang bị chuẩn.

$$\|u\|_{E_i}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left( |\nabla_\alpha u|^2 + V_i(x) u^2 \right) dz, \quad u \in H_\alpha^1(\mathbb{R}^N)$$

Và xét không gian tích  $E = E_1 \times E_2$  trang bị chuẩn.

$$\|(u, v)\|_E^2 = \|u\|_{E_1}^2 + \|v\|_{E_2}^2$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev suy rộng cho hệ (1).

**Bổ đề 2.1.** Nếu  $(u, v)$  là một nghiệm cổ điển của (1) khi đó  $(u, v)$  thỏa mãn đẳng thức tích phân.

$$\begin{aligned} & \frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left( |\nabla_\alpha u|^2 + |\nabla_\alpha v|^2 \right) dz \\ &= N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} H u, v \, dz, \end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} H u, v &= F u + G v - \frac{V_1}{2} u^2 \\ &- \frac{V_2}{2} v^2 + \lambda uv, \quad u, v \in E. \end{aligned}$$

**Chứng minh.** Giả sử  $(u, v)$  là một nghiệm thuộc

$C^2(\mathbb{R}^N) \times C^2(\mathbb{R}^N)$  của bài toán 1 và xét  $N$  là hàm

$\psi_1, \dots, \psi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  thỏa mãn.

$$\psi_i(s) = \begin{cases} 1, & |s| \leq 1, \\ 0, & |s| \geq 2 \end{cases}$$

Và

$$|\psi_i'(s)| \leq C, \quad C > 0.$$

$$\text{Đặt } \psi_n = \psi_1 \left( \frac{|z_1|^2}{n^2} \right) \times \dots \times \psi_N \left( \frac{|z_N|^2}{n^2} \right).$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \psi_n &= \frac{2}{n^2} (\psi_1' z_1, \dots, \psi_{N_1}' z_{N_1}, |x|^\alpha \\ &\psi_{N_1+1}' z_{N_1+1}, \dots, |x|^\alpha \psi_{N_1+N_2}' z_{N_1+N_2}). \end{aligned}$$

Nhân phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai trong hệ (1) tương ứng với  $T(u)\psi_n, T(v)\psi_n$  sau đó cộng vế với vế ta thu được:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^N} [G_\alpha u T(u) + G_\alpha T(v)] \psi_n \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [(-V_1 u + f(u) + \lambda v) T(u) \\ &+ (-V_2 v + g(u) + \lambda u) T(v)] \psi_n \, dz. \end{aligned} \tag{2}$$

Xét vế phải của (2), ta có:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha u T(u) \psi_n dz \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha \psi_n \varepsilon_i z_i \frac{\partial u}{\partial z_i} dz \\
 &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \psi_n \varepsilon_i z_i \frac{\partial u}{\partial z_i} \right) dz \\
 &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i \delta_{ij} \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_i} \psi_n dz \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i z_i \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} \psi_n dz \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i z_i \lambda_j^2(x) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_j} dz \\
 &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \lambda_j^2(z) \left( \frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^2 \psi_n dz + I_{1,1} + I_{1,2},
 \end{aligned}$$

Trong đó:

$$\delta_{ij} = 0, i \neq j \text{ và } \delta_{ij} = 1, i = j, i, j = 1, \dots, N.$$

Đối với  $I_{1,1}$ , tích phân từng phần ta có:

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} &= - \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} (\varepsilon_i z_i \lambda_j^2(x)) \frac{\partial u}{\partial z_j} \psi_n dz \\
 &= - \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial z_j} (\varepsilon_i \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \psi_n + \varepsilon_i \frac{\partial \lambda_j^2}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_j} \psi_n \\
 &\quad + \varepsilon_i z_i \lambda_j^2 \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_j} + \varepsilon_i z_i \lambda_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i} \psi_n) dz \\
 &= -N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 \psi_n dz - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^2 T(\lambda_j^2) \psi_n dz \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 T(\psi_n) dz - \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i z_i \lambda_j^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i} \psi_n dz.
 \end{aligned}$$

Do  $T(\lambda_j^2) = 2\lambda_j T\lambda_j = 2(\varepsilon_j - 1)\lambda_j^2$ , khi đó:

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} &= -N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^2 2(\varepsilon_j - 1)\lambda_j^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 T(\psi_n) dz - I_{1,1} \\
 &= -N_\alpha - 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 \psi_n dz \\
 &\quad - 2 \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left( \frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 T(\psi_n) dz - I_{1,1}.
 \end{aligned}$$

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} &= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left( \frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 T(\psi_n) dz.
 \end{aligned}$$

Tương tự với  $I_{1,2}$ ,

$$\begin{aligned}
 I_{1,2} &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j z \lambda_j^2(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_j} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha u \nabla_\alpha \psi_n T(u) dz.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha u T u \psi_n dz &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left( \frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_j \left( \frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^2 \lambda_j^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 T \psi_n dz \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha u \nabla_\alpha \psi_n T u dz \\
 &= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 T(\psi_n) dz \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha u \nabla_\alpha \psi_n T(u) dz.
 \end{aligned}$$

Ta cũng có:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha v T(v) \psi_n dz &= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha v|^2 \psi_n dz \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha v|^2 T(\psi_n) dz + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_\alpha v \nabla_\alpha \psi_n T(u) dz.
 \end{aligned}$$

Sử dụng định lý hội tụ của Lebesgue, ta có:

$$\begin{aligned}
 & - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha u T u \psi_n dz \\
 &= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha u|^2 dz,
 \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned}
 & - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha v T v \psi_n dz \\
 &= -\frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\alpha v|^2 dz,
 \end{aligned}$$

Vi vậy, ta được:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^N} [G_\alpha u T(u) + G_\alpha v T(v)] dz \\
 &= \frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla_\alpha u|^2 + |\nabla_\alpha v|^2] dz.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Xét vế phải của (1), ký hiệu ma trận.

$$A = \begin{pmatrix} -V_1 & \lambda \\ \lambda & -V_2 \end{pmatrix} \text{ và } U = (u, v)^T$$

Khi đó vế phải của hệ (1) trở thành.

$$\nabla \left[ \frac{1}{2} \langle AU, U \rangle + F(U) \right]$$

Trong đó:

$$\nabla F(U) = (F_u(U), F_v(U))^T = (f(u), g(v))^T$$

Từ hệ (1), ta suy ra:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} [T(u)G_\alpha u + T(v)G_\alpha v] dz \\ &= - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] \psi_n dz \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] \psi_n dz \\ & \quad + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon_i z_i \frac{\partial \psi_n}{\partial z_i} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] \psi_n dz \\ &= N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] \psi_n dz \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] T(\psi_n) dz. \end{aligned}$$

Sử dụng định lý hội tụ của Lebesgue, ta có:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} [T(u)G_\alpha u + T(v)G_\alpha v] dz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [T(u)G_\alpha u + T(v)G_\alpha v] \psi_n dz \\ &= N_\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] \psi_n dz \\ & \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] T(\psi_n) dz \\ &= N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] dz. \end{aligned} \tag{4}$$

Kết hợp (2) và (3), ta chứng minh được:

$$\begin{aligned} & \frac{N_\alpha - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla_\alpha u|^2 + |\nabla_\alpha v|^2) dz \\ &= N_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} \langle A(u, v), (u, v) \rangle + F(u, v) \right] dz. \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

### Chứng minh Định lý 1

Từ (V1), với  $\delta \in 0, 1$ , ta có:

$$0 \leq \lambda \leq \delta \sqrt{V_1 \cdot V_2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\lambda uv \leq \delta \sqrt{V_1 u} \cdot \sqrt{V_2 v} \leq \frac{\delta}{2} (V_1 u + V_2 v).$$

Từ đó ta thu được:

$$\begin{aligned} H(u, v) &\leq F(u) + G(v) + \frac{V_1}{2} (\delta - 1) u^2 \\ & \quad + \frac{V_2}{2} (\delta - 1) v^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Hơn nữa, từ (f1) suy ra:

$$F(u) \leq \frac{C_1}{2} u^2 \quad \text{và} \quad G(v) \leq \frac{C_2}{2} v^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

Nên theo (4) ta suy ra:

$$\begin{aligned} H(u, v) &\leq \frac{V_1}{2} \left( \frac{C_1}{V_1} + \delta - 1 \right) u^2 \\ & \quad + \frac{V_2}{2} \left( \frac{C_2}{V_2} + \delta - 1 \right) v^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Do đó, bởi (f<sub>2</sub>) và (5), ta thu được:

$$H(u, v) \leq 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Từ điều này và áp dụng Bổ đề 1, ta suy ra:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla_\alpha u|^2 + |\nabla_\alpha v|^2) dx \leq 0$$

Suy ra  $\nabla_\alpha u = \nabla_\alpha v = 0$  hay  $u = v = \text{const}$ . Định lý được chứng minh.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. W. Beckner (2001), *On the Grushin operator and hyperbolic symmetry*, Proc. Am. Math. Soc. 129(4), 1233-1246.
- [2]. B. Franchi, C.E. Guitérrez, R.L. Wheeden (1994), *Weight Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operator*, Comm. Partial Differential Equations, 19 (3-4), 523-604.
- [3]. N.M. Chuong and T.D. Ke (2004), *Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system*, Electron. J. Differential Equations, no. 93, 15 pp.
- [4]. R. Monti, D. Morbidelli (2006), *Kelvin transform for Grushin operators and critical semilinear equations*, Duke Math. J. 131, 167-202.
- [5]. N.M. Tri (1998), *On Grushin's equation*, Mat. Zametki, 63, 95-105.
- [6]. M. Willem (1996), *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston.

### AUTHOR INFORMATION

Nguyen Thi Diep Huyen

Corresponding author: diephuyendhsaodo@gmail.com

Sao Do University.