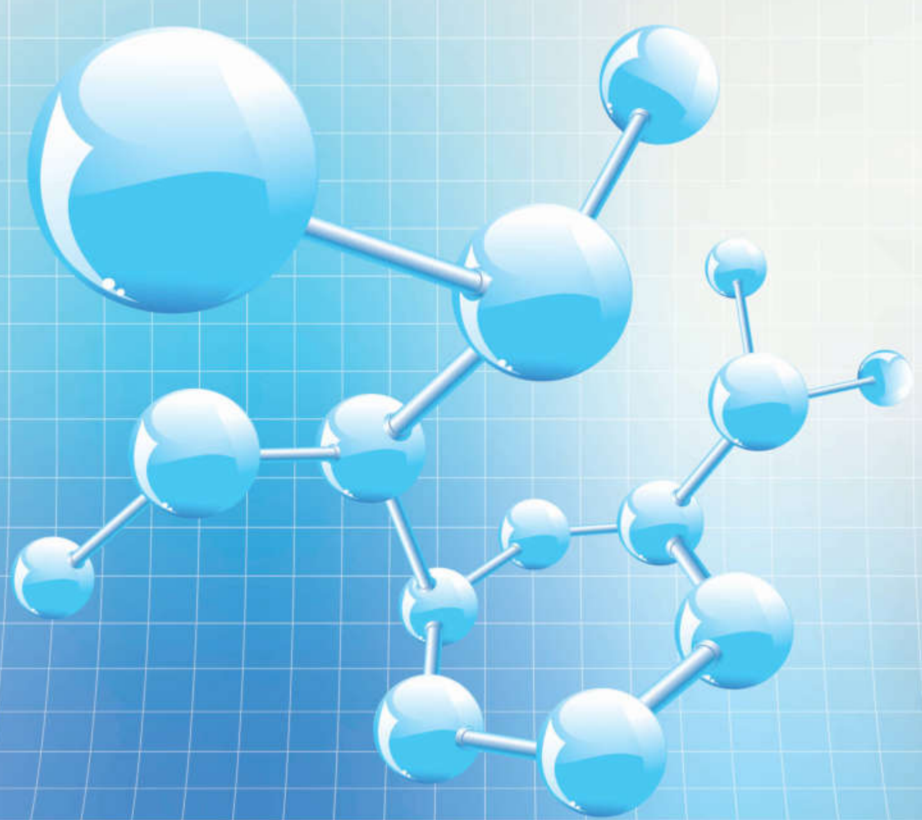
Tạp chí NGHIÊN CỨU KHOA HỌC ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

SCIENTIFIC JOURNAL - SAO DO UNIVERSITY

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X



Số 2 (85)
2024

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 2(85) 2024

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 2(85) 2024

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

CONTENTS

No 2(85) 2024

TITLE FOR ELECTRICITY - ELECTRONICS - AUTOMATION

TITLE FOR MECHANICAL AND DRIVING POWER ENGINEERING

TITLE FOR ECONOMICS

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

CONTENTS

No 2(85) 2024

TITLE FOR ECONOMICS

TITLE FOR MATHEMATICS

TITLE FOR CHEMISTRY AND FOOD TECHNOLOGY

TITLE FOR EDUCATION

TITLE FOR PHILOSOPHY - SOCIOLOGY - POLITICAL SCIENCE

Feedback control of 2D *g*-Navier-Stokes equations by finite determining parameters

Điều khiển phản hồi của phương trình 2D *g*-Navier-Stokes bằng các tham số xác định hữu hạn

Nguyen Viet Tuan*, Nguyen Kieu Hien

**Corresponding Author: nguyentuandhsd@gmail.com*

Sao Do University

Received date: 06/4/2024
Accepted date: 05/6/2024
Published date: 30/6/2024

Abstract

The paper studies the issue of stabilization of solutions to the *g*-Navier-Stokes equations in a two-dimensional bounded domain Ω by finitedimensional feedback control. The designed feedback control scheme are based on the finite number of determining parameters (degrees of freedom), namely, finite number of determining Fourier modes, determining nodes, and determining interpolants and projections.

Keywords: *g-Navier-Stokes equations; feedback controller; stationary solutions; stabilization.*

Tóm tắt

Bài viết nghiên cứu vấn đề ổn định hóa nghiệm của phương trình *g*-Navier-Stokes trong miền hai chiều bị chặn Ω bằng điều khiển phản hồi hữu hạn chiều. Sơ đồ điều khiển phản hồi được thiết kế dựa trên số lượng hữu hạn các tham số xác định (bậc tự do), cụ thể là số hữu hạn của các mode Fourier xác định, các nút xác định, các phép nội suy và phép chiếu xác định.

Từ khóa: *Phương trình g-Navier-Stokes; điều khiển phản hồi; nghiệm dừng; ổn định hóa.*

1. INTRODUCTION

Let $\Omega = [0, L]^2$, $L > 0$, be a domain in $\mathbb{R}^2$ with boundary $\partial\Omega$. We consider the following 2D g-Navier-Stokes equations with periodic boundary conditions.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u = \nabla p + f & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \nabla\cdot(gu) = 0 & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(L,t) & t\in\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Where $u = u_{(x,t)} = (u_1,u_2)$ is the unknown velocity vector, $p = p(x,t)$ is the unknown pressure, $\nu > 0$ is the kinematic viscosity coefficient, u_0 is the initial velocity.

The 2D g-Navier-Stokes equations arise in a natural way when we study the standard 3D Navier-Stokes problem in a 3D thin domain $\Omega_g = \Omega\times(0,g)$ (see [16]). As mentioned in [15,16] good properties of the 2D g-Navier-Stokes equations can lead to an initial study of the 3D Navier-Stokes equations in the thin domain Ω_g. In the last few years, the existence and long-time behavior of solutions in terms of existence of attractors for 2D g-Navier-Stokes equations have been studied extensively in both autonomous and non-autonomous cases (see e.g. [1, 2, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16] and references therein).

In this paper we will study the problem of stability and stabilization for strong stationary solutions to (1). To do this, we assume that the function g satisfies the following assumption:

(G) $g\in W^{1,\infty}(\Omega)$ such that
$0 < m_0 \le g(x) \le M_0$ for all $x = (x_1,x_2)\in\Omega$
and $|\nabla g|_\infty < m_0\lambda_1^{1/2}$

Where $\lambda_1 > 0$ is the first eigenvalue of the g-Stokes operator in Ω (i.e. the operator A is defined in Section 2 below).

The aim of this paper are twofold. First, we shall show the existence, uniqueness and stability of strong stationary solutions to Problem (1). The existence of stationary solutions is proved by using the compactness method. When the viscosity is "larger" than the external force, we show that the stationary solution is unique and is globally exponentially stable. In other cases, i.e. when

Reviewers: 1. Assoc.Prof.Dr. Khuat Van Ninh
2. Assoc.Prof.Dr. Nguyen Van Tuyen

stationary solutions are not unique and unstable, we show that any stationary solution to 2D g-Navier-Stokes equations can be exponentially stabilized by using an interpolant operator as feedback controllers. Here the feedback control scheme only uses finitely many of observables and controllers, such as finite number of determining Fourier modes, determining nodes, and determining interpolants and projections (see, e.g., [3]) for the theory of such determining functionals.

This paper is organized as follows. In Section 2, for convenience of the reader, we recall some results on function spaces and operators related to 2D g-Navier-Stokes equations which will be used. We also show the existence, uniqueness and exponential stability of strong stationary solutions to 2D g-Navier-Stokes equations. In the last section, we show that any unstable stationary solution to g-Navier-Stokes equations can be exponentially stabilizable by using finite-dimensional feedback control.

2. PRELIMINARY RESULTS

Let $\mathbb{L}^2(\Omega,g)=(L^2(\Omega))^2$ and $\mathbb{H}_0^1(\Omega,g)=(H_0^1(\Omega))^2$ be endowed, respectively, with the inner products

$$(u;\ v)_g=\int_\Omega u\cdot vg dx,\ u,v\in\mathbb{L}^2(\Omega,g)$$

and

$$((u;v))_g=\int_\Omega\sum_{j=1}^2\nabla u_j\cdot\nabla v_j g dx$$

$$u=(u_1,u_2),v=(v_1,v_2)\in\mathbb{H}_0^1(\Omega,g)$$

and norms $|u|^2=(u,u)_g$, $\|u\|^2=((u,u))_g$. Thanks to assumption (**G**), the norms $|.|$ and $\|.\|$ are equivalent to the usual ones in $(L^2(\Omega))^2$ and in $(H_0^1(\Omega))^2$. Let

$$\mathcal{V}=\{u\in(C_0^\infty(\Omega))^2:\nabla\cdot(gu)=0\}.$$

Denote by H_g the closure of $\mathcal{V}$ in $\mathbb{L}^2(\Omega,g)$, and by V_g the closure of $\mathcal{V}$ in $\mathbb{H}_0^1(\Omega,g)$. It follows that $V_g\subset H_g\equiv H_g'\subset V_g'$, where the injections are dense and continuous. We will use $\|.\|_*$ for the norm in V_g' and $\|.\|_*$ for duality pairing between V_g and V_g'. We define the g-Stokes operator A:$V_g\to V_g'$ by

$$\langle Au,v\rangle=((u,v))_g,\ \text{for all } u,v\in V_g.$$

Then $A=-P_g\Delta$ and $D(A)=H^2(\Omega,g)\cap V_g$.

Where P_g is the ortho-projector from $\mathbb{L}^2(\Omega,g)$ onto H_g.

We also define the operator B:$V_g\times V_g\to V_g'$ by

$(B(u,v),w)=b(u,v,w)$, for all $u,v,w\in V_g$.

Where

$$b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^2\int_\Omega u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j g dx.$$

It is easy to check that if $u, v, w\in V_g$, then.

$(b(u,v,w)=-b(u,w,v),\ b(u,v,v)=0.$

In the case of periodic boundary conditions the bilinear term possesses the additional orthogonality property (see [16]):

$$b(u,u,Au)=0,\quad\forall u\in D(A)\tag{2}$$

Furthermore, we define C: $V_g\to H_g$ by:

$$(Cu,v)_g=((\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla)u,v)_g=b(\frac{\nabla g}{g},u,v),\quad\forall v\in V_g.$$

Since.

$$-\frac{1}{g}(\nabla\cdot g\nabla)u=-\Delta u-(\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla)u,$$

We have.

$$(-\Delta u,v)_g=((u,v))_g+((\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla)u,v)_g$$

$$=(Au,v)_g+((\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla)u,v)_g,\forall u,v\in V_g.$$

In what follows, we will frequently use the following inequalities:

Cauchy's inequality.

$$ab\le\varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon},\quad\text{for all } a,b,\varepsilon>0.$$

Young's inequality.

$$ab\le\varepsilon a^p+\frac{1}{(\varepsilon p)^{q/p}q}b^q,\quad\text{for all } a,b,\varepsilon>0,$$

With:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,1<p,q<+\infty.$$

We recall some known results which will be used in the paper.

Lemma 1 ([1]). If $n=2$, then.

$$|b(u,v,w)|\le\begin{cases}c_1|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\||w|^{1/2}\|w\|^{1/2} & \forall u,v,w\in V_g\\ c_2|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\|^{1/2}|Av|^{1/2}|w| & \forall u\in V_g,v\in D(A),w\in H_g\\ c_3|u|^{1/2}|Au|^{1/2}\|v\||w| & \forall u\in D(A),v\in V_g,w\in H_g\\ c_4|u|\|v\||w|^{1/2}|Aw|^{1/2} & \forall u\in H_g,v\in V_g,w\in D(A)\end{cases}$$

Where: c_i, $i=1,...,4$, are appropriate constants.

Lemma 2 ([2]).

Let $u \in L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V_g)$, then the function Bu defined by:

$(Bu(t),v)g = b(u(t),u(t),v)$

$\forall v \in H_g$, a.e. $t \in [0,T]$

Belongs to $L^4(0,T;H_g)$, therefore also belongs to $L^2(0,T;H_g)$.

Lemma 3 ([4]). Let $u \in L^2(0,T;H_g)$, then the function Cu defined by:

$$(Cu(t),v)_g = ((\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla)u,v)_g = b(\frac{\nabla g}{g},u,v), \forall v \in V_g$$

Belongs to $L^2(0,T;H_g)$ and hence also belongs to $L^2(0,T;V'_g)$. Moreover,

$$|Cu(t)| \le \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\cdot\|u(t)\|, \text{ for a.e. } t\in(0,T),$$
$$\|Cu(t)\|_* \le \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\cdot\|u(t)\|, \text{ for a.e. } t\in(0,T)$$

Definition 1. Let $f \in H_g$ be given. A strong stationary solution to problem (1) is an element $u^* \in D(A)$ such that.

$$\nu Au^* + \nu Cu^* + B(u^*,u^*) = f \text{ in } H_g \tag{3}$$

We have the following result.

Theorem 1 ([15]). If $f \in H_g$, then problem admits at least one strong stationary solution u^* satisfying.

$$\|u^*\| \le \frac{1}{\lambda_1^{1/2}\nu\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)}|f| \tag{4}$$

Moreover, if the following condition holds.

$$\nu^2\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)^2 > \frac{c_1|f|}{\lambda_1} \tag{5}$$

Where: c_1 is the constant in Lemma 1, then the strong stationary solution to (1) is unique and globally exponentially stable.

3. STABILIZATION OF THE 2D g-NAVIER-STOKES EQUATION BY USING AN INTERPOLANT OPERATOR AS FEEDBACK CONTROLLERS

Let u^* be a strong stationary solution to problem (1). From the results of Theorem, it is known that if condition (5) does not hold, that is, when.

$$\nu^2\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)^2 \le \frac{c_1|f|}{\lambda_1} \tag{6}$$

Then problem (1) may have more than one stationary solution and thus the solution u^* may be unstable. In this section, we will stabilize the solution u^* by using an interpolant operator as feedback controllers.

We consider the following controlled 2D g-Navier-Stokes equations with interpolant operator I_h:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p \\ = -\mu I_h(u-u^*) + f \text{ in } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \nabla\cdot(gu) = 0 \qquad \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(L,t) \qquad t\in\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0 \qquad \text{in } \Omega \end{cases}$$

Where: $f \in H_g$ is given.

We will consider two cases of I_h which were introduced in [3] to stabilize the stationary solution u^* when the stability condition (5) does not hold. We consider interpolant observables given by linear interpolants I_h: $D(A) \to H_g$, that satisfy the following approximation property:

$$|\varphi - I_h(\varphi)|^2 \le \frac{1}{2}c_0^2h^2\|\varphi\|^2 + \frac{1}{4}c_0^4h^4|A\varphi|^2 \quad \forall\varphi\in D(A), \tag{7}$$

For some positive constant $c_0>0$.

Our main result is the following:

Theorem 2. Let $f \in H_g$ and u^* be any strong stationary solution to (1) as in Theorem 1. Suppose I_h satisfies (8), μ and h be positive parameters such that $\mu c_0^2h^2 < \nu$ and.

$$(Cu(t),v)_g = ((\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla)u,v)_g = b(\frac{\nabla g}{g},u,v), \forall v\in V_g \tag{8}$$

Where: c_2, c_3 are the constants in Lemma 1.

Then for each $u_0 \in V_g$, there exists a solution u to system (7) satisfies for any $T>0$,

$$u \in C([0,T];V_g)\cap L^2(0,T;D(A))$$
$$\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H_g)$$

and

$$\|u(t)-u^*\| \le \|u_0-u^*\|e^{-\lambda t}, \forall t\ge 0 \tag{9}$$

Where:

$$\lambda = \mu + \frac{\nu\lambda_1}{4} - 4\nu\frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} - \frac{216c^4|f|^4}{\nu^7\lambda_1^3\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)^4}$$

Proof. We set $z = u - u^*$ and rewrite system (7) as

$$\begin{cases} z' + \nu Az + \nu Cz + Bz + B_0 z + \mu P_g I_h(z) = 0 \\ z(0) = u(0) - u^* =: z_0 \end{cases} \tag{10}$$

Where: P_g is the orthogonal projector from $\mathbb{L}^2(\Omega, g)$ onto H_g and $B_0 z$ is defined by:

$$(B_0 z, w)_g = b(u^*, z, w) + b(z, u^*, w), \forall w \in V_g.$$

(i) Existence. Let $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ be a basis of $D(A)$ consisting of eigenfunctions of the g-Stokes operator A. First, we use the n-dimensional Galerkin approximation $z_n = \sum_{j=1}^{n} z_{nj}(t) w_j$. The equation for z_n is.

$$\begin{cases} z_n' + \nu Az_n + \nu P_n Cz_n + P_n Bz_n + \\ P_n B_0 z_n + \mu P_n P_g I_h(z_n) = 0 \\ z_n(0) = P_n z_0 \end{cases} \tag{11}$$

Where: $P_n z = \sum_{j=1}^{n} (z, w_j) w_j$ Taking the inner product of (12) with Az_n and noticing that $P_n z_n = z_n$, we have:

$$\begin{aligned} &(z_n', Az_n)_g + \nu(Az_n, Az_n)_g + \nu(Cz_n, Az_n)_g \\ &+ (Bz_n, Az_n)_g + (B_0 z_n, z_n)_g \\ &+ \mu(I_h(z_n), Az_n)_g = 0 \end{aligned}$$

as

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| z_n \|^2 + \nu |Az_n|^2 = -\nu(Cz_n, Az_n)_g \\ &-b\left(u^*, z_n, Az_n\right) - b\left(z_n, u^*, Az_n\right) \\ &-\mu(I_h(z_n), Az_n)_g \end{aligned}$$

Since $(Bz_n, Az_n)_g = b(z_n, z_n, Az_n) = 0$.

By the Cauchy inequality and using (8) we obtain.

$$\begin{aligned} &-\mu(I_h(z_n), Az_n)_g \\ &= \mu(z_n - I_h(z_n), Az_n)_g - \mu \| z_n \|^2 \\ &\le \frac{\mu^2}{\nu} |z - I_h(z_n)|^2 + \frac{\nu}{4} |Az_n|^2 - \mu \| z_n \|^2 \\ &\le \frac{\mu^2 c_0^2 h^2}{2\nu} \| z_n \|^2 + \frac{\mu^2 c_0^4 h^4}{4\nu} |Az_n|^2 \\ &+ \frac{\nu}{4} |Az_n|^2 - \mu \| z_n \|^2 \\ &\le \frac{\nu}{2} |Az_n|^2 - \frac{\mu}{2} \| z_n \|^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Where we used the assumption $\mu c_0^2 h^2 \le \nu$. Using Lemmas 1 and 3, we see that.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| z_n \|^2 + \nu |Az_n(t)|^2 \le \\ &\nu \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0} \| z_n \| |Az_n| \\ &+ c_2 |u^*|^{1/2} \| u^* \|^{1/2} \| z_n \|^{1/2} |Az_n|^{3/2} + \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| z_n \|^2 + \nu |Az_n(t)|^2 \\ &\le \nu \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0} \| z_n \| |Az_n| \\ &+ c_2 |u^*|^{1/2} \| u^* \|^{1/2} \| z_n \|^{1/2} |Az_n|^{3/2} + \\ &c_3 |z_n|^{1/2} \| u^* \| |Az_n|^{3/2} + \frac{\nu}{2} |Az_n|^2 \\ &-\frac{\mu}{2} \| z_n \|^2 \\ &\le \nu \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0} \| z_n \| |Az_n| \\ &+ c |u^*|^{1/2} \| u^* \|^{1/2} \| z_n \|^{1/2} |Az_n|^{3/2} \\ &+ c |z_n|^{1/2} \| u^* \| |Az_n|^{3/2} + \frac{\nu}{2} |Az_n|^2 - \frac{\mu}{2} \| z_n \|^2 \\ &\le \frac{\nu}{8} |Az_n|^2 + 2\nu \frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} \| z_n \|^2 + \frac{\nu}{8} |Az_n|^2 + \\ &+ \frac{54c^4}{\nu^3} |u^*|^2 \| u^* \|^2 \| z_n \|^2 + \frac{\nu}{8} |Az_n|^2 \\ &+ \frac{54c^4}{\nu^3} \| u^* \|^4 \| z_n \|^2 + \frac{\nu}{2} |Az_n|^2 - \frac{\mu}{2} \| z_n \|^2 \end{aligned}$$

Thanks to the Young inequality. This implies.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| z_n \|^2 + \frac{\nu}{2} |Az_n|^2 \le 2\nu \frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} \| z_n \|^2 \\ &+ \frac{108c^4}{\nu^3 \lambda_1} \| u^* \|^4 \| z_n \|^2 - \frac{\mu}{2} \| z_n \|^2 \end{aligned}$$

So that

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\| z_n \|^2 + \frac{\nu}{4} |Az_n|^2 \le \\ &\left(-\mu + 4\nu \frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} + \frac{216c^4}{\nu^3 \lambda_1} \| u^* \|^4 \right) \| z_n \|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Intergrating both sides between 0 and t yields.

$$\begin{aligned} &\| z_n(t) \|^2 + \frac{\nu}{4} \int_0^t |Az_n(s)|^2 \, ds \\ &\le \left(-\mu + 4\nu \frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} + \frac{216c^4}{\nu^3 \lambda_1} \| u^* \|^4 \right) \times \end{aligned}$$

$$\times\int_0^t \| z_n(s)\|^2\, ds + \| z_n(0)\|^2$$

$$\leq \left(-\mu + 4\nu\frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} + \frac{216c^4}{\nu^3\lambda_1}\| u^*\|^4\right)\times$$

$$\times\int_0^t \| z_n(s)\|^2\, ds + \| z(0)\|^2 .$$

Rewriting this as,

$$\| z_n(t)\|^2 + \frac{\nu}{4}\int_0^t |Az_n(s)|^2\, ds$$

$$+\left(\mu - 4\nu\frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} - \frac{216c^4}{\nu^3\lambda_1}\| u^*\|^4\right)\times$$

$$\times\int_0^t \| z_n(s)\|^2\, ds \leq \| z(0)\|^2$$

and using (4) we obtain.

$$\| z_n(t)\|^2 + \frac{\nu}{4}\int_0^t |Az_n(s)|^2\, ds$$

$$+\left[\mu - 4\nu\frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} - \frac{216c^4|f|^4}{\nu^7\lambda_1^3\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)^4}\right]\times \tag{14}$$

$$\times\int_0^t \| z_n(s)\|^2\, ds \leq \| z(0)\|^2 .$$

Because of (9), the third term on the left - hand side of (15) is positive and this implies that $\{Z_n\}$ is bounded in.

$L^\infty(0,T;V_g)\cap L^2(0,T;D(A))$.

By applying the arguments as while the proof of Theorem 2, we obtain.

$$\frac{dz}{dt} + \nu Az + \nu Cz + Bz + B_0 z + \mu P_g I_h(z) = 0 \tag{15}$$

in $L^2(0,T;H_g)$

and $z(0)=z_0$. This proves that z is a solution of (11).(ii) Stabilization. Take the inner product of (12) with Az gives.

$$\frac{d}{dt}(z,Az)_g + \nu(Az,Az)_g =$$

$$-\nu(Cz,Az)_g - b(z,z,Az) - b(z,u^*,Az)$$

$$-b(u^*,z,Az) - \mu(I_h(z),Az)_g .$$

Thus, using (2), we have.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| z\|^2 + \nu|Az|^2 = -\nu(Cz,Az)_g$$

$$-b(z,u^*,Az) - b(u^*,z,Az) - \mu(I_h(z),Az)_g$$

Hence from (14), we obtain.

$$\frac{d}{dt}\| z\|^2 + \frac{\nu\lambda_1}{4}\| z\|^2 \leq$$

$$\left(-\mu + 4\nu\frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} + \frac{216c^4}{\nu^3\lambda_1}\| u^*\|^4\right)\| z\|^2$$

and so

$$\frac{d}{dt}\| z\|^2 \leq \left(-\mu - \frac{\nu\lambda_1}{4} + 4\nu\frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2}\right)\| z\|^2$$

$$+\frac{216c^4|f|^4}{\nu^7\lambda_1^3\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)^4}\| z\|^2 .$$

Therefore, by virtue of Gronwall's inequality and assumption (9), yields.

$$\| z\|^2 \leq e^{-\lambda t}\| z(0)\|^2$$

Where:

$$\lambda = \mu + \frac{\nu\lambda_1}{4} - 4\nu\frac{|\nabla g|_\infty^2}{m_0^2} - \frac{216c^4|f|^4}{\nu^7\lambda_1^3\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)^4}$$

This completes the proof of the theorem.

ACKNOWLEDGMENTS

This research is funded by Sao Do University under Grant Number 08.KHCN/23-24.

REFERENCES

[1]. C.T. Anh and D.T. Quyet (2012), *Long-time behavior for 2D non-autonomous g-Navier-Stokes equations*, Ann. Pol. Math. 103, 277-302.

[2]. C.T. Anh, D.T. Quyet and D.T. Tinh (2013), *Existence and finite time approximation of strong solutions of the 2D g-Navier-Stokes equations*, Acta Math. Vietnam. 28, 413-428.

[3]. A. Azouani, E. Olson and E.S. Titi (2014), *Continuous data assimilation using general interpolant observables J*. Nonlinear Sci. 24, 277-304.

[4]. H. Bae and J. Roh (2004), *Existence of solutions of the g-Navier-Stokes equations*, Taiwanese J. Math. 8, 85-102.

[5]. S.C. Brenner and R. Scott (2007), *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, Berlin, Non-autonomous *g*-Navier-Stokes.

[6]. J. Jiang and Y. Hou (2009), *The global attractor of g-Navier-Stokes equations with linear dampness on* $\mathbb{R}^2$, Appl. Math. Comp. 215, 1068-1076.

[7]. J. Jiang and Y. Hou (2010), *Pullback attractor o 2D equations on some bounded domains*, App. Math. Mech. -Engl. Ed. 31 697-708.

[8]. J. Jiang, Y. Hou and X. Wang (2011), *Pullback attractor of 2D nonautonomous g-Navier-Stokes equations with linear dampness*, Appl. Math. Mech., Engl. Ed. 32, 151-166.

[9]. J. Jiang and X. Wang (2013), *Global attractor of 2D autonomous g-Navier-Stokes equations*, Appl. Math. Mech. (English Ed.) 34, 385-394.

[10]. D.A. Jones and E.S. Titi (1992), D*etermining finit-e volume elements for the 2D Navier-Stokes equations*, Physica D. 60, 165-174.

[11]. D.A. Jones and E.S. Titi (1993), *Upper bounds on the number of determining modes, nodes and volume elements for the Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. 42, 875-887.

[12]. M. Kwak, H. Kwean and J. Roh (2006), The dime-nsion of attractor of the 2D *g*-Navier- Stokes equations, *J. Math. Anal. Appl.* 315, 436-461.

[13]. [13] H. Kwean (2012), *The* H^{-1}*-compact global attra-ctor of two-dimensional g-Navier-Stokes equations*, Far East J. Dyn. Syst. 18, 1-20.

[14]. H. Kwean and J. Roh (2005), *The global attractor of the 2D g-Navier-Stokes equations on some unbounded domains*, Commun. Korean Math. Soc. 20, 731-749.

[15]. D.T. Quyet (2014), *Asymptotic behavior of strong solutions to 2D g-Navier-Stokes equations, Commun,* Korean Math. Soc. 29, 505-518.

[16]. J.C. Robinson (2001), *Introduction to Infinite-Dimensional Dynamical Systems,* Cambridge University Press, Cambridge.

THÔNG TIN TÁC GIẢ

Nguyễn Viết Tuân*, Nguyễn Kiều Hiên

**Tác giả liên hệ: nguyentuandhsd@gmail.com*

Trường Đại học Sao Đỏ.

THỂ LỆ GỬI BÀI
TẠP CHÍ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ (P. ISSN 1859-4190, E. ISSN 2815-553X), thường xuyên công bố kết quả, công trình nghiên cứu khoa học và công nghệ của các nhà khoa học, cán bộ, giảng viên, nghiên cứu sinh, học viên cao học, sinh viên ở trong và ngoài nước.

1. Tạp chí xuất bản 01 số/quý bằng hai ngôn ngữ tiếng Việt và tiếng Anh. Tạp chí nhận đăng các bài báo khoa học thuộc các lĩnh vực: Điện - Điện tử - Tự động hóa; Cơ khí - Động lực; Kinh tế; Triết học - Xã hội học - Chính trị học; Các lĩnh vực khác gồm: Công nghệ thông tin; Hóa học - Công nghệ thực phẩm; Ngôn ngữ học; Toán học; Vật lý; Văn hóa - Nghệ thuật - Thể dục thể thao...
2. Bài nhận đăng là những công trình nghiên cứu khoa học chưa công bố trong bất kỳ ấn phẩm khoa học nào.
3. Tòa soạn chỉ nhận bài báo gửi online trên website http://tapchikhcn.saodo.edu.vn. Bài báo gửi về toà soạn dưới dạng file điện tử (*.doc *.docx và *.pdf); cuối bài báo, tác giả ghi rõ thông tin địa chỉ liên hệ, số điện thoại, email và cập nhật thông tin trên website. Bài báo phải được trình bày đúng định dạng, rõ ràng; Trường hợp bài báo phải chỉnh sửa theo thể lệ hoặc theo yêu cầu của Phản biện thì tác giả sẽ cập nhật trên website. Người phản biện sẽ do tòa soạn mời. Tòa soạn không gửi lại bài nếu không được đăng.
4. Các công trình thuộc đề tài nghiên cứu có Cơ quan quản lý cần kèm theo giấy phép cho công bố của cơ quan (Tên đề tài, mã số, tên chủ nhiệm đề tài, cấp quản lý,...).
5. Tên bài báo trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 14, in đậm, căn giữa.
6. Tên tác giả (không ghi học hàm, học vị), font Arial, cỡ chữ 10, in đậm, căn lề phải; cơ quan công tác của các tác giả, font Arial, cỡ chữ 9, in nghiêng, căn lề phải.
7. Chữ "Tóm tắt" in đậm, font Arial, cỡ chữ 10; Nội dung tóm tắt của bài báo không quá 10 dòng, trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 10, in thường.
8. Chữ "Từ khóa" in đậm, nghiêng, font Arial, cỡ chữ 10; Có từ 03÷05 từ khóa, font Arial, cỡ chữ 10, in nghiêng, ngăn cách nhau bởi dấu chấm phẩy, cuối cùng là dấu chấm.
9. Nội dung bài báo viết bằng tiếng Việt hoặc tiếng Anh; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Việt: Tiêu đề tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Tóm tắt tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Từ khóa tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Anh: Tiêu đề tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Tóm tắt tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Từ khóa tiếng Anh trước, tiếng Việt sau.
10. Bài báo được đánh máy trên khổ giấy A4 (21 × 29,7cm) có độ dài không quá 8 trang, font Arial, cỡ chữ 10, giãn dòng At least 12pt, Before 3pt, After 3pt; căn lề trên 2.5cm, dưới 2.5cm, trái 3cm, phải 2cm; hình vẽ phải rõ ràng, đủ nét và được định dạng dưới dạng file ảnh (*.jpg); Phương trình, công thức phải soạn thảo bằng Mathtype hoặc Equation; Phần nội dung bài báo được chia thành 02 cột, khoảng cách cột là 1cm; Trong trường hợp hình vẽ, hình ảnh có kích thước lớn, bảng biểu có độ rộng lớn hoặc công thức, phương trình dài thì cho phép trình bày dưới dạng 01 cột.
11. Tài liệu tham khảo được sắp xếp theo thứ tự tài liệu được trích dẫn trong bài báo.

    - Nếu là sách/luận án: Tên tác giả (năm), Tên sách/luận án/luận văn, Nhà xuất bản/Trường/Viện, lần xuất bản/tái bản.

    - Nếu là bài báo/báo cáo khoa học: Tên tác giả (năm), Tên bài báo/báo cáo, Tạp chí/Hội nghị/Hội thảo, Tập/Kỷ yếu, số, trang.

    - Nếu là trang web: Phải trích dẫn đầy đủ tên website và đường link, ngày cập nhật.
12. Định dạng mẫu bài báo tham khảo tại địa chỉ http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/news/detail/198/format_paper

    Bài báo sau khi xuất bản sẽ được công bố trên http://tapchikhcn.saodo.edu.vn.

THÔNG TIN LIÊN HỆ:

Ban Biên tập Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ

Phòng 203, Tầng 2, Nhà B1, Trường Đại học Sao Đỏ.

Địa chỉ: Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.

Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn

Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

Địa chỉ:
- **Số 1:** Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Số 2:** Số 72, đường Nguyễn Thái Học, phường Thái Học, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Điện thoại:** (0220) 3882 269 **Fax:** (0220) 3882 921 **Website:** http://saodo.edu.vn **Email:** info@saodo.edu.vn

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Số 2 (85)
2024

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.