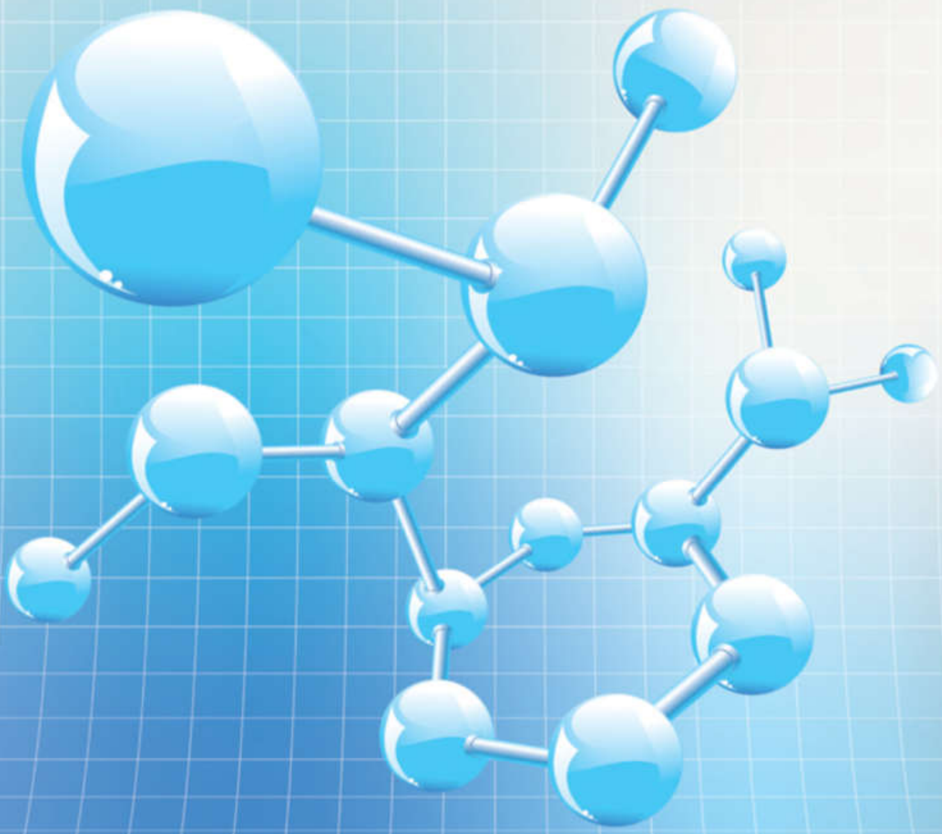
Tạp chí
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ
SCIENTIFIC JOURNAL - SAO DO UNIVERSITY

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X



Số 3 (82)
2023

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 3(82) 2023

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 3(82) 2023

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

CONTENTS

No 3(82) 2023

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 3(82) 2023

Bất đẳng thức tích chập của phép biến đổi Fourier cosine và Laplace với hàm trọng

Convolution inequalities of the Fourier cosine transform and the Laplace with a weight function

Nguyễn Kiều Hiên

Tác giả liên hệ: nguyenkieuhien@gmail.com

Trường Đại học Sao Đỏ

Ngày nhận bài: 06/8/2023
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 30/9/2023
Ngày chấp nhận đăng: 02/10/2023

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bất đẳng thức tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi Fourier cosine và phép biến đổi Laplace với hàm trọng, đẳng thức nhân tử hóa có chứa hai phép biến đổi tích phân khác nhau. Thiết lập được các đẳng thức nhân tử hóa, đẳng thức kiểu Parseval và đánh giá chuẩn tích chập của phép biến đổi Fourier cosine và Laplace với hàm trọng, sử dụng trong đánh giá nghiệm của phương trình vi - tích phân trong bài toán phân giải tín hiệu xử lý thông tin.

Từ khóa: *Biến đổi Fourier; biến đổi Laplace; đẳng thức Parseval; tích chập suy rộng.*

Abstract:

In this paper, we research generalized convolution inequalities related to the Fourier cosine transform and the Laplace transform with a weight function, the factorization equality contains two different integral transforms. Establish the factorization equalitys, Parseval type equalitys and convolution standard evaluation of the Fourier cosine transforms and Laplace with a weight function, used in evaluating solutions of differential - integral equations in solving problems information handling.

Keywords: *Fourier transform; Laplace transform; Parseval equality; generalized convolution.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Năm 1951, Sneddon I.N. xây dựng được một tích chập mà trong đẳng thức nhân tử hóa có chứa hai phép biến đổi tích phân khác nhau tham gia. Đó là tích chập suy rộng đối với hai phép biến đổi Fourier cosine và Laplace. Các phép biến đổi tích phân kiểu tích chập suy rộng Fourier cosine và Laplace với hàm trọng vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Việc nghiên cứu các tích chập với hàm trọng đã mở ra triển vọng phát triển thêm hướng nghiên cứu về lý thuyết tích chập. Năm 1967 Kakichev V.A. đưa ra định nghĩa tích chập với hàm trọng của hai hàm đối với một phép biến đổi tích phân dựa trên đẳng thức nhân tử hóa. Với kỹ thuật đó mà nhiều tích chập có hàm trọng được tìm ra, tiêu biểu tích chập với hàm trọng $\gamma(y) = \sin y$. Việc nghiên cứu các tích chập và các phép biến đổi tích phân có ý nghĩa quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Nhờ đó, các phép toán Giải tích phức tạp được đơn giản hóa thành phép tính Đại số. Vì vậy, nó đặc biệt hữu ích trong việc giải các bài toán trong lý thuyết mạch, bài toán xử lý hình ảnh và xử lý tín hiệu truyền thông.

Người phản biện: 1. PGS.TS. Khuất Văn Ninh
2. TS. Nguyễn Viết Tuân

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng một số tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace với hàm trọng. Nghiên cứu các tính chất toán tử của các tích chập suy rộng với hàm trọng, sử dụng để đánh giá nghiệm của phương trình vi-tích phân trong bài toán phân giải tín hiệu xử lý thông tin.

2. TÍCH CHẬP SUY RỘNG

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau đây:

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}.$

Cho $L_p(\mathbb{R}_+), 1 \le p < \infty$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho.

$$\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx < +\infty$$

Trong đó, chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

Cho $L_p(\mathbb{R}_+, \rho), \rho > 0, 1 \le p < \infty$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx < +\infty$$

trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+,\rho)}=\left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,\rho(x)dx\right)^{1/p}$$

Đặc biệt, khi $\rho(x)=x^\alpha e^{-\beta x}$ thì ta nhận được không gian hàm hai tham số α,β và ký hiệu $L_p^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$.

Cho $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x)|<+\infty$$

Trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x)|$$

Cho $C_0(\mathbb{R}_+)$ là không gian các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}_+$ và triệt tiêu ở ∞.

$$H(\mathbb{R}_+)=\{f(x):(Lf)(y)\in L_2(\mathbb{R}_+)\}$$

L là phép biến đổi Laplace

$$(Lf)(y)=\int_0^\infty f(x)e^{-yx}dx,\operatorname{Re}y>0$$

F_c là phép biến đổi Fourier cosine

$$(F_cf)(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xy dx,\ y>0$$

Sau đây, ta đưa ra khái niệm tích chập của hai hàm khả tích trên $\mathbb{R}$ nhằm xác định quy tắc lấy tích chập giữa chúng.

Định nghĩa 1 ([1]). Cho f,k là các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}$. Nếu tích phân $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)k(y)dy$ xác định với hầu hết $x\in\mathbb{R}$ (nghĩa là tập các giá trị $x\in\mathbb{R}$ để tích phân trên không tồn tại là tập có độ đo không) và hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}$ biến x thành $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)k(y)dy$ được gọi là tích chập của hàm f và hàm k, ký hiệu là $f*k$. Như vậy:

$$(f*k)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)k(y)dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}} f(y)k(x-y)dy.$$

Ta gọi $f*k$ là tích chập của hàm f và k.

Tiếp theo, ta đưa ra khái niệm tích chập suy rộng với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace.

Định nghĩa 2 ([2]). Tích chập suy rộng của hai hàm f và k đối với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace được định nghĩa như sau:

$$(f*k)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta(x,u,v)f(u)k(v)dudv \qquad (1)$$

trong đó

$$\theta(x,u,v)=\frac{v}{v^2+(x-u)^2}+\frac{v}{v^2+(x+u)^2},x>0 \qquad (2)$$

Ta gọi A_c là không gian ảnh của $L_1(\mathbb{R}_+)$ thông qua phép biến đổi Fourier cosine F_c. Với chuẩn

$$\|f\|_{A_c}=\|F_cf\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$$

thì không gian đó là một đại số Bannach, nghĩa là nếu $f(x)k(x)\in A_c$ thì

$f(x)k(x)\in A_c$

và thỏa mãn

$$\|fk\|_{A_c}\le\|f\|_{A_c}\|k\|_{A_c}$$

Tiếp theo, ta đưa ra khái niệm phép biến đổi tích phân liên quan đến tích chập suy rộng Fourier cosine - Laplace xác định bởi (1).

Định nghĩa 3 ([6]). Phép biến đổi tích phân kiểu tích chập suy rộng Fourier cosine - Laplace T_k. Phép biến đổi tích phân được xác định có dạng như sau:

$$f(x)\mapsto g(x)=(T_kf)(x)$$
$$=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)(f*k)(x),x>0 \qquad (3)$$

Trong đó k là nhân của phép biến đổi.

Tiếp theo, ta đưa ra khái niệm các tích chập suy rộng với hàm trọng $\gamma(y)=-\sin y$ và $\gamma(y)=-e^{-\gamma y}\sin y$ đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine - Laplace.

Định nghĩa 4 ([7]). Tích chập suy rộng với hàm trọng $\gamma(y)=-\sin y$ của hai hàm $f(x)$ và $k(x)$ đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine - Laplace được định nghĩa như sau:

$$\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\big[\theta_2(x-1,u,v)-\theta_2(x+1,u,v)\big]f(u)k(v)dudv \qquad (4)$$

Với $\theta_2(x,u,v)$ được xác định bởi (2).

Định nghĩa 5 ([7]). Tích chập suy rộng với hàm trọng $\gamma(y)=-e^{-\gamma y}\sin y\ \ (\gamma>0)$ của hai hàm $f(x)$ và $k(x)$ đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine - Laplace được định nghĩa như sau:

$$\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\big[\theta_2(x-1,u,v+\gamma)-\theta_2(x+1,u,v+\gamma)\big]f(u)k(v)dudv \qquad (5)$$

Với $\theta_2(x,u,v)$ được xác định bởi (2).

Định lý sau đây cho ta đánh giá chuẩn của tích chập Fourier trong không gian hàm $L_r(\mathbb{R})$.

Định lý 1 ([3]). Cho hàm $f\in L_p(\mathbb{R}_+),\ k\in L_q(\mathbb{R}_+)$ trong đó $1\le p,q\le\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge1$. Thì tích chập $f*k\in L_r(\mathbb{R}_+)$, ở đây $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$. Đồng thời, ta có đánh giá.

$$\|f*k\|_r \le \|f\|_p \|k\|_q \tag{6}$$

Định lý sau đây cho ta sự tồn tại đẳng thức nhân tử hóa của tích chập trong không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Định lý 2 ([1]). Giả sử các hàm $f(x)$ và $k(x)$ thuộc không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, ta có $(f*k)(x)\in A_c$ và thỏa mãn đẳng thức kiểu Parseval.

$$(f*k)(x) = F_c\big[(F_c f)(y)(Lk)(y)\big](x), \forall x>0 \tag{7}$$

Hơn nữa, ta cũng nhận được đẳng thức nhân tử hóa

$$F(f*k)(x) = (F_c f)(y)(Lk)(y), \forall y>0 \tag{8}$$

Để nghiên cứu tích chập $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)$ trong một số không gian hàm cụ thể ta xét các định lý sau.

Định lý 3 ([1]). Giả sử $f(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in H(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, tích chập suy rộng $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ thuộc $L_2(\mathbb{R}_+)$ thỏa mãn đẳng thức kiểu Parseval.

$$\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x) = F_c\big[-\sin y (F_s f)(Lk)\big](x), \forall x>0 \tag{9}$$

và đẳng thức nhân tử hóa sau:

$$F_c\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(y) = -\sin y (F_s f)(y)(Lk)(y), \forall y>0$$

Định lý 4 ([1]). Giả sử $f(x)$ và $k(x)$ là hai hàm thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, tích chập suy rộng $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$ và ta có bất đẳng thức chuẩn.

$$\left\|\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \tag{11}$$

Hơn nữa, tích chập suy rộng $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ cũng thuộc $C_0(\mathbb{R}_+)$, thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa.

$$F_c\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(y) = -e^{-\gamma y}\sin y (F_s f)(y)(Lk)(y), \forall y>0 \tag{12}$$

và đẳng thức kiểu Parseval.

$$\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x) = F_c\big[-e^{-\gamma y}\sin y (F_s f)(y) .(Lk)(y)\big](x), \forall x>0 \tag{13}$$

Định lý 5 ([5]). Giả sử rằng $p > 1$, $r \ge 1$, $0 < \beta \le 1$, các hàm $f(x)\in L_p(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó tích chập suy rộng $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ tồn tại, liên tục và bị chặn trong $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$. Hơn nữa, tích chập này thỏa mãn bất đẳng thức chuẩn.

$$\left\|\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \tag{14}$$

Ở đó $C=\left(\dfrac{2}{\pi\gamma}\right)^{1/p}\cdot\beta^{-\frac{\alpha+1}{r}}\cdot\Gamma^{1/r}(\alpha+1)$ với Γ là hàm Gamma.

Ngoài ra, nếu $f(x)\in L_1(\mathbb{R}_+)\cap L_p(\mathbb{R}_+)$ thì tích chập suy rộng $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ thuộc $C_0(\mathbb{R}_+)$, thỏa mãn (12) và (13).

Định lý 6 ([5]). Cho $\alpha > -1, 0 < \beta \le 1$, $p > 1$, $q > 1$, $r \ge 1$ thỏa mãn $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Khi đó, nếu các hàm $f(x)\in L_p(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in L_q\left(\mathbb{R}_+, e^{(q-1)x}\right)$ thì tích chập $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ tồn tại, liên tục và bị chặn trong $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$. Hơn nữa, ta có bất đẳng thức chuẩn.

$$\left\|\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_q\left(\mathbb{R}_+, e^{(q-1)x}\right)} \tag{15}$$

Trong đó $C=\left(\dfrac{1}{\pi\gamma}\right)^{1/q}\cdot\beta^{-\frac{\alpha+1}{r}}\cdot\Gamma^{1/r}(\alpha+1)$.

Ngoài ra, nếu $f(x)\in L_1(\mathbb{R}_+)\cap L_p(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in L_1(\mathbb{R}_+)\cap L_q\left(\mathbb{R}_+, e^{(q-1)x}\right)$ thì tích chập $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ cũng thuộc $C_0(\mathbb{R}_+)$ thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa (12) và đẳng thức kiểu Parseval (13).

Định lý 7 ([2]). Giả sử các hàm $f(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ và $k(x)\in L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó tích chập $(f*k)(x)$ tồn tại, thuộc $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$ $(r\ge 1, \beta\ge 0, \alpha>-1)$ và ta có bất đẳng thức chuẩn.

$$\|(f*k)\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \le \frac{2}{\pi\gamma}\cdot\beta^{-\frac{\alpha+1}{r}}\cdot\Gamma^{1/r}(\alpha+1)\|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \tag{16}$$

Định lý 8 ([4]) (Định lý Young)**.** Giả sử $p,q,r>1$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2$ và $f(x)\in L_p(\mathbb{R}),\, k(x)\in L_q(\mathbb{R})$ $h(x)\in L_r(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có đánh giá.

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(f \underset{F}{*} k\right)(x)\cdot h(x)\,dx\right| \le \| f \|_{L_p(\mathbb{R})} \| k \|_{L_q(\mathbb{R})} \| h \|_{L_r(\mathbb{R})} \tag{17}$$

Nếu các hàm $f(x)$ và $k(x)$ thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$ thì tích chập $(f*k)(x)$ tồn tại, thuộc $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+),\ (r\ge 1,\beta\ge 0,\alpha>-1)$ và ta có bất đẳng thức chuẩn.

$$\left\|(f*k)\right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \le \frac{2}{\pi\gamma}\cdot\beta^{-\frac{\alpha+1}{r}}\cdot\Gamma^{1/r}(\alpha+1)\|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \tag{18}$$

Một hệ quả quan trọng nhận được từ định lý này là bất đẳng thức Young đối với tích chập Fourier. Tuy nhiên, như ta đã biết các bất đẳng thức không còn đúng trong trường hợp $f,k\in L_2(\mathbb{R})$. Saitoh đã khắc phục hạn chế đó bằng cách xét không gian hàm $L_p(\mathbb{R},\rho)$ và nhận được bất đẳng thức đối với tích chập Fourier cho bởi định lý sau.

Định lý 9 ([6]). Với các hàm không triệt tiêu $\rho_j\ (j=1,2)$ ta có bất đẳng thức trong không gian $L_p(\mathbb{R})(p>1)$ đối với tích chập Fourier.

$$\left\|\left((F_1\rho_1)\underset{F}{*}(F_2\rho_2)\right)\left(\rho_1\underset{F}{*}\rho_2\right)^{\frac{1}{p}-1}\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \le \|F_1\|_{L_p(\mathbb{R},|\rho_1|)}\|F_2\|_{L_p(\mathbb{R},|\rho_2|)} \tag{19}$$

thỏa mãn với mọi $F_j\in L_p\left(\mathbb{R},|\rho_j|\right)$.

Trong các bài toán ứng dụng, ta thường xét trường hợp $\rho_2(x)=1, F_2(x)=G(x)$ trong đó $G(x-y)$ là hàm Green nào đó. Khi đó, nếu $\rho\in L_1(\mathbb{R}_+), G\in L_p(\mathbb{R})$ và $F\in L_p(\mathbb{R},|\rho|)$, bất đẳng thức (19) trở thành.

$$\left\|(F\rho)\underset{F}{*}G\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \le \|\rho\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}^{1-\frac{1}{p}}\|G\|_{L_p(\mathbb{R})}\|F\|_{L_p(\mathbb{R},|\rho|)} \tag{20}$$

và $\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\rho(y)G(x-y)\,dy$ dựa vào thông số hàm đầu vào F trong các bài toán ứng dụng.

3. TÍCH CHẬP SUY RỘNG FOURIER COSINE - LAPLACE VỚI HÀM TRỌNG

Ta chứng minh sự tồn tại của tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi Fourier cosine - Laplace với hàm trọng và đánh giá bất đẳng thức chuẩn trong không gian $L_p(\mathbb{R}_+)$ và $L_p(\mathbb{R}_+)$ qua định lý sau.

Định lý 10. Cho $p,q,r>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2$ và giả sử $f(x)\in L_p(\mathbb{R}_+),\, h(x)\in L_r(\mathbb{R}_+)$, $k(x)\in L_q\left(\mathbb{R}_+,(x+\gamma)^{q-1}\right),\ (\gamma>0)$. Khi đó, tích chập suy rộng $\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)$ thỏa mãn.

$$\left|\int_0^{\infty}\left(f\overset{\gamma}{*}k\right)(x)\cdot h(x)\,dx\right| \le \gamma^{\frac{1-q}{q}} \| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \| k \|_{L_q\left(\mathbb{R}_+,(x+\gamma)^{q-1}\right)} \| h \|_{L_r(\mathbb{R}_+)} \tag{21}$$

Chứng minh. Trước hết, ta có đánh giá:

$$\int_0^{\infty}\frac{|\theta_1(x,u,v+\gamma)|\,dv}{v+\gamma} \le 2\int_0^{\infty}\frac{dv}{(v+\gamma)^2} \le 2\int_0^{\infty}\frac{dv}{v^2+\gamma^2}=\frac{\pi}{\gamma} \tag{22}$$

Giả sử p_1,q_1,r_1 tương ứng là các liên hợp mũ của p,q,r, nghĩa là:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}=1,\frac{1}{q}+\frac{1}{q_1}=1,\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}=1$$

Khi đó $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{r_1}=1$. Đặt

$$U(x,u,v)= |g(v)|^{\frac{q}{p_1}}|v+\gamma|^{\frac{q-1}{p_1}}|h(x)|^{\frac{r}{p_1}}\left|\theta_1(x,u,v+\gamma)\right|^{\frac{1}{p_1}}$$

$$V(x,u,v)= |f(u)|^{\frac{p}{q_1}}|h(x)|^{\frac{r}{q_1}}\left|\frac{\theta_1(x,u,v+\gamma)}{v+\gamma}\right|^{\frac{1}{q_1}}$$

$$W(x,u,v)= |f(u)|^{\frac{p}{r_1}}|k(v)|^{\frac{q}{r_1}}|v+\gamma|^{\frac{q-1}{r_1}}\left|\theta_1(x,u,v+\gamma)\right|^{\frac{1}{r_1}}.$$

Ta có:

$$(U.V.W)(x,u,v)= |f(u)||k(v)||h(x)||\theta_1(x,u,v+\gamma)| \tag{23}$$

Mặt khác, sử dụng (5) ta thu được.

$$\begin{aligned}\| U \|_{L_{p_1}(\mathbb{R}_+^3)}^{p_1} &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|k(v)|^q|v+\gamma|^{q-1}. \\ &\quad .|h(x)|^r\left|\theta_1(x,u,v+\gamma)\right|dudvdx \\ &\le \pi\int_0^{\infty}|k(v)|^q|v+\gamma|^{q-1}dv\int_0^{\infty}|h(x)|^r dx \\ &= \pi \| k \|_{L_q\left(\mathbb{R}_+,(x+\gamma)^{q-1}\right)}^q \| h \|_{L_r(\mathbb{R}_+)}^r,\end{aligned} \tag{24}$$

$$\| W \|_{L_{r_1}(\mathbb{R}_+^3)}^{r_1} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |f(u)|^p |k(v)|^q |v+\gamma|^{q-1}$$
$$.\left|\theta_1(x,u,v+\gamma)\right| dudvdx \quad (25)$$
$$\leq \pi \| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p \| k \|_{L_q\left(\mathbb{R}_+,(x+\gamma)^{q-1}\right)}^q$$

Sử dụng đánh giá (22), ta có:

$$\| V \|_{L_{q_1}(\mathbb{R}_+^3)}^{q_1} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |f(u)|^p |h(x)|^r .$$
$$.\left|\frac{\theta_1(x,u,v+\gamma)}{v+\gamma}\right| dudvdx \leq \frac{\pi}{\gamma} \| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p \| h \|_{L_r(\mathbb{R}_+)}^r$$

Từ (23), (24) và (25), ta nhận được.

$$\| U \|_{L_{p_1}(\mathbb{R}_+^3)} \| V \|_{L_{q_1}(\mathbb{R}_+^3)} \| W \|_{L_{r_1}(\mathbb{R}_+^3)} \leq \pi \gamma^{-1/q_1} .$$
$$.\| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \| k \|_{L_q\left(\mathbb{R}_+(x+\gamma)^{q-1}\right)} \| h \|_{L_r(\mathbb{R}_+)} . \quad (26)$$

Từ (23) và (26) và sử dụng bất đẳng thức Hölder cho ba hàm, ta có:

$$\left|\int_0^\infty \left(f \overset{\gamma}{*} k\right)(x) h(x) dx\right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |f(u)|.$$
$$.|k(v)||h(x)||\theta_1(x,u,v+\gamma)| dudvdx.$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty U(x,u,v) V(x,u,v) W(x,u,v).$$
$$.dudvdx$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \| U \|_{L_{p_1}(\mathbb{R}_+^3)} \| V \|_{L_{q_1}(\mathbb{R}_+^3)} \| W \|_{L_{r_1}(\mathbb{R}_+^3)}$$
$$\leq \gamma^{-1/q_1} \| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \| k \|_{L_q\left(\mathbb{R}_+,(x+\gamma)^{q-1}\right)} \| h \|_{L_r(\mathbb{R}_+)}$$
$$= \gamma^{\frac{1-q}{q}} \| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \| k \|_{L_q\left(\mathbb{R}_+(x+\gamma)^{q-1}\right)} \| h \|_{L_r(\mathbb{R}_+)} .$$

Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 1. Giả sử $\alpha > -1, 0 < \beta \leq 1$, $p > 1$, $q > 1$, $r \geq 1$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nếu $f(x) \in L_p(\mathbb{R}_+)$ và $k(x) \in L_q(\mathbb{R}_+ (1+x^2)^{q-1})$, thì tích chập suy rộng $\left(f \overset{\gamma}{*} k\right)(x)$ tồn tại, liên tục, bị chặn trong không gian $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$ và có đánh giá chuẩn.

$$\left\| \left(f \overset{\gamma}{*} k\right)(x) \right\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \quad (27)$$
$$\leq C \| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \| k \|_{L_q\left(\mathbb{R}_+\left(1+x^2\right)^{\alpha-1}\right)}$$

Với Γ là hàm Gamma. Hơn nữa, nếu giả thiết:

Trong đó $C = \left(\frac{1}{\pi\gamma}\right)^{1/p} \cdot \beta^{-\frac{a+1}{r}} \cdot \Gamma^{1/r}(\alpha+1)$ thêm các hàm $f(x) \in L_p(\mathbb{R}_+) \cap L_1(\mathbb{R}_+)$ và $k(x) \in L_1(\mathbb{R}_+) \cap L_q(\mathbb{R}_+, (1+x^2)^{q-1})$ thì tích chập suy rộng $\left(f \overset{\gamma}{*} k\right)(x) \in C_0(\mathbb{R}_+)$, thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa (7).

4. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày sự tồn tại một số tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi tích phân Fourier cosine - Laplace với hàm trọng. Đưa ra các tính chất toán tử của các tích chập suy rộng trong một số không gian hàm cụ thể. Ngoài ra còn thiết lập và chứng minh bất đẳng thức chuẩn trong không gian $L_p(\mathbb{R}_+)$ và $L_q(\mathbb{R}, \rho_j)$ đối với các tích chập tương ứng. Tuy nhiên, do khuôn khổ bài báo, chúng tôi không đề cập ở đây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Anders Vretblad (2003), *Fourier analysis and its applications*, SpingerVerlag, New York.

[2]. Britvina L.E. (2005), *A class of integral tra-nsforms related to the Fourier cosine conv-olution, Intergral Transforms and Special Funtions*, 16, No.5-6, pp.379-389.

[3]. Elias M. Stein and Rami Shakarchi (2003), *Fourier analysis an introduction,* Princeton university Press, Princeton and Oxford.

[4]. Kakichev V.A. (1967), *On the convolution for integral transforms, Izv, Vysh. Uchebn.Zaved. Mat.,* (2), pp.53-62. (In Russian).

[5]. Sneddon I.N. (2001), *Fourier Transforms,* McGray-Hill, New York.

[6]. Schiff J.L. (1999), *The Laplace Transform-s: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, Inc.

[7]. Saitoh S. (2000), *Weighted Lp-norm inequ-alities in convolution, Survey on Classical Inequalities*, Kluwer Academic Pulishers, Amsterdam, Vol.517, pp.225-234.

AUTHOR INFORMATION

Nguyen Kieu Hien

Corresponding Author: nguyenkieuhien@gmail.com

Sao Do University.

THỂ LỆ GỬI BÀI
TẠP CHÍ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ (P. ISSN 1859-4190, E. ISSN 2815-553X), thường xuyên công bố kết quả, công trình nghiên cứu khoa học và công nghệ của các nhà khoa học, cán bộ, giảng viên, nghiên cứu sinh, học viên cao học, sinh viên ở trong và ngoài nước.

1. Tạp chí xuất bản 01 số/quý bằng hai ngôn ngữ tiếng Việt và tiếng Anh. Tạp chí nhận đăng các bài báo khoa học thuộc các lĩnh vực: Điện - Điện tử - Tự động hóa; Cơ khí - Động lực; Kinh tế; Triết học - Xã hội học - Chính trị học; Các lĩnh vực khác gồm: Công nghệ thông tin; Hóa học - Công nghệ thực phẩm; Ngôn ngữ học; Toán học; Vật lý; Văn hóa - Nghệ thuật - Thể dục thể thao...
2. Bài nhận đăng là những công trình nghiên cứu khoa học chưa công bố trong bất kỳ ấn phẩm khoa học nào.
3. Tòa soạn chỉ nhận bài báo gửi online trên website http://tapchikhcn.saodo.edu.vn. Bài báo gửi về toà soạn dưới dạng file điện tử (*.doc *.docx và *.pdf); cuối bài báo, tác giả ghi rõ thông tin địa chỉ liên hệ, số điện thoại, email và cập nhật thông tin trên website. Bài báo phải được trình bày đúng định dạng, rõ ràng; Trường hợp bài báo phải chỉnh sửa theo thể lệ hoặc theo yêu cầu của Phản biện thì tác giả sẽ cập nhật trên website. Người phản biện sẽ do tòa soạn mời. Tòa soạn không gửi lại bài nếu không được đăng.
4. Các công trình thuộc đề tài nghiên cứu có Cơ quan quản lý cần kèm theo giấy phép cho công bố của cơ quan (Tên đề tài, mã số, tên chủ nhiệm đề tài, cấp quản lý,...).
5. Tên bài báo trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 14, in đậm, căn giữa.
6. Tên tác giả (không ghi học hàm, học vị), font Arial, cỡ chữ 10, in đậm, căn lề phải; cơ quan công tác của các tác giả, font Arial, cỡ chữ 9, in nghiêng, căn lề phải.
7. Chữ "Tóm tắt" in đậm, font Arial, cỡ chữ 10; Nội dung tóm tắt của bài báo không quá 10 dòng, trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 10, in thường.
8. Chữ "Từ khóa" in đậm, nghiêng, font Arial, cỡ chữ 10; Có từ 03÷05 từ khóa, font Arial, cỡ chữ 10, in nghiêng, ngăn cách nhau bởi dấu chấm phẩy, cuối cùng là dấu chấm.
9. Nội dung bài báo viết bằng tiếng Việt hoặc tiếng Anh; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Việt: Tiêu đề tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Tóm tắt tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Từ khóa tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Anh: Tiêu đề tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Tóm tắt tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Từ khóa tiếng Anh trước, tiếng Việt sau.
10. Bài báo được đánh máy trên khổ giấy A4 (21 × 29,7cm) có độ dài không quá 8 trang, font Arial, cỡ chữ 10, giãn dòng At least 12pt, Before 3pt, After 3pt; căn lề trên 2.5cm, dưới 2.5cm, trái 3cm, phải 2cm; hình vẽ phải rõ ràng, đủ nét và được định dạng dưới dạng file ảnh (*.jpg); Phương trình, công thức phải soạn thảo bằng Mathtype hoặc Equation; Phần nội dung bài báo được chia thành 02 cột, khoảng cách cột là 1cm; Trong trường hợp hình vẽ, hình ảnh có kích thước lớn, bảng biểu có độ rộng lớn hoặc công thức, phương trình dài thì cho phép trình bày dưới dạng 01 cột.
11. Tài liệu tham khảo được sắp xếp theo thứ tự tài liệu được trích dẫn trong bài báo.

    - Nếu là sách/luận án: Tên tác giả (năm), Tên sách/luận án/luận văn, Nhà xuất bản/Trường/Viện, lần xuất bản/tái bản.

    - Nếu là bài báo/báo cáo khoa học: Tên tác giả (năm), Tên bài báo/báo cáo, Tạp chí/Hội nghị/Hội thảo, Tập/Kỷ yếu, số, trang.

    - Nếu là trang web: Phải trích dẫn đầy đủ tên website và đường link, ngày cập nhật.
12. Định dạng mẫu bài báo tham khảo tại địa chỉ http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/news/detail/198/format_paper

    Bài báo sau khi xuất bản sẽ được công bố trên http://tapchikhcn.saodo.edu.vn.

THÔNG TIN LIÊN HỆ:

Ban Biên tập Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ

Phòng 203, Tầng 2, Nhà B1, Trường Đại học Sao Đỏ.

Địa chỉ: Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.

Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn

Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn

BỘ CÔNG THƯƠNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

Địa chỉ:

- **Số 1:** Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Số 2:** Số 72, đường Nguyễn Thái Học, phường Thái Học, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Điện thoại:** (0220) 3882 269 **Fax:** (0220) 3882 921 **Website:** http://saodo.edu.vn **Email:** info@saodo.edu.vn

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Số 3 (82)
2023

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.