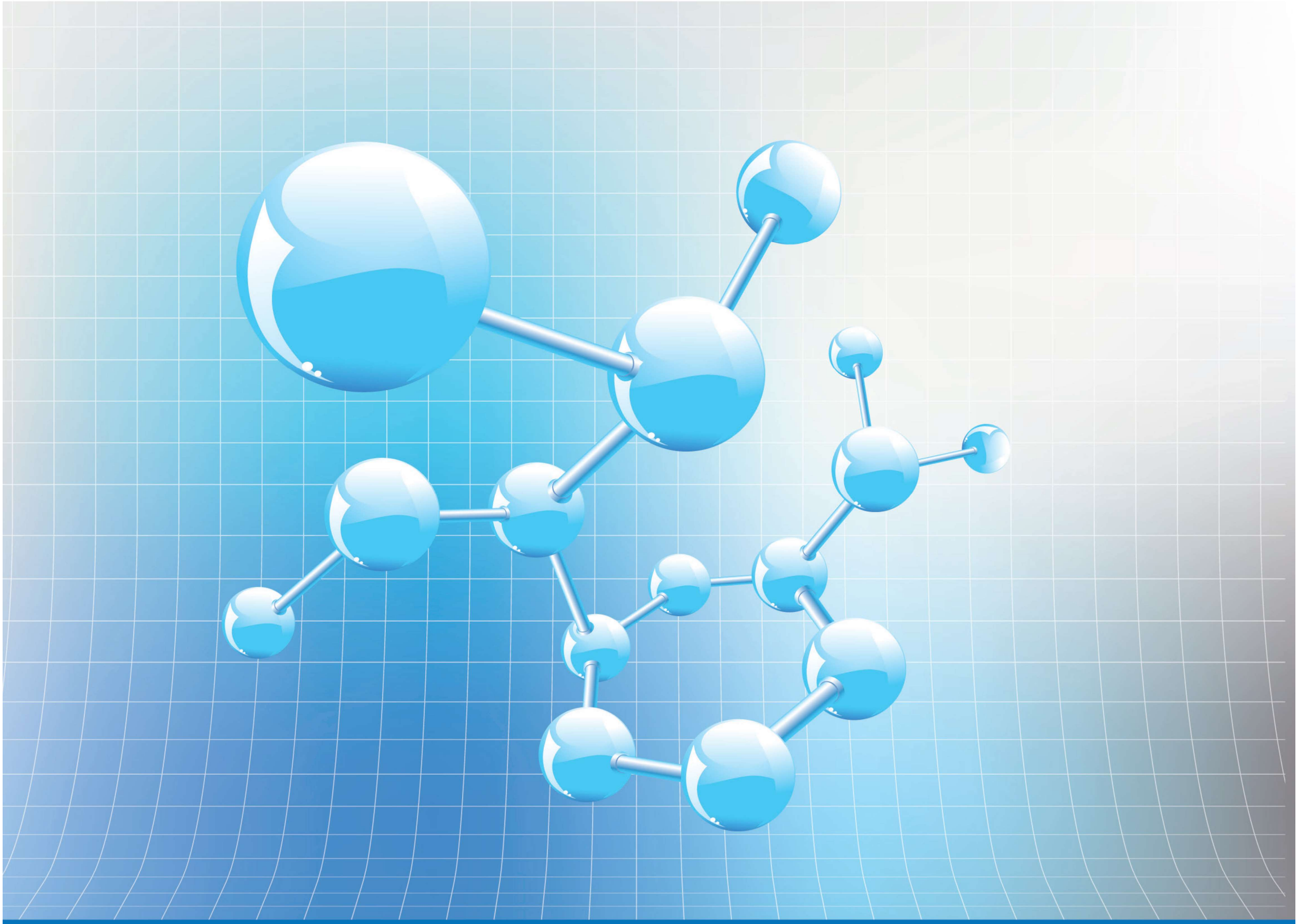
# Tạp chí
# NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
# ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

## SCIENTIFIC JOURNAL - SAO DO UNIVERSITY

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X



Số 4 (83)
2023

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X



Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

# TRONG SỐ NÀY

Số 4(83) 2023

## LIÊN NGÀNH ĐIỆN - ĐIỆN TỬ - TỰ ĐỘNG HÓA



## LIÊN NGÀNH CƠ KHÍ - ĐỘNG LỰC



## NGÀNH TOÁN HỌC

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

# TRONG SỐ NÀY

Số 4(83) 2023

## NGÀNH TOÁN HỌC



## NGÀNH KINH TẾ



## NGÀNH GIÁO DỤC HỌC



## LIÊN NGÀNH VĂN HÓA - NGHỆ THUẬT - THỂ DỤC THỂ THAO



## LIÊN NGÀNH TRIẾT HỌC - XÃ HỘI HỌC - CHÍNH TRỊ HỌC

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

# CONTENTS

No 4(83) 2023

## TITLE FOR ELECTRICITY - ELECTRONICS - AUTOMATION



## TITLE FOR MECHANICAL AND DRIVING POWER ENGINEERING



## TITLE FOR MATHEMATICS

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

# CONTENTS

No 4(83) 2023

# Phương pháp hàm Green-Tìm hàm Green cho phương trình nhiệt bằng phép biến đổi Fourier-Laplace

# Green function method-Find the Green function for the heat equation by Fourier-Laplace transformation

**Nguyễn Thị Huệ**

*Tác giả liên hệ: minhhuesaodo@gmail.com*

Trường Đại học Sao Đỏ

Ngày nhận bài: 31/8/2023
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 27/12/2023
Ngày chấp nhận đăng: 30/12/2023

**Tóm tắt**

Trong bài báo này, chúng tôi tập trung nghiên cứu về phương pháp hàm Green cho phương trình vi phân, phương pháp tìm hàm Green cho phương trình nhiệt dạng bài toán Sturm-Liouville với sự thay đổi các điều kiện biên và điều kiện ban đầu bằng phép biến đổi Fourier-Laplace.

***Từ khóa:*** *Hàm Dirac Delta; bài toán Sturm-Liouville; biến đổi Fourier-Laplace; hàm Green; phương trình nhiệt.*

**Abstract**

In this article, we focus on researching the Green's function method for differential equations, the method for finding the Green's function for heat equations in the form of the Sturm-Liouville problem with changes in boundary conditions and initial conditions by the Fourier-Laplace transform.

***Keywords:*** *Dirac Delta function; Sturm-Liouville problem; the Fourier-Laplace transform; Green function; heat equation.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hàm Green đã được nhà toán học người Anh Goerge Green xây dựng năm 1828. Sau đó Hàm Green (HG) được ứng dụng trong các bài toán điện từ, nhiệt học và trở thành một công cụ công cụ toán học đắc lực và phổ biến để giải các phương trình vi phân không thuần nhất trong Toán học cũng như trong Vật lý.

Khi áp dụng phương pháp Hàm Green để giải phương trình vi phân *Lu(x) = f(x)* trên miền *Ω* trong đó *L* là toán tử vi phân, ta sẽ nhân thêm hàm *G(x, x')* vào hai vế, sau đó lấy tích phân theo biến *x* trên *Ω*. Kết hợp với các điều kiện biên và điều kiện ban đầu của bài toán phương trình vi phân ta sẽ tìm được hàm *G(x, x')*. Hàm *G(x, x')* được gọi là hàm Green. Sử dụng các tính chất của hàm Dirac, ta sẽ biểu diễn được nghiệm của phương trình vi phân ban đầu qua hàm Green.

Vấn đề là làm thế nào để chỉ ra được hàm Green phù hợp với các điều kiện của bài toán. Trong quá trình phát triển, các nhà toán học đã xây dựng nhiều phương pháp để tìm hàm Green như: Phương pháp tách biến, dùng tính chất hàm Dirac; Phương pháp hàm riêng, trị riêng; Phương pháp biến đổi Fourier, Laplace…

Người phản biện: 1. PGS.TS. Khuất Văn Ninh
2. TS. Nguyễn Viết Tuân

Trong bài báo này, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương pháp tìm hàm Green cho phương trình vi phân dạng Sturm-Liouville, đưa ra một số kết quả tìm hàm Green cho phương trình vi phân truyền nhiệt bằng phương pháp kết hợp phép biến đổi Fourier - Laplace.

## 2. MỘT SỐ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng một số kết quả cơ bản sau đây:

**Định nghĩa 1 ([1]).** Hàm Delta Dirac được xác định bởi:

$$\delta(x-\zeta)=\begin{cases}0 & \text{khi } x\neq\zeta\\ \infty & \text{khi } x=\zeta\end{cases}$$

sao cho tích phân của *δ(x - ζ)* được chuẩn hóa thành đơn vị, tức là:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\zeta)dx=1.$$

**Định lí 1 ([1]).** Tính chất của hàm Delta Dirac:

i). Tính đối xứng: $\delta(-x)=\delta(x)$;

ii). Tính tỉ lệ: $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$;

iii). $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{|2a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right].$

**Bài toán Sturm-Liouville ([1], [2])**

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai:

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2}+B(x)\frac{dy}{dx}+C(x)y+\lambda D(x)y=0 \qquad (1)$$

trong đó:

$\lambda$ là một tham số được xác định bởi các điều kiện biên;

A(x) là hàm liên tục dương.

Khi chia hai vế cho A(x) thì (1) có thể được viết lại thành:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+b(x)\frac{dy}{dx}+c(x)y+\lambda d(x)y=0 \qquad (2)$$

với

$$b(x)=\frac{B(x)}{A(x)},\ c(x)=\frac{C(x)}{A(x)},\ d(x)=\frac{D(x)}{A(x)}.$$

Ta xét thừa số tích phân $p(x)=e^{\int_a^x b(\zeta)d\zeta}$.

Nhân phương trình (2) với p(x) ta có:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)b(x)\frac{dy}{dx}+p(x)c(x)y+\lambda p(x)d(x)y=0. \qquad (3)$$

Từ

$$\frac{dp(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{\int_a^x b(\zeta)d\zeta}\right)=e^{\int_a^x b(\zeta)d\zeta}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x b(\zeta)d\zeta\right)=p(x)b(x)$$

Suy ra:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)=p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dp(x)}{dx}\frac{dy}{dx}$$
$$=p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)b(x)\frac{dy}{dx}.$$

Khi đó, phương trình (3) có thể viết lại là:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda r(x)y=0 \qquad (4)$$

trong đó:

*q(x)* = p(x)c(x), *r(x) = p(x)d(x).*

Phương trình (4) được gọi là phương trình Sturm-Liouville.

**Bài toán Sturm-Liouville chính quy ([1], [2])**

Trong trường hợp *p(a)* ≠ 0, *p(b)* ≠ 0 và *p(x), q(x), r(x)* là các hàm liên tục thì phương trình Sturm-Liouville (4) được viết dưới dạng:

$$L[y]=\lambda r(x)y$$

trong đó:

$$L\equiv\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x). \qquad (5)$$

Nếu phương trình trên được kết hợp với các điều kiện biên:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y(a)=0\\&\beta_1 y(b)+\beta_2 y(b)=0\end{aligned} \qquad (6)$$

với $\alpha_1+\alpha_2\neq 0, \beta_1+\beta_2\neq 0$

thì phương trình (4) và các điều kiện biên (6) được gọi là Bài toán Sturm-Liouville chính quy (RSLP).

**Bài toán Sturm-Liouville suy biến ([1], [2])**

Xét phương trình:

$$L[y]-\lambda r(x)y=0, a<x<b$$

Với L được xác định bởi phương trình (5), p(x) là trơn và r(x) là dương, thì bài toán Sturm-Liouville được gọi là suy biến nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:

i) p(a) = 0 hoặc p(b) = 0;

ii) Khoảng (a, b) là vô hạn.

**Hàm riêng và giá trị riêng Sturm-Liouville ([2])**

**Định nghĩa 2.** Giá trị riêng của phương trình Sturm-Liouville có thể được biểu thị như sau:

$$\lambda=\frac{-1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)\right]$$

Các nghiệm không tầm thường thỏa mãn điều kiện biên (6) được gọi là hàm giá trị riêng.

**Định lí 2.** Nếu phương trình toán tử Sturm-Liouville có:

i) *p(x), p'(x), q(x), r(x)* là các hàm liên tục trên đoạn [a; b];

ii) *p(x)* > 0, *r(x)* > 0.

thì các giá trị riêng của bài toán Sturm-Liouville tạo thành dãy tăng $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_{n-1}<\lambda_n<...$ và có $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$.

Nếu có thêm *p(x)* ≥ 0 thì tất cả các giá trị riêng đều không âm.

**Định lí 3.** Giả sử các hàm *p(x), q(x), r(x)* trong bài toán Sturm-Liouville thoả mãn Định lí 2 và $y_i(x)$, $y_j(x)$ là các hàm riêng tương ứng với các giá trị riêng khác nhau $\lambda_i\neq\lambda_j$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x)r(x)dx=0.$$

**Định nghĩa 3.** Cho các hàm riêng $y_1, y_2, y_3$... của bài toán Sturm−Lioville chính quy trên đoạn [a; b] và *f(x)* trơn từng khúc trên đoạn [a; b]. Khi đó chuỗi hàm riêng $\sum_{n=1}^{\infty}c_m y_m(x)=f(x)$ nếu *f(x)* liên tục và $\sum_{n=1}^{\infty}c_m y_m(x)=\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$ khi *f(x)* không liên tục tại *x,* trong đó:

$$c_m=\frac{\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)dx}{\int_a^b\left[y_n(x)\right]^2 r(x)dx}$$

**Định nghĩa 4 ([2]).** Giả sử *x(t)* là hàm biến thực xác định với mọi t > 0. Biến đổi Lapace của hàm số *x(t)* được định nghĩa và kí hiệu là:

$$\mathcal{L}\left(x(t)\right) = x(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} x(t)\,dt$$

trong đó:

*x(t)* được gọi là hàm gốc;

*x(s)* được gọi là hàm ảnh.

Cho hàm *x(s),* nếu tồn tại hàm *x(t)* thỏa mãn $\mathcal{L}\left(x(t)\right) = x(s)$ thì *x(t)* là biến đổi ngược của *x(s),* kí hiệu *x(t) = L-1 (x(s)).*

**Định nghĩa 5 ([2]).** Phép biến đổi Fourier của hàm biến thực *x(t)* được định nghĩa bởi:

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} x(t)\,dt,\ (\omega \in \mathbb{R})$$

và phép biến đổi ngược của *x(ω)* là

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} x(\omega)\,d\omega,\ (\omega \in \mathbb{R})$$

## 3. NỘI DUNG CHÍNH

### 3.1. Phương pháp hàm Green cho phương trình vi phân

Nội dung phương pháp Green là không giải trực tiếp phương trình vi phân mà tìm hàm Green thông qua một phương trình khác, rồi biểu diễn nghiệm cần tìm qua hàm Green.

Giả sử cần giải phương trình vi phân:

$$Lu(x) = f(x) \tag{7}$$

trên miền *Ω,* với *L* là một toán tử vi phân.

Nhân thêm hàm *G(x, x')* vào hai vế, sau đó lấy tích phân theo biến x trên *Ω* tức là đang thực hiện tích trong $\left(\langle f \mid g\rangle = \int f^*(x) g(x)\,dx\right)$ của hai vế phương trình (7) với hàm *G(x, x')* theo biến *x* ta được:

$$\left\langle G(x,x') \mid Lu(x)\right\rangle = \left\langle G(x,x') \mid f(x)\right\rangle \tag{8}$$

Với $L^+$ là toán tử liên hợp của L thì vế trái của (8) có thể được viết lại như sau:

$\left\langle G(x,x') \mid Lu(x)\right\rangle = \left\langle L^+G(x,x') \mid f(x)\right\rangle +$ số hạng biên

hoặc

$$\left\langle L^+G(x,x') \mid u(x)\right\rangle = \left\langle G(x,x') \mid f(x)\right\rangle + \text{số hạng biên} \tag{9}$$

Bây giờ chọn hàm *G(x, x')* thỏa mãn:

$$L^+G(x,x') = \delta(x-x') \tag{10}$$

và với điều kiện biên được lựa chọn thích hợp để khử đi tất cả các thành phần chưa biết trong số hạng biên. Hàm *G(x, x')* gọi là hàm Green.

Thay (10) vào (9) và sử dụng tính chất của hàm Dirac ta có:

$u(x') = \left\langle G(x,x') \mid f(x)\right\rangle +$ số hạng biên đã biết.

Với *f(x)* biết trước và số hạng biên đã biết, khi đã tìm được hàm Green thì sẽ tìm được nghiệm *u(x)* cần tìm theo công thức:

$u(x) = \int_\Omega G(\xi,x) f(\xi)\,d\xi +$ số hạng biên đã biết.

***Ý nghĩa vật lý của hàm Green:*** Nếu phương trình vi phân tuyến tính (7) mô tả hệ vật lý tuyến tính thì nghiệm *u(x)* biểu diễn sự phản hồi tuyến tính với sự kích thích của lực ngoài *f(x).* Khi đó hàm Green biểu diễn phản ứng của hệ vật lý đối với "lực" của một nguồn đặt tại điểm *x'.* Ta cũng có thể xem hàm Green như hàm chuyển kích thích hoặc như hàm tương quan giữa kích thích và sự phản hồi của hệ.

**Định lí 4 ([3]).** Nếu toán tử L là toán tử Hermite thì hàm Green có tính chất đối xứng.

*Chứng minh:*

Xét:

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} x(t)\,dt,\ (\omega \in \mathbb{R}) \tag{11}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} x(\omega)\,d\omega,\ (\omega \in \mathbb{R}) \tag{12}$$

Lấy tích trong của (11) với *G(x, x")* từ bên trái và tích trong của (12) với *G(x, x')* từ bên phải ta có:

$$\left\langle G(x,x''), LG(x,x')\right\rangle = \left\langle G(x,x''), \delta(x-x')\right\rangle$$

$$\left\langle LG(x,x''), G(x,x')\right\rangle = \left\langle \delta(x-x''), G(x,x')\right\rangle$$

Vì L là toán tử Hermite nên:

$$\left\langle G(x,x''), LG(x,x')\right\rangle = \left\langle LG(x,x''), G(x,x')\right\rangle$$

Từ hai phương trình trên có được

$$\left\langle G(x,x''), \delta(x-x')\right\rangle = \left\langle \delta(x-x''), G(x,x'),\right\rangle$$

tức là $G^*(x',x'') = G(x'',x')$.

Đây là tính đối xứng hay còn gọi là tính chất đảo của hàm Green.

Trong phương pháp hàm Green, tùy thuộc vào dạng của phương trình vi phân mà ta sử dụng các phương pháp khác nhau để tìm hàm Green. Một số phương pháp đã được sử dụng rộng rãi như: Phương pháp tách biến, dùng tính chất hàm Dirac; Phương pháp hàm riêng, giá trị riêng; Phương pháp biến đổi Fourier… (Xem [2], [3], [4], [5]...).

Trong bài viết này, chúng tôi tập trung nghiên cứu tìm hàm Green cho các phương trình vi phân truyền nhiệt, với dạng điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp kết hợp phép biến đổi Fourier - Laplace.

### 3.2. Tìm hàm Green cho phương trình truyền nhiệt bằng phép biến đổi Fourier - Laplace

***a. Phương trình nhiệt trên miền vô hạn hoặc bán vô hạn***

Xét phương trình nhiệt một chiều:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-f(x,t) \quad (13)$$

với các điều kiện biên $|u(x,t)|<\infty$ khi $|x|<\infty$ và điều kiện ban đầu.

Đặt $G(x,t,\zeta,\tau)$ là hàm Green cho phương trình nhiệt một chiều, thì:

$$\frac{\partial G}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-\zeta)\partial(t-\tau),\ \zeta<\infty;\ 0<t,\tau \quad (14)$$

với điều kiện biên $|G(x,t,\zeta,\tau)|<\infty$ khi $|x|<\infty$ và điều kiện ban đầu $G(x,t,\zeta,\tau)=0$.

Vấn đề là chỉ ra được hàm $G(x,t,\zeta,\tau)$.

Chúng tôi bắt đầu bằng cách lấy phép biến đổi Laplace của biểu thức (14) đối với t, ta có:

$$sg(x,s,\zeta,\tau)-g(x,0,\zeta,\tau)-a^2\frac{d^2g}{dx^2}=\delta(x-\zeta)e^{-st}$$

Vậy

$$\frac{d^2g}{dx^2}-\frac{s}{a^2}g=-\delta(x-\zeta)e^{-st} \quad (15)$$

Với $g(x,s,\zeta,\tau)$ là ảnh của hàm $G(x,t,\zeta,\tau)$ qua phép biến đổi Laplace.

Tiếp theo lấy biến đổi Fourier của biểu thức (15) đối với x ta có:

$$(-ik)^2\overline{G}(k,s,\zeta,\tau)-\frac{s}{a^2}\overline{G}(k,s,\zeta,\tau)=-\frac{e^{-ik\zeta-st}}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow k^2\overline{G}(k,s,\zeta,\tau)+\frac{s}{a^2}\overline{G}(k,s,\zeta,\tau)=\frac{e^{-ik\zeta-st}}{a^2}$$

Ở đây, $\overline{G}(k,s,\zeta,\tau)$ là hàm ảnh của $g(x,s,\zeta,\tau)$ qua phép biến đổi Fourier.

Đặt $\frac{s}{a^2}=b^2$ ta có:

$$(k^2+b^2)\overline{G}(k,s,\zeta,\tau)=\frac{e^{-ik\zeta-st}}{a^2} \quad (16)$$

Để tìm $g(x,s,\zeta,\tau)$ chúng tôi sử dụng tích phân suy rộng:

$$g(x,s,\zeta,\tau)=\frac{e^{-st}}{2\pi a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(x-\zeta)}}{k^2+b^2}dk$$

Biến đổi đẳng thức (16) trong miền bao bởi một đường khép kín, chúng tôi đánh giá nó bằng định lý thặng dư và tìm ra rằng:

$$g(x,s,\zeta,\tau)=\frac{e^{-s\tau}}{2\pi a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(x-\zeta)}}{(k+bi)(k-bi)}dk=\frac{e^{-s\tau}}{2\pi a^2}\sum b_i$$

Khi $k=\pm bi$ thì $\sum b_i=\frac{1}{2ib}e^{-|x-\zeta|b}$

$$g(x,s,\zeta,\tau)=\frac{e^{-s\tau}}{2a^2b}e^{-|x-\zeta|b}=\frac{1}{2a^2b}e^{-|x-\zeta|b-s\tau}$$

Thay $b=\frac{\sqrt{s}}{a}$, ta có:

$$g(x,s,\zeta,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{s}}e^{-|x-\zeta|\frac{\sqrt{s}}{a}-s\tau} \quad (17)$$

Qua phép biến đổi Laplace của biểu thức (17) ta xác định được hàm Green có dạng:

$$G(x,t,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{a\pi a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{aa^2(t-\tau)}} \quad (18)$$

Xét một trường hợp cụ thể khi phương trình nhiệt có dạng:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-f(x,t) \quad (19)$$

Với điều kiện biên $u(0,t)=0,\ \lim_{x\to 0}|u(x,t)|<\infty$ và điều kiện ban đầu u(x,0) = 0.

Phương pháp giải, ta tìm hàm Green thỏa mãn:

$$\frac{\partial G}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-\zeta)\delta(t-\tau),\ 0<x,\zeta<\infty,\ 0<t,\tau \quad (20)$$

Theo các điều kiện biên $G(0,t,\zeta,\tau),\ \lim_{x\to\infty}|G(x,t,\zeta,\tau)|<\infty$ và điều kiện ban đầu $G(x,t,\zeta,\tau)$.

Từ điều kiện biên $G(0,t,\zeta,\tau)=0$, suy ra rằng $G(x,t,\zeta,\tau)$ là hàm Green bằng cách đưa vào ảnh gốc của $-\delta(x-\zeta)$ và giải quyết đẳng thức (14) bởi gốc $(x-\zeta)\delta(t-\tau)-\delta(x+\zeta)\delta(t-\tau)$.

Đẳng thức (18) đưa ra lời giải cho từng hàm Delta và hàm Green với đẳng thức (20) có thể được viết:

$$G(x,s,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\left\{\begin{matrix}\exp\left(\frac{-(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\\ -\exp\left(\frac{-(x+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$G(x,s,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\left\{\begin{matrix}\exp\left(\frac{-x^2+2x\zeta-\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\\ -\exp\left(\frac{-x^2-2x\zeta-\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$G(x,s,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\left\{\begin{matrix}\exp\left(\frac{-x^2-\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}+\frac{x\zeta}{2a^2(t-\tau)}\right)\\ -\exp\left(\frac{-x^2-\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{x\zeta}{2a^2(t-\tau)}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Suy ra:

$$G(x,s,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\left\{\exp\left(\frac{-x^2-\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}\right).sh\left(\frac{x\zeta}{2a^2(t-\tau)}\right)\right\}.$$

Theo cách tương tự, nếu điều kiện biên tại x = 0, thay $G_x(0,t,\zeta,\tau)=0$ thì đẳng thức (19) và (20) trở thành:

$$G(x,s,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\left\{\begin{array}{l}\exp\left(\dfrac{-(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\\+\exp\left(\dfrac{-(x+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\end{array}\right\}$$

$$G(x,s,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\left\{\begin{array}{l}\exp\left(\dfrac{-(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\\-\exp\left(\dfrac{-(x+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\end{array}\right\}.$$

Suy ra

$$G(x,s,\zeta,\tau)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\left\{\exp\left(\frac{-x^2-\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}\right).\cosh\left(\frac{x\zeta}{2a^2(t-\tau)}\right)\right\}.$$

**b. Phương trình nhiệt trong miền Descartes hữu hạn**

Trong phần này, chúng tôi tìm hàm Green cho phương trình nhiệt trong miền Descartes hữu hạn. Các nghiệm có thể được viết là chuỗi hàm riêng của bài toán Sturm - Liouville chính quy.

Ở đây, chúng tôi tìm hàm Green cho phương trình nhiệt một chiều trong khoảng thời gian 0 < x < L.

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=f(x,t),\ 0<x<L,\ 0<t \tag{21}$$

trong đó:

$a^2$ là hằng số khuếch tán.

Tìm hàm Green cho bài toán này, ta xét bài toán dưới đây:

$$\frac{\partial G}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-\zeta)\delta(t-\tau),\ \zeta<L,\ 0<t,\tau \tag{22}$$

Với điều kiện biên:

$$\alpha_1 G(0,t,\zeta,\tau)+\beta_1 G_x(0,t,\zeta,\tau)=0,\ 0<t$$

$$\alpha_2 G(L,t,\zeta,\tau)+\beta_2 G_x(L,t,\zeta,\tau)=0,\ 0<t$$

Và điều kiện ban đầu $G(x,t,\zeta,\tau)=0,\ 0<x<L.$

Chúng tôi bắt đầu bằng việc tìm phép biến đổi Laplace của đẳng thức (22), ta được:

$$\frac{s}{a^2}.g(x,t,\zeta,\tau)-\frac{s}{a^2}.g(x,0,\zeta,\tau)-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{\delta(x-\zeta).e^{-st}}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\frac{s}{a^2}=-\frac{\delta(x-\zeta).e^{-st}}{a^2},\ 0<x<L.$$

Với $\alpha_1 G(0,t,\zeta,\tau)+\beta_1 G_x(0,t,\zeta,\tau)=0$

và $\alpha_2 G(L,t,\zeta,\tau)+\beta_2 G_x(L,t,\zeta,\tau)=0.$

Áp dụng kỹ thuật khai triển hàm riêng ta có:

$$g(x,t,\zeta,\tau)=e^{-st}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(\zeta)\phi_n(x)}{s+a^2k_n^2} \tag{23}$$

Ở đây:

$\phi_n(x)$ là hàm riêng trực chuẩn thứ n cho bài toán Sturm-Liouville chính quy.

$$\varphi(x)+k^2\varphi'(x)=0$$

Điều kiện biên $\alpha_1\varphi(x)+\beta_1\varphi'(x)=0$ và $\alpha_2\varphi(L)+\beta_2\varphi'(L)=0.$

Qua phép biến đổi Laplace ngược của đẳng thức (23), ta có:

$$G(x,t,\zeta,\tau)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(\zeta)\phi_n(x)}{s+a^2k_n^2}.e^{-kn^2a^2(t-\tau)}\right]H(t-\tau) \tag{24}$$

**c. Phương trình nhiệt trong miền hình trụ**

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán tìm nghiệm của phương trình nhiệt trong hình trụ bằng phương pháp hàm Green.

Xét phương trình:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\frac{f(r,t)}{2\pi r},\ 0<t \tag{25}$$

Với các điều kiện biên $U(\alpha,t)=U(\beta,t)=0$ và ban đầu điều kiện U(r,0) = 0.

Đặt $G(r,t,\rho,\tau)$ là hàm Green, khi đó:

$$\begin{gathered}\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)=\frac{\delta(r-p)\delta(t-\tau)}{2\pi r},\\ 0<r,\rho<b,\ 0<t,\tau.\\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg}{dr}\right)-\frac{s}{a^2}g=-\frac{e^{-st}\delta(r-\rho)}{2\pi a^2 r}.\end{gathered} \tag{26}$$

Bây giờ, chúng tôi chứng tỏ $\dfrac{\delta(r-\rho)}{r}$ như một chuỗi Fourier bằng cách xét bài toán Sturm-Liouville cơ bản:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)+k^2\phi=0,\ \phi(\alpha)=0 \tag{27}$$

Hàm giá trị riêng thỏa mãn đẳng thức (27) là:

$$\phi_n(x)=y_0(k_{n^\alpha})J_0(k_{n^r})-J_0(k_{n^\alpha})y_0(k_{n^r})$$

Với điều kiện $k_n$ là 0- điểm thứ n của $y_0(k\alpha)J_0(k_n\beta)-J_0(k\beta)y_0(k_n\alpha)=0$, do đó sự khai triển cho hàm Delta theo số hạng $\phi_n(r)$ là:

$$\frac{\delta(r-\rho)}{r}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\phi_n(r)$$

Ở đây:

$$C_n=\frac{\int_\alpha^\beta \delta(r-\rho)\phi_n(r)dr}{\int_\alpha^\beta \phi_n^2(r)dr}.$$

Sử dụng điều kiện trực giao:

$$\int_{\alpha}^{\beta} J_0^2(k_n r) r dr = \frac{1}{2} r^2 \left[ J_0^n(k_n r) \right] \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} J_0(k_n r) y_0(k_n r) r dr = \frac{1}{2} r^2 \begin{bmatrix} J_0(k_n r) y_0(k_n r) \\ +J_1(k_n r) y_1(k_n r) \end{bmatrix} \Bigg|_{\alpha}^{\beta}$$

và $\int_{\alpha}^{\beta} y_0^2(k_n r) r dr = \frac{1}{2} r^2 \left[ y_0^2(k_n r) + y_1^2(k_n r) \right] \Big|_{\alpha}^{\beta}$

Với mối quan hệ định thức Wronskian.

$$J_0(z) y_1(z) - J_1(z) y_0(z) = \frac{-2}{\pi z}.$$

Ta được:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \phi_n^2(r) r dr = \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left[ \frac{J_0^2(k_n \alpha)}{J_0^2(k_n \beta)} - 1 \right].$$

Với điều kiện biên $G_x(\alpha, t, \rho, \tau) = G(\beta, t, \rho, \tau) = 0$ và điều kiện ban đầu $G(r, 0, \rho, \tau) = 0$.

Chúng tôi bắt đầu bằng cách lấy biến đổi Laplace của đẳng thức (26), thu được:

Vì vậy:

$$g(r, s, \rho, \tau) = \frac{4}{\pi} e^{-st} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 J_0^2(k_n \beta) \phi_n(\rho) \phi_n(\tau)}{\left[ J_0^2\left(k_{n^\alpha}\right) - J_0^2\left(k_{n^\beta}\right) \right] \left(s + a^2 k_n^2\right)}.$$

Qua phép biến đổi Laplace ngược, ta được:

$$G(r, s, \rho, \tau) = \frac{4}{\pi} H(t - \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 J_0^2(k_n \beta) \phi_n(\rho) \phi_n(\tau)}{\left[ J_0^2\left(k_{n^\alpha}\right) - J_0^2\left(k_{n^\beta}\right) \right]} e^{-a^2 k_n^2 (t - \tau)}.$$

**AUTHORS INFORMATION**

**Nguyen Thi Hue**

*Corresponding Author: minhhuesaodo@gmail.com*

Sao Do University.

## 4. KẾT LUẬN

Bài báo đã nghiên cứu về phương pháp hàm Green cho phương trình vi phân, là phương pháp tìm nghiệm của phương trình vi phân thông qua hàm Green.

Với các điều kiện biên, điều kiện ban đầu theo bài toán Sturm-Liouville, bằng phép biến đổi Fourier - Laplace bài báo đã chỉ ra phương pháp tìm được hàm Green cho phương trình nhiệt trên miền vô hạn, miền Descarter hữu hạn và trên miền hình trụ.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Hassan AA (2017), *Green's Function for the Heat Equation*, Fluid Mech Open Acc 4: 152.

[2]. Nguyễn Xuân Thảo (2015), *Bài giảng Giải tích 3* - Đại học Bách khoa Hà Nội.

[3]. Vũ Quang Tuyên (2009), *Lý thuyết hàm Green trong vật lý*, Đại học Khoa học tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.

[4]. Al-Gwaiz MA (2008), *Sturm-Liouville theory & its Application*, Verlag London limited, UK.

[5]. Kwong-Tin T (2007), *Mathematical methods for Engineers and Scientists 3*, Verlag Berlin Heidelbarg.

# THỂ LỆ GỬI BÀI
# TẠP CHÍ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

**Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ (P. ISSN 1859-4190, E. ISSN 2815-553X),** thường xuyên công bố kết quả, công trình nghiên cứu khoa học và công nghệ của các nhà khoa học, cán bộ, giảng viên, nghiên cứu sinh, học viên cao học, sinh viên ở trong và ngoài nước.

1. Tạp chí xuất bản 01 số/quý bằng hai ngôn ngữ tiếng Việt và tiếng Anh. Tạp chí nhận đăng các bài báo khoa học thuộc các lĩnh vực: Điện - Điện tử - Tự động hóa; Cơ khí - Động lực; Kinh tế; Triết học - Xã hội học - Chính trị học; Các lĩnh vực khác gồm: Công nghệ thông tin; Hóa học - Công nghệ thực phẩm; Ngôn ngữ học; Toán học; Vật lý; Văn hóa - Nghệ thuật - Thể dục thể thao...
2. Bài nhận đăng là những công trình nghiên cứu khoa học chưa công bố trong bất kỳ ấn phẩm khoa học nào.
3. Tòa soạn chỉ nhận bài báo gửi online trên website http://tapchikhcn.saodo.edu.vn. Bài báo gửi về toà soạn dưới dạng file điện tử (*.doc *.docx và *.pdf); cuối bài báo, tác giả ghi rõ thông tin địa chỉ liên hệ, số điện thoại, email và cập nhật thông tin trên website. Bài báo phải được trình bày đúng định dạng, rõ ràng; Trường hợp bài báo phải chỉnh sửa theo thể lệ hoặc theo yêu cầu của Phản biện thì tác giả sẽ cập nhật trên website. Người phản biện sẽ do tòa soạn mời. Tòa soạn không gửi lại bài nếu không được đăng.
4. Các công trình thuộc đề tài nghiên cứu có Cơ quan quản lý cần kèm theo giấy phép cho công bố của cơ quan (Tên đề tài, mã số, tên chủ nhiệm đề tài, cấp quản lý,...).
5. Tên bài báo trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 14, in đậm, căn giữa.
6. Tên tác giả (không ghi học hàm, học vị), font Arial, cỡ chữ 10, in đậm, căn lề phải; cơ quan công tác của các tác giả, font Arial, cỡ chữ 9, in nghiêng, căn lề phải.
7. Chữ "Tóm tắt" in đậm, font Arial, cỡ chữ 10; Nội dung tóm tắt của bài báo không quá 10 dòng, trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 10, in thường.
8. Chữ "Từ khóa" in đậm, nghiêng, font Arial, cỡ chữ 10; Có từ 03÷05 từ khóa, font Arial, cỡ chữ 10, in nghiêng, ngăn cách nhau bởi dấu chấm phẩy, cuối cùng là dấu chấm.
9. Nội dung bài báo viết bằng tiếng Việt hoặc tiếng Anh; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Việt: Tiêu đề tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Tóm tắt tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Từ khóa tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Anh: Tiêu đề tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Tóm tắt tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Từ khóa tiếng Anh trước, tiếng Việt sau.
10. Bài báo được đánh máy trên khổ giấy A4 (21 × 29,7cm) có độ dài không quá 8 trang, font Arial, cỡ chữ 10, giãn dòng At least 12pt, Before 3pt, After 3pt; căn lề trên 2.5cm, dưới 2.5cm, trái 3cm, phải 2cm; hình vẽ phải rõ ràng, đủ nét và được định dạng dưới dạng file ảnh (*.jpg); Phương trình, công thức phải soạn thảo bằng Mathtype hoặc Equation; Phần nội dung bài báo được chia thành 02 cột, khoảng cách cột là 1cm; Trong trường hợp hình vẽ, hình ảnh có kích thước lớn, bảng biểu có độ rộng lớn hoặc công thức, phương trình dài thì cho phép trình bày dưới dạng 01 cột.
11. Tài liệu tham khảo được sắp xếp theo thứ tự tài liệu được trích dẫn trong bài báo.
    - Nếu là sách/luận án: Tên tác giả (năm), Tên sách/luận án/luận văn, Nhà xuất bản/Trường/Viện, lần xuất bản/tái bản.
    - Nếu là bài báo/báo cáo khoa học: Tên tác giả (năm), Tên bài báo/báo cáo, Tạp chí/Hội nghị/Hội thảo, Tập/Kỷ yếu, số, trang.
    - Nếu là trang web: Phải trích dẫn đầy đủ tên website và đường link, ngày cập nhật.
12. Định dạng mẫu bài báo tham khảo tại địa chỉ http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/news/detail/198/format_paper

    Bài báo sau khi xuất bản sẽ được công bố trên http://tapchikhcn.saodo.edu.vn.

## THÔNG TIN LIÊN HỆ:

**Ban Biên tập Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ**

Phòng 203, Tầng 2, Nhà B1, Trường Đại học Sao Đỏ.

Địa chỉ: Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.

Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn

Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

**Địa chỉ:**
- **Số 1:** Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Số 2:** Số 72, đường Nguyễn Thái Học, phường Thái Học, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Điện thoại:** (0220) 3882 269 **Fax:** (0220) 3882 921 **Website:** http://saodo.edu.vn **Email:** info@saodo.edu.vn

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Số 4 (83)
2023

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.