



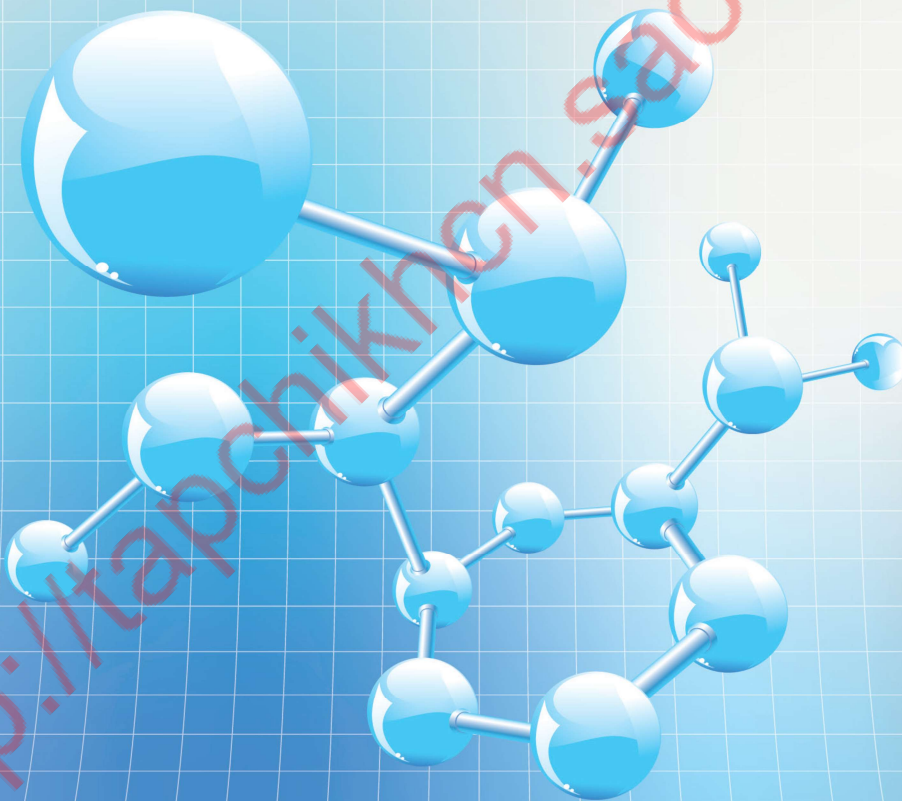
**Tap chí**

# NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

Đ A I H O C S A O Đ O

SCIENTIFIC JOURNAL - SAO DO UNIVERSITY

P. ISSN 1859-4190  
E. ISSN 2815-553X



**Số 1 (80)**

**2023**

**P. ISSN 1859-4190**

**E. ISSN 2815-553X**

■ **Tổng Biên tập**

TS. Đỗ Văn Đĩnh

■ **Phó Tổng biên tập**

TS. Nguyễn Thị Kim Nguyên

■ **Thư ký Tòa soạn**

TS. Ngô Hữu Mạnh

■ **Hội đồng Biên tập**

NGND.TS. Đinh Văn Nhung - Chủ tịch Hội đồng

GS.TS. Phạm Thị Ngọc Yến

PGS.TSKH. Trần Hoài Linh

PGS.TS. Nguyễn Quốc Cường

PGS.TS. Nguyễn Văn Liễu

GS.TSKH. Thân Ngọc Hoàn

GS.TSKH. Bành Tiến Long

GS.TS. Trần Văn Địch

GS.TS. Phạm Minh Tuấn

PGS.TS. Lê Văn Học

PGS.TS. Nguyễn Doãn Ý

GS.TS. Đinh Văn Sơn

PGS.TS. Trần Thị Hà

PGS.TS. Trương Thị Thủy

TS. Vũ Quang Thập

PGS.TS. Nguyễn Thị Bất

GS.TS. Đỗ Quang Khang

TS. Bùi Văn Ngọc

PGS.TS. Ngô Sỹ Lương

PGS.TS. Khuất Văn Ninh

GS.TSKH. Phạm Hoàng Hải

PGS.TS. Nguyễn Văn Độ

PGS.TS. Đoàn Ngọc Hải

PGS.TS. Nguyễn Ngọc Hà

■ **Ban Biên tập**

ThS. Đoàn Thị Thu Hằng - Trưởng ban

ThS. Đào Thị Vân

■ **Editor-in-Chief**

Dr. Do Van Dinh

■ **Vice Editor-in-Chief**

Dr. Nguyen Thi Kim Nguyen

■ **Office Secretary**

Dr. Ngo Huu Manh

■ **Editorial Board**

Poeple's Teacher, Dr. Dinh Van Nhung - Chairman

Prof.Dr. Pham Thi Ngoc Yen

Assoc.Prof.Dr.Sc. Tran Hoai Linh

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Quoc Cuong

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Van Lien

Prof.Dr.Sc. Than Ngoc Hoan

Prof.Dr.Sc. Banh Tien Long

Prof.Dr. Tran Van Dich

Prof.Dr. Pham Minh Tuan

Assoc.Prof.Dr. Le Van Hoc

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Doan Y

Prof.Dr. Dinh Van Son

Assoc.Prof.Dr. Tran Thi Ha

Assoc.Prof.Dr. Truong Thi Thuy

Dr. Vu Quang Thap

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Thi Bat

Prof.Dr. Do Quang Khang

Dr. Bui Van Ngoc

Assoc.Prof.Dr. Ngo Sy Luong

Assoc.Prof.Dr. Khuat Van Ninh

Prof.Dr.Sc. Pham Hoang Hai

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Van Do

Assoc.Prof.Dr. Doan Ngoc Hai

Assoc.Prof.Dr. Nguyen Ngoc Ha

■ **Editorial**

MSc. Doan Thi Thu Hang - Head

MSc. Dao Thi Van

**Địa chỉ Tòa soạn:**

Trường Đại học Sao Đỏ.

Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.

Website: <http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/>Email: [tapchikhcn@saodo.edu.vn](mailto:tapchikhcn@saodo.edu.vn).

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.  
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

# TẠP CHÍ

## NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

### ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

# TRONG S NÀY

SỐ 1(80) 2023

#### LIÊN NGÀNH ĐIỆN - ĐIỆN TỬ - TỰ ĐỘNG HÓA

- Cảnh báo cháy sớm trong các tòa nhà sử dụng mạng CNN 5 Nguyễn Tiến Dũng  
Đặng Khánh Hòa  
Nguyễn Việt Hưng  
Nguyễn Trọng Các
- Nghiên cứu, ứng dụng Plasma lạnh trong xử lý và bảo quản lạnh quả ổi tươi xuất khẩu 12 Phạm Công Tảo  
Đỗ Văn Đĩnh  
Lobov Boris Nikolaevich  
Vũ Hồng Phong  
Lê Ngọc Hòa  
Tăng Thị Phụng
- Nghiên cứu thiết kế hệ thống giám sát tự động chăm sóc cây Lan hồ điệp 18 Bùi Đăng Thành  
Nguyễn Đăng Khải  
Đỗ Văn Đĩnh

#### NGÀNH CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

- Sử dụng phương pháp toán thống kê đánh giá và dự đoán chất lượng để nâng cao hiệu quả quản lý các chương trình giáo dục chuyên nghiệp 23 Nguyễn Phúc Hậu  
Nguyễn Thị Thu

#### LIÊN NGÀNH CƠ KHÍ - ĐỘNG LỰC

- Nghiên cứu sự mất ổn định động lực học của xe du lịch trong điều kiện có gió ngang 31 Đỗ Tiến Quyết
- Thiết kế và chế tạo thiết bị cắt kim loại tấm mỏng ứng dụng trong các ngành công nghiệp 36 Ngô Hữu Mạnh  
Mạc Thị Nguyên  
Lê Hoàng Anh  
Trịnh Văn Cường  
Nguyễn Hoàng Minh Trí
- Nghiên cứu sự ảnh hưởng các tham số của phương pháp Polynomial Chaos đến sai số Leave-One-Out 43 Cao Huy Giáp
- Nâng cao chất lượng bề mặt bằng phương pháp miết ép dao động 47 Nguyễn Văn Hình  
Zaides Siemens Azikovich  
Mạc Văn Giang  
Nguyễn Thị Hồng Nhung  
Cao Văn Biên

## NGÀNH TOÁN HỌC

Luật mạnh số lớn cho dãy các vectơ ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ trong không gian Hilbert 52 Nguyễn Thị Hồng  
Nguyễn Thị Diệp Huyền

## NGÀNH KINH TẾ

Nghiên cứu tác động của Fintech đến thị trường các dịch vụ tài chính Việt Nam 56 Vũ Thị Thanh Thủy

Hệ thống thông tin kế toán trong các doanh nghiệp vừa và nhỏ trên địa bàn tỉnh Hải Dương: Thực trạng và giải pháp 63 Vũ Thị Lý  
Đinh Thị Kim Thiết  
Nguyễn Thị Quỳnh  
Đoàn Thị Thu Hằng

Các nhân tố ảnh hưởng đến mức độ đáp ứng của đội ngũ cán bộ, công chức tại các phường, xã trên địa bàn thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương 71 Nguyễn Minh Tuấn  
Nguyễn Thị Hiền

Nâng cao thu nhập cho người lao động Việt Nam sau đại dịch Covid-19 80 Nguyễn Thị Thủy

## LIÊN NGÀNH HÓA HỌC - CÔNG NGHỆ THỰC PHẨM

Sử dụng *saccharomyces cerevisiae* RV002 để lên men rượu vang từ quả Sim (*Rhodomyrtus tomentosa*) 88 Bùi Văn Tú

## LIÊN NGÀNH KHOA HỌC MỎ - TRÁI ĐẤT

Đánh giá tài nguyên du lịch và điều kiện sinh khí hậu cho phát triển loại hình du lịch tham quan tự nhiên khu vực Quảng Ninh - Hải Phòng 95 Nguyễn Đăng Tiến

## NGÀNH GIÁO DỤC

Sử dụng trò chơi ngôn ngữ nhằm nâng cao chất lượng đào tạo tiếng Anh tại Trường Đại học Sao Đỏ 103 Vũ Thị Lương  
Trịnh Thị Chuyên

## LIÊN NGÀNH TRIẾT HỌC - XÃ HỘI HỌC - CHÍNH TRỊ HỌC

Mối quan hệ giữa phát triển kinh tế và giải quyết vấn đề xã hội ở Hải Dương hiện nay 110 Vũ Văn Đông  
Phạm Anh Dũng

Tư tưởng của Lênin về nhà nước kiểu mới trong tác phẩm “Nhà nước và cách mạng”, sự vận dụng của Đảng Cộng sản Việt Nam trong xây dựng Nhà nước pháp quyền xã hội chủ nghĩa Việt Nam hiện nay 117 Nguyễn Thị Kim Nguyên  
Phạm Văn Dự

Quan điểm của Đảng Cộng sản Việt Nam trong văn kiện Đại hội XIII về phát huy giá trị văn hóa, sức mạnh con người Việt Nam và sự vận dụng quan điểm đó ở tỉnh Hải Dương 121 Phạm Xuân Đức

**TITLE FOR ELECTRICITY - ELECTRONICS - AUTOMATION**

- Early fire alarm and detection in buildings using CNN 5 Tien Dzung Nguyen  
Dang Khanh Hoa  
Nguyen Viet Hung  
Nguyen Trong Cac
- Research and application of cold plasma in processing and cold preservation of fresh export guava 12 Pham Cong Tao  
Do Van Dinh  
Lobov Boris Nikolaevich  
Vu Hong Phong  
Le Ngoc Hoa  
Tang Thi Phung
- Research and design an automatic monitoring care system for Phalaenopsis Orchid 18 Bui Dang Thanh  
Nguyen Dang Khai  
Do Van Dinh

**TITLE FOR INFORMATION TECHNOLOGY**

- Using statistical methods to evaluate and predict quality to improve the management efficiency of professional education programs 23 Nguyen Phuc Hau  
Nguyen Thi Thu

**TITLE FOR MECHANICAL AND DRIVING POWER ENGINEERING**

- Study on dynamic instability of sedan in crosswind conditions 31 Do Tien Quyet
- Design and manufacturing of a thin sheet metal cutting equipment for applications industrials 36 Ngo Huu Manh  
Mac Thi Nguyen  
Le Hoang Anh  
Trinh Van Cuong  
Nguyen Hoang Minh Tri
- Study on the effects of the parameters of the Polynomial Chaos method on the error of Leave-One-Out 43 Cao Huy Giap
- Improve surface quality by oscillating smoothing method 47 Nguyen Van Hinh  
Zaides Siemens Azikovich  
Mac Van Giang  
Nguyen Thi Hong Nhung  
Cao Van Bien

**TITLE FOR MATHEMATICS**

- Strong law of large numbers for sequences of random vectors that are double-dependent in blocks and negatively dependent on coordinates in Hilbert space 52 Nguyen Thi Hong  
Nguyen Thi Diep Huyen

**TITLE FOR ECONOMICS**

- Studying the impact of Fintech on the Vietnamese financial services market 56 Vu Thi Thanh Thuy
- Accounting information system in small and medium enterprises in Hai Duong province: Current situation and solutions 63 Vu Thi Ly  
Dinh Thi Kim Thiet  
Nguyen Thi Quynh  
Doan Thi Thu Hang
- Factors affecting the responsiveness of cadres and civil servants in wards and communes in Chi Linh city, Hai Duong province 71 Nguyen Minh Tuan  
Nguyen Thi Hien
- Increase income for Vietnam workers after the Covid-19 pandemic 80 Nguyen Thi Thuy

**TITLE FOR CHEMISTRY AND FOOD TECHNOLOGY**

- Application of *saccharomyces cerevisiae* RV002 to ferment wine from Sim fruit (*Rhodomyrtus tomentosa*) 88 Bui Van Tu

**TITLE FOR EARTH SCIENCE - MINING**

- The assessment of tourism resources and bioclimatic conditions for the development of nature tourism in Quang Ninh - Hai Phong 95 Nguyen Dang Tien

**TITLE FOR EDUCATION**

- Using language games to improve the quality of training English at Sao Do University 103 Vu Thi Luong  
Trinh Thi Chuyen

**TITLE FOR PHILOSOPHY - SOCIOLOGY - POLITICAL SCIENCE**

- The relationship between economic development and solving social problems in Hai Duong today 110 Vu Van Dong  
Pham Anh Dung
- Lenin's thought on the new type of state in the work "State and revolution", the application of the Communist Party of Vietnam in building the socialist rule of law state in Vietnam today 117 Nguyen Thi Kim Nguyen  
Pham Van Du
- The point of view of the Communist Party of Vietnam in the document of the 13<sup>th</sup> National Congress on promoting Vietnamese cultural values and human strength and the application of that view in Hai Duong province 121 Pham Xuan Duc

# Luật mạnh số lớn cho dãy các vectơ ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ trong không gian Hilbert

Strong law of large numbers for sequences of random vectors that are double-dependent in blocks and negatively dependent on coordinates in Hilbert space

Nguyễn Thị Hồng\*, Nguyễn Thị Diệp Huyền

\*Tác giả liên hệ: [nguyenhong.sd@gmail.com](mailto:nguyenhong.sd@gmail.com)

Trường Đại học Sao Đỏ

Ngày nhận bài: 18/4/2022

Ngày nhận bài sửa sau phân biên: 10/3/2023

Ngày chấp nhận đăng: 31/3/2023

## Tóm tắt

Bài viết này thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các vectơ ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ trong không gian Hilbert trường hợp phân phối không xác định, nhận các giá trị thực trong không gian Hilbert có thể phân tách.

*Từ khóa:* Luật mạnh số lớn; không gian Hilbert; phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ.

## Abstract

This article establishes the strong law of large numbers for sequences of blockwise pairwise and coordinatewise negatively dependent random vectors taking values in real separable Hilbert spaces non-identically distributed cases.

*Keywords:* Strong law of large numbers; Hilbert space; blockwise pairwise and coordinatewise negative dependence.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Luật số lớn trong lý thuyết xác suất có nhiều ứng dụng trong thống kê, toán kinh tế, khoa học tự nhiên và một số lĩnh vực khác, nó khẳng định trung bình cộng của các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối hội tụ hầu chắc chắn (h.c.c) hoặc hội tụ theo xác suất (a.s) về kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên đó. Bên cạnh đó tính độc lập của các biến ngẫu nhiên cũng đóng vai trò quan trọng, nhưng trong thực tế ta gặp nhiều hiện tượng ngẫu nhiên phụ thuộc lẫn nhau, vì vậy việc nghiên cứu sự phụ thuộc khác nhau của các biến ngẫu nhiên sẽ phù hợp với các ứng dụng trong thực tế. Có nhiều tác giả nghiên cứu về luật số lớn nhận giá trị trong các không gian trừu tượng như metric, Banach, Hilbert,...

Khái niệm phụ thuộc âm đôi một của các biến ngẫu nhiên có giá trị thực được đưa ra bởi Lehmann [1]. Các khái niệm về các vectơ ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một và phụ thuộc theo tọa độ nhận giá trị trong không gian Hilbert đã được giới thiệu bởi N. T. T. Hiền [2].

Mục tiêu bài báo này là: Mở rộng luật mạnh số lớn Loève cổ điển thành khối ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một

theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ của dãy vectơ ngẫu nhiên trong không gian Hilbert.

## 2. MỘT SỐ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

**Định nghĩa 1 [1].** Cho  $X$  và  $Y$  là các biến ngẫu nhiên, ta nói  $X$  và  $Y$  phụ thuộc âm nếu.

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

**Định nghĩa 2 [1].** Dãy biến ngẫu nhiên  $\{X_i, i \geq 1\}$  được cho là phụ thuộc âm đôi một nếu  $X_i$  và  $X_j$  phụ thuộc âm với  $i \neq j$ .

**Định nghĩa 3 [2].** Một dãy các biến ngẫu nhiên (có giá trị thực)  $\{X_i, i \geq 1\}$  được cho là phụ thuộc âm đôi một theo khối nếu với mỗi  $k \geq 1$ , tập hợp  $\{X_i, i \in [2^{k-1}, 2^k]\}$  là phụ thuộc âm đôi một.

Gọi  $H$  là một không gian Hilbert thực có thể phân tách được với tích vô hướng  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , chuẩn tương ứng  $\|\cdot\|$  và cơ sở trực chuẩn  $\{e_j, j \in B\}$ .

**Định nghĩa 4 [2].** Một dãy  $\{X_n, n \geq 1\}$  các vectơ ngẫu nhiên trong  $H$  được gọi là phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ nếu với mỗi  $j \in B$ , dãy các biến ngẫu nhiên  $\{\langle X_n, e_j \rangle, n \geq 1\}$  là phụ thuộc đôi một theo khối. Ta ký hiệu  $\langle X_n, e_j \rangle$  bằng  $X_n^{(j)}$ .

Người phân biên: 1. PGS. TS. Khuất Văn Ninh  
2. TS. Nguyễn Viết Tuấn

**Bổ đề 1 [2].** Gọi  $\{X_n, n \geq 1\}$  là dãy vector ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ, kỳ vọng 0 trong H thỏa mãn  $E\|X_n\|^2 < \infty$  với mọi  $n \geq 1$ . Khi đó với  $n \geq 1$ , ta có:

$$E\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k X_i \right\|^2\right) \leq \log^2(2n) \sum_{i=1}^n E\|X_i\|^2$$

Khái niệm về hàm biến đổi chính quy được trình bày trong [9, Chương 1].

**Bổ đề 2 [10] (Bổ đề Borel - Cantelli).** Cho không gian xác suất  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  và  $\{A_n, n \geq 1\}$  là dãy các biến cố. Khi đó:

i) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$  thì  $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ .

ii) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$  và  $\mathbb{P}(A_i A_j) \leq \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$

Với  $i \neq j$  thì  $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ .

**Bổ đề 3 [11] (Bổ đề Toeplitz).** Cho  $\{a_{nk}, 1 \leq k \leq k_n, n \geq 1\}$

là mảng các số thực thỏa mãn với mọi  $k \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$

và  $\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{k_n} |a_{nk}| < \infty$ . Cho  $\{x_n, n \geq 1\}$  là dãy các số thực. Khi đó

i) Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} x_k = 0$ .

ii) Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} = 1$  thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} x_k = x.$$

### 3. KẾT QUẢ CHÍNH

Định lý sau đây là kết quả chính. Định lý này mở rộng kết quả định lý 3.1 của N. T. T. Hiền [2].

**Định lý 1.** Gọi  $\{x_n, n \geq 1\}$  là dãy các vector ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ, kỳ vọng 0 trong H. Gọi  $\{b_n, n \geq 1\}$  là dãy không giảm các hằng số dương thỏa mãn:

$$\inf_{n \geq 0} \frac{b_{2^{n+1}}}{b_{2^n}} > 1 \text{ và } \sup_{n \geq 0} \frac{b_{2^{n+1}}}{b_{2^n}} < \infty. \quad (1)$$

Khi đó, nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2(2n) < \infty, \quad (2)$$

Trong đó:

$1 \leq r_n \leq 2, n \geq 1$  thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \text{ a.s.} \quad (3)$$

Chúng minh. Với  $n \geq 1, j \in B$ , đặt

$$Y_n^{(j)} = -b_n I(X_n^{(j)} < -b_n) + X_n^{(j)} I(|X_n^{(j)}| \leq b_n) + b_n I(X_n^{(j)} > b_n), Y_n = \sum_{j \in B} Y_n^{(j)} e_j.$$

Các kết luận sau đây được đưa ra bởi L. V. Thành [14]. Lưu ý rằng chúng tôi không sử dụng bất kỳ cấu trúc phụ thuộc nào của dãy  $\{X_n, n \geq 1\}$  để có được những kết luận này.

$$\frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n} I(|X_n^{(j)}| \leq b_n)}{b_n^{r_n}} + P(|X_n^{(j)}| > b_n) \leq 2 \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}}, n \geq 1, j \in B, \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty,$$

Và

$$\frac{\sum_{i=1}^n EY_i}{b_n} \rightarrow 0 \text{ a.s. as } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Theo định nghĩa của  $Y_n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\|Y_n - EY_n\|^2}{b_n^2} \log^2 n &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{b_n^2} \sum_{j \in B} E(Y_n^{(j)})^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \left( \frac{E|X_n^{(j)}|^2 I(|X_n^{(j)}| \leq b_n)}{b_n^2} + P(|X_n^{(j)}| > b_n) \right) \log^2 n \quad (6) \end{aligned}$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n} \leq b_n}{b_n^{r_n}} \log^2 n < \infty. \text{ (theo (2))}$$

Đặt:

$$T_k = \frac{1}{b_{2^{k+1}} - b_{2^k}} \max_{2^k \leq j < 2^{k+1}} \left\| \sum_{i=2^k}^j (Y_i - EY_i) \right\|, k \geq 0.$$

Biết rằng  $\{Y_n - EY_n, n \geq 1\}$  là một dãy các vector ngẫu nhiên PCND theo khối. Với  $k \geq 0$ .

$$\begin{aligned} ET_k^2 &\leq CE \left( \frac{1}{b_{2^{k+1}} - b_{2^k}} \max_{2^k \leq j < 2^{k+1}} \left\| \sum_{i=2^k}^j (Y_i - EY_i) \right\| \right)^2 \text{ (theo(1))} \\ &\leq \frac{C}{b_{2^{k+1}}^2} \log^2 2^{k+1} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} E\|Y_i - EY_i\|^2 \text{ (theo bổ đề 1)} \\ &\leq \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{E\|Y_i - EY_i\|^2}{b_i^2} \log^2(2i). \end{aligned}$$

Theo (6) ta có  $\sum_{k=0}^{\infty} ET_k^2 < \infty$  và do đó theo bất đẳng thức Markov và Bổ đề Borel - Cantelli, chúng ta nhận được:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = 0 \text{ a.s.} \quad (7)$$

Lưu ý rằng với  $n \geq 1$ , để  $k \geq 0$  sao cho  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ .

$$\frac{\sum_{i=1}^n \|Y_i - EY_i\|}{b_n} \leq \frac{1}{b_{2^k}} \sum_{j=0}^k \max_{2^j \leq i < 2^{j+1}} \left\| \sum_{i=2^j}^i (Y_i - EY_i) \right\| \quad (8)$$

$$= \frac{b_{2^{k+1}}}{b_{2^k}} \sum_{j=0}^k \frac{b_{2^{j+1}} - b_{2^j}}{b_{2^{k+1}}} T_j \quad (8)$$

$$\leq C \sum_{j=0}^k \frac{b_{2^{j+1}} - b_{2^j}}{b_{2^{k+1}}} T_j. \quad (\text{theo (1)})$$

Theo (7), (8) và Bổ đề Toeplitz ta có:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - EY_i)}{b_n} \rightarrow 0 \text{ a.s. khi } n \rightarrow \infty \quad (9)$$

Theo (4), (5), (9) và Bổ đề Borel - Cantelli, chúng ta nhận được (3).

**Nhận xét.** (i) Nếu  $r_n \equiv 2$ , thì

$$\sum_{j \in B} E |X_n^{(j)}|^{r_n} = \sum_{j \in B} E |X_n^{(j)}|^2 = E \|X_n\|^2.$$

(ii) Nếu  $|B|$  là hữu hạn, khi đó (2) tương đương với:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|X_n\|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2(2n) < \infty.$$

(iii) S. Csorgo, Tandori và Totik [15] đã chứng minh rằng ngay cả với trung bình 0, biến ngẫu nhiên độc lập

theo cặp thì điều kiện  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|X_n\|^2}{n^2} < \infty$  không bao hàm quy luật mạnh của số lớn (3) với  $b_n = n$ .

Một phát biểu khác của định lý 3.1 [2].

**Định lý 2.** Cho  $\{X_n, n \geq 1\}$  là dãy các vector ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ, kỳ vọng 0 trong H. Gọi  $\{b_n, n \geq 1\}$  là dãy không giảm các hằng số dương thỏa mãn (1).

Nếu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \frac{E |X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}} < \infty,$$

Trong đó:

$$1 \leq r_n \leq 2, n \geq 1 \text{ thì}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n \log(2n)} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \text{ a.s.}$$

**Chứng minh:** Đặt  $Y_n^{(j)}, Y_n$  như phần chứng minh Định lý 1 ta cũng có (4), (5) và:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|Y_n - EY_n\|^2}{b_n^2} < \infty. \quad (11)$$

Đặt:

$$T_k = \frac{1}{(b_{2^{k+1}} - b_{2^k}) \log 2^{k+1}} \max_{2^k \leq j < 2^{k+1}} \left\| \sum_{i=2^k}^j (Y_i - EY_i) \right\|, k \geq 0.$$

Ta đã biết  $\{Y_n - EY_n, n \geq 1\}$  là dãy vector ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ.

Với  $k \geq 0$ .

$$ET_k^2 \leq CE \left( \frac{1}{b_{2^{k+1}} \log 2^{k+1}} \max_{2^k \leq j < 2^{k+1}} \left\| \sum_{i=2^k}^j (Y_i - EY_i) \right\| \right)^2$$

$$\leq \frac{C}{b_{2^{k+1}}^2} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} E \|Y_i - EY_i\|^2 \quad (\text{theo bổ đề 1})$$

$$\leq C \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{E \|Y_i - EY_i\|^2}{b_i^2}.$$

Từ (11)  $\sum_{k=0}^{\infty} ET_k^2 < \infty$  và bất đẳng thức Markov và Bổ đề Borel-Cantelli ta được:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = 0 \text{ a.s.} \quad (12)$$

Chú ý với  $n \geq 1$  để  $k \geq 0$  sao cho  $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$ .

$$\frac{\sum_{i=1}^n \|Y_i - EY_i\|}{b_n \log(2n)} \leq \frac{1}{b_{2^k} \log(2n)} \sum_{j=0}^k \max_{2^j \leq i < 2^{j+1}} \left\| \sum_{i=2^j}^i (Y_i - EY_i) \right\|$$

$$= \frac{b_{2^{k+1}}}{b_{2^k}} \sum_{j=0}^k \frac{b_{2^{j+1}} - b_{2^j}}{b_{2^{k+1}}}$$

$$\leq C \sum_{j=0}^k \frac{b_{2^{j+1}} - b_{2^j}}{b_{2^{k+1}}} T_j. \quad (13)$$

Theo (12), (13) và Bổ đề Toeplitz ta có:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - EY_i)}{b_n \log(2n)} \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

Theo (4), (5), (14) và Bổ đề Borel-Cantelli ta có (10).

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài viết này chúng tôi đã thiết lập luật mạnh số lớn a.s cho dãy các vector ngẫu nhiên phụ thuộc đôi một theo khối và phụ thuộc âm theo tọa độ trong không gian Hilbert. Kết quả được mở rộng nghiên cứu của N.T.T.Hiền [2] với luật mạnh số lớn h.c.c. Các nghiên cứu cho trường hợp phân phối xác định sẽ là hướng nghiên cứu tiếp theo.

#### LỜI CẢM ƠN

Kết quả nghiên cứu này thuộc đề tài KHCN cấp cơ sở mã số 01.KHCN/22-23 được tài trợ bởi Trường Đại học Sao Đỏ. Nhóm tác giả chân thành cảm ơn sự hỗ trợ của Trường Đại học Sao Đỏ đã tạo điều kiện để chúng tôi hoàn thành nghiên cứu này.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. E. L. Lehmann (1966), *Some concepts of dependence*, Ann. Math. Stat. 37, 1137-1153.
- [2]. N. T. T. Hien, L. V. Thanh, and V. T. H. Van (2019), *On the negative dependence in Hilbert spaces with applications*, Appl. Math. 64, 45-59

- [3]. V. T. N. Anh and N. T. T. Hien (2021), *On the weak laws of large numbers for weighted sums of dependent identically distributed random vectors in Hilbert spaces*, *Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2* 70, 1245-1256 <http://link.springer.com/article/10.1007/s12215-020-00555-w>.
- [4]. N. T. T. Hien and L. V. Thanh (2015), *On the weak laws of large numbers for sums of negatively associated random vectors in Hilbert spaces*, *Stat. Probab. Lett.* 107, 236-245
- [5]. [5]. M. H. Ko, T. S. Kim and K. H. Han (2009), *A note on the almost sure convergence for dependent random variables in a Hilbert space*, *J. Theor. Probab.* 22, 506-513.
- [6]. L. V. Thanh (2013), *On the almost sure convergence for dependent random vectors in Hilbert spaces*, *Acta Math. Hung.* 139, 276-285
- [7]. A. R. Dabrowski and H. Dehling (1988), *A Berry-Esseen theorem and a functional law of the iterated logarithm for weakly associated random vectors*, *Stoch. Process. Appl.* 30, 277-289).
- [8]. V. T. N. Anh, N. T. T. Hien, L. V. Thanh and V. T. H. Van (2021), *The Marcinkiewicz-Zygmund type strong law of large numbers with general normalizing sequences*, *J. Theor. Prob.* 34, 331-348.
- [9]. E. Seneta (1976), *Regularly Varying Functions*, Vol. 508 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin.
- [10]. V. V. Petrov (2002), *A note on the Borel-Cantelli lemma*, *Statist. Probab. Lett.*, 58, 283-286 Ed.; Springer-Verlag, New York.
- [11]. M. Loève (1977), *Probability Theory I*, 4<sup>th</sup> Ed.; Springer-Verlag, New York.
- [12]. N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels (1989), *Regular Variation*, Vol. 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* (Cambridge Univ. Press, Cambridge).
- [13]. V. Pipiras and M. S. Taqqu (2017), *Long-Range Dependence and Self-Similarity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [14]. L. V. Thanh (2013), *On the almost sure convergence for dependent random vectors in Hilbert spaces*, *Acta Math. Hung.* 139, 276-285.
- [15]. S. Csörgő, K. Tandori and V. Totik (1983), *On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables*, *Acta Math. Hung.* 42, 319-330.

---

#### AUTHORS INFORMATION

**Nguyen Thi Hong\***, **Nguyen Thi Diep Huyen**

\*Corresponding Author: [nguyenhong.sd@gmail.com](mailto:nguyenhong.sd@gmail.com)

Sao Do University.

# THỂ LỆ GỬI BÀI

## TẠP CHÍ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ (P. ISSN 1859-4190, E. ISSN 2815-553X), thường xuyên công bố kết quả, công trình nghiên cứu khoa học và công nghệ của các nhà khoa học, cán bộ, giảng viên, nghiên cứu sinh, học viên cao học, sinh viên ở trong và ngoài nước.

1. Tạp chí xuất bản 01 số/quý bằng hai ngôn ngữ tiếng Việt và tiếng Anh. Tạp chí nhận đăng các bài báo khoa học thuộc các lĩnh vực: Điện - Điện tử - Tự động hóa; Cơ khí - Động lực; Kinh tế; Triết học - Xã hội học - Chính trị học; Các lĩnh vực khác gồm: Công nghệ thông tin; Hóa học - Công nghệ thực phẩm; Ngôn ngữ học; Toán học; Vật lý; Văn hóa - Nghệ thuật - Thể dục thể thao...
2. Bài nhận đăng là những công trình nghiên cứu khoa học chưa công bố trong bất kỳ ấn phẩm khoa học nào.
3. Tòa soạn chỉ nhận bài báo gửi online trên website <http://tapchikhcn.saodo.edu.vn>. Bài báo gửi về tòa soạn dưới dạng file điện tử (\*.doc \*.docx và \*.pdf); cuối bài báo, tác giả ghi rõ thông tin địa chỉ liên hệ, số điện thoại, email và cập nhật thông tin trên website. Bài báo phải được trình bày đúng định dạng, rõ ràng; Trường hợp bài báo phải chỉnh sửa theo thể lệ hoặc theo yêu cầu của Phản biện thì tác giả sẽ cập nhật trên website. Người phản biện sẽ do tòa soạn mời. Tòa soạn không gửi lại bài nếu không được đăng.
4. Các công trình thuộc đề tài nghiên cứu có Cơ quan quản lý cần kèm theo giấy phép cho công bố của cơ quan (Tên đề tài, mã số, tên chủ nhiệm đề tài, cấp quản lý,...).
5. Tên bài báo trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 14, in đậm, căn giữa.
6. Tên tác giả (không ghi học hàm, học vị), font Arial, cỡ chữ 10, in đậm, căn lề phải; cơ quan công tác của các tác giả, font Arial, cỡ chữ 9, in nghiêng, căn lề phải.
7. Chữ "Tóm tắt" in đậm, font Arial, cỡ chữ 10; Nội dung tóm tắt của bài báo không quá 10 dòng, trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 10, in thường.
8. Chữ "Từ khóa" in đậm, nghiêng, font Arial, cỡ chữ 10; Có từ 03÷05 từ khóa, font Arial, cỡ chữ 10, in nghiêng, ngăn cách nhau bởi dấu chấm phẩy, cuối cùng là dấu chấm.
9. Nội dung bài báo viết bằng tiếng Việt hoặc tiếng Anh; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Việt: Tiêu đề tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Tóm tắt tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Từ khóa tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Anh: Tiêu đề tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Tóm tắt tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Từ khóa tiếng Anh trước, tiếng Việt sau.
10. Bài báo được đánh máy trên khổ giấy A4 (21 × 29,7cm) có độ dài không quá 8 trang, font Arial, cỡ chữ 10, giãn dòng At least 12pt, Before 3pt, After 3pt; căn lề trên 2.5cm, dưới 2.5cm, trái 3cm, phải 2cm; hình vẽ phải rõ ràng, đủ nét và được định dạng dưới dạng file ảnh (\*.jpg); Phương trình, công thức phải soạn thảo bằng Mathtype hoặc Equation; Phần nội dung bài báo được chia thành 02 cột, khoảng cách cột là 1cm; Trong trường hợp hình vẽ, hình ảnh có kích thước lớn, bảng biểu có độ rộng lớn hoặc công thức, phương trình dài thì cho phép trình bày dưới dạng 01 cột.
11. Tài liệu tham khảo được sắp xếp theo thứ tự tài liệu được trích dẫn trong bài báo.
  - Nếu là sách/luận án: Tên tác giả (năm), Tên sách/luận án/luận văn, Nhà xuất bản/Trường/Viện, lần xuất bản/tái bản.
  - Nếu là bài báo/báo cáo khoa học: Tên tác giả (năm), Tên bài báo/báo cáo, Tạp chí/Hội nghị/Hội thảo, Tập/Kỷ yếu, số, trang.
  - Nếu là trang web: Phải trích dẫn đầy đủ tên website và đường link, ngày cập nhật.
12. Định dạng mẫu bài báo tham khảo tại địa chỉ [http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/news/detail/198/format\\_paper](http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/news/detail/198/format_paper)  
Bài báo sau khi xuất bản sẽ được công bố trên <http://tapchikhcn.saodo.edu.vn>.

### THÔNG TIN LIÊN HỆ:

**Ban Biên tập Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ**

Phòng 203, Tầng 2, Nhà B1, Trường Đại học Sao Đỏ.

Địa chỉ: Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.

Website: <http://tapchikhcn.saodo.edu.vn>

Email: [tapchikhcn@saodo.edu.vn](mailto:tapchikhcn@saodo.edu.vn)

**Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ, Số 1 (80) 2023**



**BỘ CÔNG THƯƠNG**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ**

**Địa chỉ:**

- **Số 1:** Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Số 2:** Số 72, đường Nguyễn Thái Học, phường Thái Học, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Điện thoại:** (0220) 3882 269 **Fax:** (0220) 3882 921 **Website:** <http://saodo.edu.vn> **Email:** [info@saodo.edu.vn](mailto:info@saodo.edu.vn)

P. ISSN 1859-4190  
E. ISSN 2815-553X

**Số 1 (80)**  
**2023**

**Địa chỉ Tòa soạn:**

Trường Đại học Sao Đỏ.

Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.

Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.

Website: <http://tapchikhcn.saodo.edu.vn>/Email: [tapchikhcn@saodo.edu.vn](mailto:tapchikhcn@saodo.edu.vn).

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.  
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.