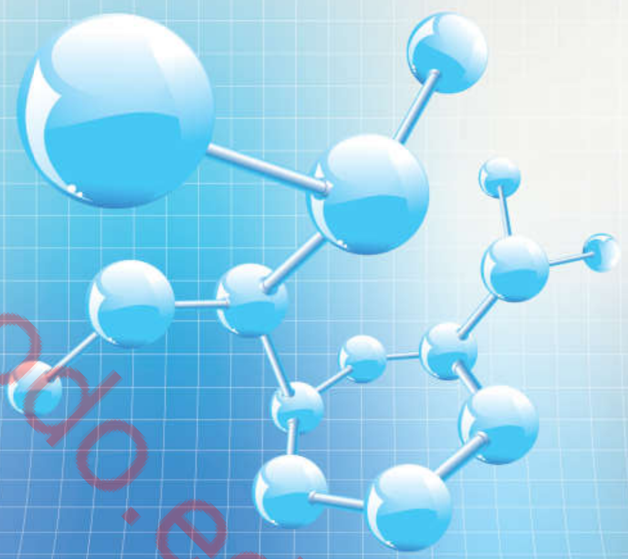
Tạp chí
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ
SCIENTIFIC JOURNAL - SAO DO UNIVERSITY

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X



Số 2 (81)
2023

SỐ 2 (81) 2023   TẠP CHÍ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC   P.ISSN 1859-4190 - E.ISSN 2815-553X

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

Địa chỉ:
- **Số 1:** Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Số 2:** Số 72, đường Nguyễn Thái Học, phường Thái Học, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
- **Điện thoại:** (0220) 3882 269 **Fax:** (0220) 3882 921 **Website:** http://saodo.edu.vn **Email:** info@saodo.edu.vn

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Số 2 (81)
2023

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

Số 2 (81)
2023

P. ISSN 1859-4190
E. ISSN 2815-553X

Địa chỉ Tòa soạn:
Trường Đại học Sao Đỏ.
Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882 921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn.

Giấy phép xuất bản số: 620/GP-BTTTT ngày 17/9/2021 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In 2.000 bản, khổ 21 × 29,7cm, tại Công ty TNHH in Tre Xanh, cấp ngày 17/02/2011.

THỂ LỆ GỬI BÀI
TẠP CHÍ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ (P. ISSN 1859-4190, E. ISSN 2815-553X), thường xuyên công bố kết quả, công trình nghiên cứu khoa học và công nghệ của các nhà khoa học, cán bộ, giảng viên, nghiên cứu sinh, học viên cao học, sinh viên ở trong và ngoài nước.

1. Tạp chí xuất bản 01 số/quý bằng hai ngôn ngữ tiếng Việt và tiếng Anh. Tạp chí nhận đăng các bài báo khoa học thuộc các lĩnh vực: Điện - Điện tử - Tự động hóa; Cơ khí - Động lực; Kinh tế; Triết học - Xã hội học - Chính trị học; Các lĩnh vực khác gồm: Công nghệ thông tin; Hóa học - Công nghệ thực phẩm; Ngôn ngữ học; Toán học; Vật lý; Văn hóa - Nghệ thuật - Thể dục thể thao...
2. Bài nhận đăng là những công trình nghiên cứu khoa học chưa công bố trong bất kỳ ấn phẩm khoa học nào.
3. Tòa soạn chỉ nhận bài báo gửi online trên website http://tapchikhcn.saodo.edu.vn. Bài báo gửi về toà soạn dưới dạng file điện tử (*.doc *.docx và *.pdf); cuối bài báo, tác giả ghi rõ thông tin địa chỉ liên hệ, số điện thoại, email và cập nhật thông tin trên website. Bài báo phải được trình bày đúng định dạng, rõ ràng; Trường hợp bài báo phải chỉnh sửa theo thể lệ hoặc theo yêu cầu của Phản biện thì tác giả sẽ cập nhật trên website. Người phản biện sẽ do toà soạn mời. Toà soạn không gửi lại bài nếu không được đăng.
4. Các công trình thuộc đề tài nghiên cứu có Cơ quan quản lý cần kèm theo giấy phép cho công bố của cơ quan (Tên đề tài, mã số, tên chủ nhiệm đề tài, cấp quản lý,...).
5. Tên bài báo trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 14, in đậm, căn giữa.
6. Tên tác giả (không ghi học hàm, học vị), font Arial, cỡ chữ 10, in đậm, căn lề phải; cơ quan công tác của các tác giả, font Arial, cỡ chữ 9, in nghiêng, căn lề phải.
7. Chữ "Tóm tắt" in đậm, font Arial, cỡ chữ 10; Nội dung tóm tắt của bài báo không quá 10 dòng, trình bày bằng hai ngôn ngữ (tiếng Việt và tiếng Anh), font Arial, cỡ chữ 10, in thường.
8. Chữ "Từ khóa" in đậm, nghiêng, font Arial, cỡ chữ 10; Có từ 03÷05 từ khóa, font Arial, cỡ chữ 10, in nghiêng, ngăn cách nhau bởi dấu chấm phẩy, cuối cùng là dấu chấm.
9. Nội dung bài báo viết bằng tiếng Việt hoặc tiếng Anh; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Việt: Tiêu đề tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Tóm tắt tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Từ khóa tiếng Việt trước, tiếng Anh sau; Nếu là bài báo viết bằng tiếng Anh: Tiêu đề tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Tóm tắt tiếng Anh trước, tiếng Việt sau; Từ khóa tiếng Anh trước, tiếng Việt sau.
10. Bài báo được đánh máy trên khổ giấy A4 (21 × 29,7cm) có độ dài không quá 8 trang, font Arial, cỡ chữ 10, giãn dòng At least 12pt, Before 3pt, After 3pt; căn lề trên 2.5cm, dưới 2.5cm, trái 3cm, phải 2cm; hình vẽ phải rõ ràng, đủ nét và được định dạng dưới dạng file ảnh (*.jpg); Phương trình, công thức phải soạn thảo bằng Mathtype hoặc Equation; Phần nội dung bài báo được chia thành 02 cột, khoảng cách cột là 1cm; Trong trường hợp hình vẽ, hình ảnh có kích thước lớn, bảng biểu có độ rộng lớn hoặc công thức, phương trình dài thì cho phép trình bày dưới dạng 01 cột.
11. Tài liệu tham khảo được sắp xếp theo thứ tự tài liệu được trích dẫn trong bài báo.
    - Nếu là sách/luận án: Tên tác giả (năm), Tên sách/luận án/luận văn, Nhà xuất bản/Trường/Viện, lần xuất bản/tái bản.
    - Nếu là bài báo/báo cáo khoa học: Tên tác giả (năm), Tên bài báo/báo cáo, Tạp chí/Hội nghị/Hội thảo, Tập/Kỳ yếu, số, trang.
    - Nếu là trang web: Phải trích dẫn đầy đủ tên website và đường link, ngày cập nhật.
12. Định dạng mẫu bài báo tham khảo tại địa chỉ http://tapchikhcn.saodo.edu.vn/news/detail/198/format_paper
    Bài báo sau khi xuất bản sẽ được công bố trên http://tapchikhcn.saodo.edu.vn.

THÔNG TIN LIÊN HỆ:

Ban Biên tập Tạp chí Nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Sao Đỏ
Phòng 203, Tầng 2, Nhà B1, Trường Đại học Sao Đỏ.
Địa chỉ: Số 76, Nguyễn Thị Duệ, Thái Học 2, phường Sao Đỏ, thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương.
Điện thoại: (0220) 3587213, Fax: (0220) 3882921, Hotline: 0912 107858/0936 847980.
Website: http://tapchikhcn.saodo.edu.vn
Email: tapchikhcn@saodo.edu.vn

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 2(81) 2023

LIÊN NGÀNH ĐIỆN - ĐIỆN TỬ - TỰ ĐỘNG HÓA

NGÀNH CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

LIÊN NGÀNH CƠ KHÍ - ĐỘNG LỰC

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 2(81) 2023

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

CONTENTS

No 2(81) 2023

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

CONTENTS

No 2(82) 2023

TITLE FOR MATHEMATICS

TITLE FOR ECONOMICS

TITLE FOR CHEMISTRY AND FOOD TECHNOLOGY

TITLE FOR EDUCATION

TITLE FOR PHILOSOPHY - SOCIOLOGY - POLITICAL SCIENCE

Tính chất toán tử tích chập của phép biến đổi Fourier cosine và Laplace

Convolution operator properties of the Fourier cosine transform and the Laplace

Nguyễn Kiều Hiên

Tác giả liên hệ: nguyenkieuhien@gmail.com

Trường Đại học Sao Đỏ

Ngày nhận bài: 09/01/2023
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 22/3/2023
Ngày chấp nhận đăng: 30/6/2023

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi Fourier cosine và phép biến đổi Laplace. Thiết lập được điều kiện cần và đủ để các phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace là Unita, điều kiện đủ để tồn tại biến đổi ngược và chỉ ra toán tử ngược của chúng trong không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$, sử dụng để giải một lớp phương trình tích phân cho nghiệm dưới dạng đóng trong phân giải tín hiệu xử lý thông tin [2].

Từ khóa: Biến đổi Fourier; biến đổi Laplace; tích chập suy rộng; phương trình tích phân.

Abstract

In this paper, we research generalized convolution related to the Fourier cosine transform and the Laplace transform. Set up the necessary and sufficient condition for the Fourier cosine integral transform and Laplace are Unitary, the sufficient condition for the existence of inverse transform and show their inverse operator in the space $L_2(\mathbb{R}_+)$, used to solve a class of equation integral for closed-form solution in multiresolution analysis information handling [2].

Keywords: Fourier transform; laplace transform; generalized convolution; integral Equation.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tích chập là một phép nhân đặc biệt được định nghĩa thông qua phép biến đổi tích phân tương ứng, thường được đưa vào trong các không gian hàm mà ở đó phép nhân thông thường không tồn tại. Năm 1951, Sneddon I.N. xây dựng tích chập đối với phép biến đổi Fourier. Những tích chập đầu tiên phải kể đến là tích chập Fourier và tích chập Laplace. Sự ra đời của tích chập đã mở ra triển vọng phát triển thêm hướng nghiên cứu về lý thuyết tích chập. Cho đến nay các phép biến đổi tích phân kiểu tích chập suy rộng Fourier cosine và Laplace vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Việc nghiên cứu các tích chập và các phép biến đổi tích phân có ý nghĩa quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Nhờ đó, các phép toán Giải tích phức tạp được đơn giản hóa thành phép tính Đại số. Vì vậy, nó đặc biệt hữu ích trong việc giải các bài toán trong lý thuyết mạch, bài toán xử lý hình ảnh và xử lý tín hiệu truyền thông.

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng một số tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace. Nghiên cứu các tính chất toán tử của các tích chập suy rộng trong không gian hàm $L_2(\mathbb{R}_+)$, sử dụng để giải một lớp phương trình tích phân cho nghiệm dưới dạng đóng trong phân giải tín hiệu xử lý thông tin.

2. TÍCH CHẬP SUY RỘNG

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau đây:

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Cho $L_p(\mathbb{R}_+), 1 \le p < \infty$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx < +\infty$$

Trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi.

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Cho $L_p(\mathbb{R}_+, \rho), \rho > 0, 1 \le p < \infty$ là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx < +\infty$$

Trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi.

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+, \rho)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx\right)^{1/p}.$$

Người phản biện: 1. PGS.TS. Khuất Văn Ninh
2. TS. Nguyễn Viết Tuân

Đặc biệt, khi $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-\beta x}$ thì ta nhận được không gian hàm hai tham số α,β và ký hiệu $L_p^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)$.

Cho $L_\infty(\mathbb{R}_+)$là không gian các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x)|<+\infty$$

Trong đó chuẩn của hàm f được ký hiệu và xác định bởi.

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x)|.$$

Cho $C_0(\mathbb{R}_+)$ là không gian các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}_+$ và triệt tiêu ở ∞.

$$H(\mathbb{R}_+)=\{f(x):(Lf)(y)\in L_2(\mathbb{R}_+)\}.$$

L là phép biến đổi Laplace.

$$(Lf)(y)=\int_0^\infty f(x)e^{-yx}dx,\mathrm{Re}\,y>0.$$

F_c là phép biến đổi Fourier cosine.

$$\int_{\mathbb{R}}f(x-y)k(y)dy$$

Sau đây, ta đưa ra khái niệm tích chập của hai hàm khả tích trên $\mathbb{R}$ nhằm xác định quy tắc lấy tích chập giữa chúng.

Định nghĩa 1 ([4]). Cho f,k là các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}$. Nếu tích phân $\int_{\mathbb{R}}f(x-y)k(y)dy$ xác định với hầu hết $x\in\mathbb{R}$ (nghĩa là tập các giá trị $x\in\mathbb{R}$ để tích phân trên không tồn tại là tập có độ đo không) và hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}$ biến x thành $\int_{\mathbb{R}}f(x-y)k(y)dy$ được gọi là tích chập của hàm f và hàm k, ký hiệu là $f*k$.

Như vậy:

$$(f*k)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)k(y)dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}}f(y)k(x-y)dy.$$

Ta gọi $f*k$ là tích chập của hàm f và hàm k.

Tiếp theo, ta đưa ra khái niệm tích chập suy rộng với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace.

Định nghĩa 2 ([1]). Tích chập suy rộng của hai hàm f và k đối với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Laplace được định nghĩa như sau:

$$(f*k)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\theta(x,u,v)f(u)k(v)dudv \qquad (1)$$

Trong đó:

$$\theta(x,u,v)=\frac{v}{v^2+(x-u)^2}+\frac{v}{v^2+(x+u)^2},x>0. \qquad (2)$$

Ta gọi A_c là không gian ảnh của $L_1(\mathbb{R}_+)$ thông qua phép biến đổi Fourier cosine F_c. Với chuẩn.

$$\|f\|_{A_c}=\|F_cf\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$$

thì không gian đó là một đại số Bannach, nghĩa là nếu $f(x),k(x)\in A_c$ thì

$$f(x)k(x)\in A_c$$

Và thỏa mãn

$$\|f\,k\|_{A_c}\le\|f\|_{A_c}\|k\|_{A_c}$$

Tiếp theo, ta đưa ra khái niệm phép biến đổi tích phân liên quan đến tích chập suy rộng Fourier cosine - Laplace được xác định bởi (1).

Định nghĩa 3 ([2]). Phép biến đổi tích phân kiểu tích chập suy rộng Fourier cosine - Laplace T_k. Phép biến đổi tích phân được xác định có dạng như sau:

$$f(x)\mapsto g(x)=(T_kf)(x)$$
$$=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)(f\underset{1}{*}k)(x),x>0 \qquad (3)$$

Trong đó: k là nhân của phép biến đổi.

Định nghĩa 4 ([3]). Hai không gian metric

(X,ρ_X) và (Y,ρ_Y) gọi là đẳng cự nếu có một ánh xạ 1-1 f từ X lên Y sao cho với mọi cặp điểm $x_1,x_2\in X$ ta đều có:

$$\rho_Y(f(x_1),f(x_2))=\rho_X(x_1,x_2) \qquad (4)$$

Chẳng hạn hai không gian metric $\mathbb{C}_{[0,1]}$ và $\mathbb{C}_{[0,2]}$ đẳng cự theo phép tương ứng

$$\mathbb{C}_{[0,1]}\ni x(t)\leftrightarrow y(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)\in\mathbb{C}_{[0,2]}.$$

Sự đẳng cự giữa hai không gian metric nói lên rằng các quan hệ giữa các phần tử của chúng về mặt metric là đồng nhất.

Định nghĩa 5 ([3]). Ta nhận thấy tích vô hướng (x,y) của hai vectơ x,y trong $\mathbb{R}^k$ có các tính chất cốt yếu sau đây:

1) $(x,y)=(y,x)$.
2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.
3) $(a\,x,y)=a\,(x,y)$. Với mọi số thực α.
4) $(x,x)>0$ nếu $x\neq 0$, $(x,x)=0$ nếu $x=0$, tích vô hướng liên hệ với độ dài (chuẩn) của các vectơ bởi hệ thức.

$$(x\cdot x)=\|x\|^2$$

Như vậy, để xác định được trong không gian định chuẩn một hàm hai biến (x,y) với các tính chất 1)-4) và liên hệ với chuẩn bởi hệ thức 5). Một không gian định chuẩn mà trong đó có thể xác định được một hàm hai biến (x,y) với các điều kiện ấy gọi là một không gian unita (hay không gian tiền Hilbert).

Định lý sau đây cho ta đánh giá chuẩn của tích chập Fourier trong không gian hàm $L_r(\mathbb{R})$.

Định lý 1 ([1]). Cho hàm

$$f \in L_p(\mathbb{R}_+), k \in L_q(\mathbb{R}_+)$$

trong đó $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Thì tích chập $f * k \in L_r(\mathbb{R}_+)$ ở đây $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ Đồng thời, ta có đánh giá

$$\|f * k\|_r \leq \|f\|_p \|k\|_q$$

Định lý sau đây cho ta sự tồn tại đẳng thức nhân tử hóa của tích chập trong không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Định lý 2 ([2]). Giả sử các hàm *f(x)* và *k(x)* thuộc không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, ta có $(f * k)(x) \in A_c$ và thỏa mãn đẳng thức kiểu Parseval.

$$(f * k)(x) = F_c[(F_c f)(y)(Lk)(y)](x), \forall x > 0. \qquad (5)$$

Hơn nữa, ta cũng nhận được đẳng thức nhân tử hóa.

$$F(f * k)(x) = (F_c f)(y)(Lk)(y), \forall y > 0. \qquad (6)$$

Nhận xét 1. Ta dễ thấy rằng $L_2(\mathbb{R}_+) \subset H(\mathbb{R}_+)$. Trong một số trường hợp, việc nghiên cứu tích chập $f * k$ có thể được nhúng liên tục vào $H(\mathbb{R}_+)$. Giả sử các hàm $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ và $k(x) \in H(\mathbb{R}_+)$ sao cho tích phân.

$$(f * k)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \theta(x,u,v) f(u) k(v) du dv$$

hội tụ như tích phân lặp.

Ví dụ, tích chập $(f * k)$ tồn tại như tích phân lặp với $k(x) = \cos x \notin L_2(\mathbb{R}_+)$

thì $k(x) \in H(\mathbb{R}_+)$ khi đó

$$(Lk)(y) = \frac{y}{y^2 + 1} \in L_2(\mathbb{R}_+).$$

Hơn nữa, ta có đánh giá.

$$\|F_c[(F_c f)(y)(Lk)(y)](x)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|(F_c f)(y)(Lk)(y)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|(F_c f)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \|(Lk)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \|(Lk)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq \sqrt{2} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \|k\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Kết quả của Định lý 2 vẫn đúng với giả thiết này.

Để nghiên cứu tích chập $(f * k)$ trong không gian hàm $L_2(\mathbb{R}_+)$ ta xét định lý sau.

Định lý 3 ([5]). Giả sử rằng. $f(x), f'(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ và $k(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Khi đó, ta có đẳng thức.

$$\frac{d}{dx}(f * k)(x) = (f' * k)(x). \qquad (7)$$

Định lý 4 ([2]). Giả sử các hàm $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ và $k(x) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó tích chập $(f * k)(x)$ tồn tại, thuộc $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)(r \geq 1, \beta \geq 0, \alpha > -1)$ và ta có bất đẳng thức chuẩn.

$$\|(f * k)\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}} \cdot \beta^{-\frac{\alpha+1}{r}} \cdot \Gamma^{1/r}(\alpha+1) \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \qquad (8)$$

Nếu các hàm $f(x)$ và $k(x)$ thuộc không gian $L_1(\mathbb{R}_+)$ thì tích chập $(f * k)(x)$ tồn tại, thuộc $L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)(r \geq 1, \beta \geq 0, \alpha > -1)$ và ta có bất đẳng thức chuẩn.

$$\|(f * k)\|_{L_r^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{2}{\pi\mu} \cdot \beta^{-\frac{\alpha+1}{r}} \cdot \Gamma^{1/r}(\alpha+1) \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \qquad (9)$$

Một hệ quả quan trọng nhận được từ định lý này là bất đẳng thức Young đối với tích chập Fourier. Tuy nhiên, như ta đã biết các bất đẳng thức không còn đúng trong trường hợp $f, k \in L_2(\mathbb{R})$. Saitoh đã khắc phục hạn chế đó bằng cách xét không gian hàm $L_p(\mathbb{R}, \rho)$ và nhận được bất đẳng thức đối với tích chập.

Fourier cho bởi định lý sau:

Định lý 5 ([5]). Với các hàm không triệt tiêu $\rho_j (j = 1,2)$ ta có bất đẳng thức trong không gian $L_p(\mathbb{R})(p > 1)$ đối với tích chập Fourier.

$$\left\| \left((F_1\rho_1) \underset{F}{*} (F_2\rho_2) \right) \left(\rho_1 \underset{F}{*} \rho_2 \right)^{\frac{1}{p}-1} \right\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \|F_1\|_{L_p(\mathbb{R},|\rho_1|)} \|F_2\|_{L_p(\mathbb{R},|\rho_2|)} \qquad (10)$$

thỏa mãn với mọi $F_j \in L_p(\mathbb{R}, |\rho_j|)$.

Trong các bài toán ứng dụng, ta thường xét trường hợp $\rho_2(x) = 1, F_2(x) = G(x)$, trong đó $G(x-y)$ là hàm Green nào đó. Khi đó, nếu $\rho \in L_1(\mathbb{R}_+), G \in L_p(\mathbb{R})$ và $F \in L_p(\mathbb{R}, |\rho|)$ bất đẳng thức (10) trở thành.

$$\left\| (F\rho) \underset{F}{*} G \right\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \|\rho\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}^{1-\frac{1}{p}} \|G\|_{L_p(\mathbb{R})} \|F\|_{L_p(\mathbb{R},|\rho|)}$$

và $\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\rho(y)G(x-y)dy$ dựa vào thông số hàm đầu vào F trong các bài toán ứng dụng.

3. TÍCH CHẬP SUY RỘNG FOURIER COSINE - LAPLACE

Ta chứng minh sự tồn tại của tích chập và đánh giá bất đẳng thức chuẩn trong không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$ qua bổ đề sau.

Bổ đề 1. Giả sử rằng $k(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ hoặc $k(x)\in H(\mathbb{R}_+)$ sao cho tích phân (1) hội tụ như tích phân lặp. Khi đó điều kiện cần và đủ để phép biến đổi tích phân (3) unita trong $L_2(\mathbb{R}_+)$là:

$$\left|(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)\right|=1, y>0 \tag{11}$$

Hơn nữa, phép biến đổi ngược tồn tại và được xác định bởi:

$$f(x)=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)(g*\bar{k})(x) \tag{12}$$

trong đó $\bar{k}$ là hàm liên hợp phức của k.

Chứng minh. Điều kiện cần.

Giả sử k thỏa mãn điều kiện (11). Ta đã biết rằng $h(y), y^2h(y)\in L_2(\mathbb{R})$ nếu và chỉ nếu $(Fh)(x), \frac{d}{dx}(Fh)(x), \frac{d^2}{dx^2}(Fh)(x)\in L_2(\mathbb{R})$ là phép biến đổi Fourier. Trong trường hợp, nếu h là hàm chẵn sao cho

$h(y), y^2h(y)\in L_2(\mathbb{R}_+)$

Khi đó ta có đẳng thức sau:

$$\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)(F_c h)(x)= F_c\left(\left(1+y^2\right)h(y)\right)(x) \tag{13}$$

Từ điều kiện (11) ta có $(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)$ bị chặn, suy ra

$(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)(F_c f)(y)\in L_2(\mathbb{R}_+)$

nếu $f(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$.

Sử dụng công thức (13), ta có:

$$\begin{aligned} g(x)&=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)F_c\left[(F_c f)(y)(\mathcal{L}k)(y)\right](x)\\ &=F_c\left[(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)(F_c f)(y)\right](x)\end{aligned} \tag{14}$$

Vậy, từ đẳng thức Parseval có

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}=\|F_c f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

và điều kiện (11) cho ta đánh giá

Điều đó chứng tỏ phép biến đổi tích phân (11) là đẳng cự trong $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Mặt khác, do

$(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)(F_c f)(y)\in L_2(\mathbb{R}_+)$

nên ta có

$(F_c g)(y)=(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)(F_c f)(y)$

Sử dụng điều kiện (11) ta nhận được

$(F_c f)(y)=(1+y^2)(\mathcal{L}\bar{k})(y)(F_c g)(y)$

Điều kiện (11) cho ta biết rằng:

$(1+y^2)(\mathcal{L}\bar{k})(y)(F_c g)(y)\in L_2(\mathbb{R}_+)$

Từ (13) ta có:

$$\begin{aligned} f(x)&=F_c\left[(1+y^2)(\mathcal{L}\bar{k})(y)(F_c g)(y)\right]\\ &=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)F_c\left[(F_c g)(y)(\mathcal{L}\bar{k})(y)\right]\\ &=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)(g*\bar{k})(x).\end{aligned}$$

Vậy phép biến đổi tích phân (3) là unita trong $L_2(\mathbb{R}_+)$ và phép biến đổi ngược của nó được cho dưới dạng (12).

Điều kiện đủ.

Giả sử ngược lại, phép biến đổi tích phân (3) là unita trong $L_2(\mathbb{R}_+)$. Khi đó sử dụng đẳng thức Parseval đối với phép biến đổi Fourier cosine, ta có:

$$\begin{aligned}\|g\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}&=\left\|(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)(F_c f)(y)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\\ &=\|(F_c f)(y)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}=\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

Suy ra, toán tử

$M_\theta[f](y)=\theta(y)f(y)$

với $\theta(y)=(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)$, là unita trong $L_2(\mathbb{R}_+)$. Điều đó tương đương với điều kiện (11). Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề đã cho ta điều kiện cần và đủ của k trong không gian $H(\mathbb{R}_+)$ để phép biến đổi tích phân T_k là unita trong $L_2(\mathbb{R}_+)$. Đây là một kết quả quan trọng, đặc biệt điều kiện $k\in H(\mathbb{R}_+)$ là một sự mở rộng về mặt không gian so với $L_2(\mathbb{R}_+)$trong các kết quả trước đây. Tuy vậy, điều kiện (11) rõ ràng vẫn là điều kiện rất chặt đối với k, Định lý sau đây là một sự mở rộng đối với điều kiện (11) Định lý đưa ra cách tiếp cận mới và phương pháp giải phương trình vi - tích phân, phương trình đạo hàm riêng thường xuất hiện trong bài toán xử lý ảnh và xử lý tín hiệu.

Định lý 6. Giả sử rằng $k(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ hoặc $k(x)\in H(\mathbb{R}_+)$ sao cho tích phân (1) hội tụ như tích phân lặp. Khi đó điều kiện cần và đủ để phép biến đổi tích phân (2) unita trong $L_2(\mathbb{R}_+)$ là:

$$0<C_1\le\left|(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)\right|\le C_2<\infty \tag{15}$$

Khi đó, trong $L_2(\mathbb{R}_+)$ ta có đánh giá bất đẳng thức chuẩn sau:

$$C_1\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le\|g\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le C_2\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \tag{16}$$

Hơn nữa, phép biến đổi ngược tồn tại và được xác định qua tích chập Fourier cosine như sau:

$$f(x)=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(g\underset{F_c}{*}k_1\right)(x) \tag{17}$$

ở đó $k_1\in L_2(\mathbb{R}_+)$ sao cho

$$(F_ck_1)(y)=\frac{1}{(1+y^2)^2(\mathcal{L}k)(y)}$$

Chứng minh. Từ biểu thức (14) và điều kiện (15), ta có:

$$\begin{aligned}C_1\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}&=C_1\|F_cf\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\\&\le\left\|(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)(F_cf)(y)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\\&=\|g\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|g\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}&=\left\|(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)(F_cf)(y)\right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\\&\le C_2\|F_cf\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}=C_2\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

Suy ra (16) được chứng minh. Bên cạnh đó, từ điều kiện (15) ta có:

$$\frac{1}{C_2(1+y^2)}\le\frac{1}{(1+y^2)^2(\mathcal{L}k)(y)}\le\frac{1}{C_1(1+y^2)}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{(1+y^2)^2(\mathcal{L}k)(y)}\in L_2(\mathbb{R}_+)$$

Do đó, tồn tại hàm $k_1(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ sao cho

$$(F_ck_1)(y)=\frac{1}{(1+y^2)^2(\mathcal{L}k)(y)} \tag{18}$$

Từ biểu thức (14), (18) và đẳng thức nhân tử hóa (6), ta có:

$$\begin{aligned}(F_cf)(y)&=\frac{1}{(1+y^2)(\mathcal{L}k)(y)}(F_cg)(y)\\&=(1+y^2)\frac{1}{(1+y^2)^2(\mathcal{L}k)(y)}(F_cg)(y)\\&=(1+y^2)(F_ck_1)(y)(F_cg)(y)\\&=(1+y^2)F_c\left(g\underset{F_c}{*}k_1\right)(y)\end{aligned} \tag{19}$$

Bằng cách tác động phép biến đổi Fourier cosine F_c vào hai vế của (19) ta có thể biến đổi như sau:

$$\begin{aligned}f(x)&=F_c\left[(1+y^2)F_c(g*F_ck_1)(y)\right](x)\\&=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)F_c\left[F_c\left(g\underset{F_c}{*}k_1\right)(y)\right](x)\\&=\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(g\underset{F_c}{*}k_1\right)(x)\end{aligned}$$

Từ đó, ta nhận được phép biến đổi ngược (17). Định lý được chứng minh.

Hệ quả sau cho sự liên hệ giữa phép biến đổi tích phân T_k với các đạo hàm của nhân k.

Hệ quả 1. Giả sử $k(x)$ có đạo hàm đến cấp hai và $k(x),k''(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ hoặc $k(x),k''(x)\in H(\mathbb{R}_+)$ sao cho tích phân (1) hội tụ như tích phân lặp đối với k cũng như đối với k'' và $k(0)=0$. Khi đó, ta có:

$$(T_kf)(x)=\left(f\underset{1}{*}(k+k'')\right)(x)-k'(0)f(x) \tag{20}$$

Chứng minh. Từ (3) và (14) ta có:

$$\begin{aligned}y^2(\mathcal{L}k)(y)&=(\mathcal{L}k'')(y)-yk(0)-k'(0)\\&=(\mathcal{L}k'')(y)-k'(0)\end{aligned}$$

Mặt khác.

$$\begin{aligned}(T_kf)(x)&=F_c\left[\mathcal{L}(k+k'')(y)(F_cf)(y)\right](x)\\&\quad-F_c\left[k'(0)(F_cf)(y)\right](x)\\&=\left(f\underset{1}{*}(k+k'')\right)(x)-k'(0)f(x)\end{aligned}$$

Hệ quả được chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày sự tồn tại một số tích chập suy rộng liên quan đến phép biến đổi tích phân Fourier cosine và tích phân Laplace. Đưa ra các tính chất toán tử của các tích chập suy rộng trong không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$. Ngoài ra còn thiết lập và chứng minh các bất đẳng thức kiểu Young đối với các tích chập tương ứng. Tuy nhiên, do khuôn khổ bài báo, chúng tôi không đề cập ở đây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Anders Vretblad (2003), *Fourier analysis and its applications*, SpingerVerlag, New York.

[2]. Elias M. Stein and Rami Shakarchi (2003), *Fourier analysis an introduction,* Princeton university Press, Princeton and Oxford.

[3]. Hoàng Tuỵ (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4]. Sneddon I.N. (2001), *Fourier Transforms,* McGray-Hill, New York.

[5]. Schiff J.L. (1999), *The Laplace Transforms: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, Inc.

AUTHOR INFORMATION

Nguyen Kieu Hien

Corresponding Author: nguyenkieuhien@gmail.com

Sao Do University.