TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 20, Số 4 (2023): 682-692

Vol. 20, No. 4 (2023): 682-692

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.20.4.3638(2023)

Bài báo nghiên cứu

ĐÁNH GIÁ CHÍNH QUY CHO TOÁN TỬ LOẠI SCHRODINGER

Trần Phước An

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Trần Phước An – Email: tranphuocan2014@gmail.com

Ngày nhận bài: 16-10-2022; ngày nhận bài sửa: 31-3-2023; ngày duyệt đăng: 01-4-2023

TÓM TẮT

Gần đây, lí thuyết về toán tử loại Schrodinger thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong cả giải tích điều hòa và phương trình đạo hàm riêng. Các hướng nghiên cứu tập trung vào hai dạng toán tử dạng divergence và non – divergence. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ tiếp cận cả hai dạng trên. Chúng tôi chứng minh kết quả chính quy nghiệm trong không gian Lebesgue có trọng cho hai dạng phương trình

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u(x) + \mathbb{V}(x) u(x),$$

và

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} -D_i \left(a_{ij} D_j \right) u(x) + \mathbb{V}(x) u(x),$$

trong đó hệ số $\left(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\right)$ *thuộc lớp BMO mới liên kết với thế vị* $\mathbb{V}$ *, chứa lớp BMO cổ điển.*

Chúng tôi sử dụng một số kết quả cần thiết về các hàm cực đại liên kết với thế vị $\mathbb{V}$ *và tính bị chặn của biến đổi Riesz trong không gian Lebesgue có trọng. Kết quả của chúng tôi là tổng quát hóa một vài kết quả của (Guixia Pan & Lin Tang, 2016).*

Từ khóa: divergence; non – divergence; tính chính quy nghiệm; toán tử loại Schrodinger; không gian Lebesgue có trọng

‘

1. Giới thiệu

Hướng nghiên cứu giải tích điều hòa và phương trình đạo hàm riêng liên kết với toán tử loại Schrodinger được mở đầu bằng các công trình của các tác giả Fefferman (Fefferman, 1983), Zhong (Zhong, 1993) và Shen (Shen, 1995). Họ đã xây dựng các đánh giá nền tảng cho nghiệm cơ bản của toán tử $\mathrm{L}_0 = -\Delta + \mathrm{V}$ cũng như tính bị chặn của các biến đổi Riesz trên không gian Lebesgue L^{p} với $\mathrm{p} \in (1, \infty)$.

Cite this article as: Tran Phuoc An (2023). Regular estimation for Schrodinger operators. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 20*(4), 682-692.

Khi $\mathbb{V} = 0$, toán tử $\sum_{i,j=1}^{n} -D_i\left(a_{ij}D_j\right)u(x)$ và $-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}u(x)$ với hệ số liên tục đã được nghiên cứu trong (Gilbarg & Trudinger, 1983). Lí thuyết chính quy L^{p} cho toán tử vi phân bậc hai với hệ số không liên tục được nghiên cứu rộng rãi trong ba thập kỉ. Một lớp hệ số không liên tục quan trọng chính là lớp hàm VMO. Lí thuyết về toán tử vi phân hệ số VMO được khởi xướng bởi (Chiarenza, 1991) và tiếp nối bởi (Chiarenza, 1993) và (Bramanti & Cerutti, 1993). Một số kết quả khác cho toán tử dạng divergence với hệ số BMO được phát triển bởi nhóm nghiên cứu của Caffarelli (Caffarelli & Peral, 1998) và sau đó là Byun (Byun, 2004). Năm 2020, tác giả Bùi Thế Anh (Bui, 2020) đã xây dựng lí thuyết chính quy cho toán tử $u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}u(x)$ trên không gian Musielak-Orlicz.

Khi $\mathbb{V} \neq 0$, tác giả Bramanti và cộng sự (Bramanti, 2012) xây dựng kết quả chính quy L^{p} cho toán tử $Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}u(x) + \mathbb{V}(x)u(x)$ với hệ số VMO và thế vị $\mathbb{V}$ thỏa mãn điều kiện Holder ngược. Đặc biệt là nhóm tác giả Guixia Pan và Lin Tang (Guixia Pan & Lin Tang, 2016) đã mở rộng kết quả trên cho cả toán tử loại Schrodinger dạng **divergence** và **non - divergence** với hệ số thuộc không gian $BMO_\theta(\rho)$ là mở rộng thật sự của không gian BMO cổ điển. Lớp không gian $BMO_\theta(\rho)$ này được giới thiệu trong (Bongioanni, 2011). Gần đây, nhóm nghiên cứu của tác giả Lê Xuân Trường (Le et al., 2020) đã mở rộng kết quả của nhóm tác giả Guixia Pan và Lin Tang cho không gian Orlicz.

Kế thừa các kĩ thuật trong (Guixia Pan & Lin Tang, 2016) và (Le et al., 2020), chúng tôi xây dựng đánh giá Lebesgue có trọng cho cả toán tử loại Schrodinger dạng divergence và non – divergence.

$$L = \sum a_{ij}D_{ij} + \mathbb{V} \text{ và } \mathcal{L} = \sum -D_i\left(a_{ij}D_j\right) + \mathbb{V}.$$

Mục đích chính của bài báo là xây dựng các đánh giá cho D^2u với $Lu = F$ và D^2v với $Lv = div(F)$ trong không gian Lebesgue có trọng (xem Định lí 3.1 và 3.2). Trường hợp $\omega \equiv 1$ đã được chứng minh bởi Guixia Pan và Lin Tang (Guixia Pan & Lin Tang, 2016).

Cấu trúc của bài báo: phần 1 giới thiệu lược sử vấn đề, phần 2 cung cấp một số kiến thức chuẩn bị như không gian hàm, các đánh giá cần thiết cho chứng minh định lí chính. Nội dung chính của phần 2 là xây dựng bất đẳng thức loại Fefferman – Stein cho các hàm cực đại liên kết với thế vị $\mathbb{V}$ (xem Bổ đề 2). Cuối cùng, tính chính quy cho các toán tử loại Schrodinger được đưa ra trong mục 3.

Chúng tôi xin lưu ý rằng kí hiệu C để chỉ hằng số dương không phụ thuộc vào các tham số chính cố định và giá trị có thể thay đổi trên cùng một dòng hoặc giữa các dòng. Kí hiệu $\lambda B(x,r) = B(x,\lambda r)$.

2. Đánh giá chính quy cho toán tử loại Schrodinger

Trong suốt bài báo này, ta luôn giả sử u là hàm số xác định trên $\mathbb{R}^n$. Ta có các kí hiệu sau đây

$$D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j} = u_{x_j},\ D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}.$$

Ta kí hiệu vecto gradient và ma trận Hessian của u lần lượt là

$$Du = \nabla u = u_x,\ D^2 u = u_{xx} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

2.1. *Các không gian hàm*

2.1.1. Không gian Sobolev và không gian Lebesgue có trọng

Ta nói ω là một hàm trọng nếu $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ không âm.

Định nghĩa 2.1. *Cho hàm trọng ω thỏa mãn*

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{\frac{1}{1-p}}\mathrm{d}x\right)^{p-1} < \infty,$$

với mọi quả cầu B trong $\mathbb{R}^n$ và $1 < p < \infty$. Khi đó ta nói $\omega \in A_p$.

Đối với trường hợp $p = 1$ và $p = \infty$, ta định nghĩa như sau:

(i) Gọi $\mathbf{M}$ là toán tử cực đại *Hardy – Littlewood*, khi đó

$\omega \in A_1 \Leftrightarrow \exists C > 0 : \mathbf{M}\omega \leqslant C\omega.$

(ii) Kí hiệu $A_\infty = \bigcup_{p \geqslant 1} A_p$.

Cho ω là một hàm trọng và tập Ω mở trong $\mathbb{R}^n$, ta định nghĩa không gian Lebesgue có trọng như sau :

Định nghĩa 2.2.

Tập tất cả hàm f khả tích Lebesgue trên Ω sao cho

$$\|f\|_{L^p_\omega(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, \omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

được gọi là không gian Lebesgue có trọng ω, kí hiệu là $L^p_\omega(\Omega)$.

2.1.2. Không gian B_p

Ta nói hàm thế vị không âm $\mathbb{V} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ thuộc lớp B_p *với* $1 < p \leqslant \infty$ nếu tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và số $r \in (0, \infty)$ thì ta luôn có

$$\left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \mathbb{V}^p(y)\,\mathrm{d}y \right)^{1/p} \leqslant C \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \mathbb{V}(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

Ta nói $\mathbb{V}$ thỏa mãn điều kiện $B^*_{\frac{n}{2}}$, nếu như:

(i) $\mathbb{V}(x) \in B_{\frac{n}{2}}$ và $\mathbb{V}(x) \leqslant \dfrac{C}{\rho^2(x)}$,

(ii) $|\nabla \mathbb{V}| \leqslant \dfrac{C}{\rho^3(x)}$ và $|\nabla^2 \mathbb{V}| \leqslant \dfrac{C}{\rho^4(x)}$.

2.1.3. Không gian $BMO_\theta(\rho)$

Ta giới thiệu hàm ρ liên kết với thế vị $\mathbb{V}$ đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết giải tích điều hòa liên kết với toán tử loại Schrodinger:

Định nghĩa 2.3. *Hàm số* $\rho : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$, *được xác định bởi*

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x,r)} \mathbb{V}(y)\,\mathrm{d}y \leqslant 1 \right\}.$$

Ta có kết quả sau:

Bổ đề 2.4. (Shen, 1995) Giả sử $p \geqslant \dfrac{n}{2}$ và $\mathbb{V} \in B_p$. Khi đó tồn tại $k_0 > 0$ và $C_0 > 0$ sao cho

$$\frac{1}{C_0} \rho(x) \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)} \right)^{-k_0} \leqslant \rho(y) \leqslant C_0 \rho(x) \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)} \right)^{\frac{k_0}{(k_0+1)}}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Định nghĩa 2.5. Ta nói *hàm* f *thuộc không gian BMO cổ điển nếu*

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} \left| f(y) - f_B \right| \mathrm{d}y < \infty,$$

trong đó $f_B = \dfrac{1}{|B(x_0, r)|} \displaystyle\int_{B(x_0,r)} f(x)\mathrm{d}x$.

Ta xét một mở rộng không gian BMO cổ điển này bằng cách liên kết với hàm ρ đã định nghĩa ở trên:

Định nghĩa 2.6. *Cho* $\theta > 0$, *kí hiệu* $BMO_\theta(\rho)$ *là tập các hàm* f *sao cho*

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| f(y) - f_B \right| \mathrm{d}y \leqslant C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{\theta},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ *và* $r > 0$.

Ta nhận xét rằng $BMO \subset BMO_\theta(\rho)$ và là mở rộng thật sự của không gian BMO cổ điển. Chuẩn trong không gian $BMO_\theta(\rho)$ kí hiệu là $[f]_\theta$, chính là infimum tất cả các hằng số C thỏa mãn bất đẳng thức trên.

2.3. Hàm cực đại và tính bị chặn

Bổ đề 2.7. **(**Bongioanni, 2011, Mệnh đề 2**)** *Tồn tại một dãy $\{x_k\}_{k\geq 1}$ trong $\mathbb{R}^n$ sao cho họ quả cầu $\left\{Q_k = B\left(x_k, \rho\left(x_k\right)\right)\right\}_{k\geq 1}$ thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) $\bigcup_{k\geq 1} Q_k = \mathbb{R}^n$.

(ii) Với mọi $\sigma \geqslant 1$ tồn tại các hằng số $C > 0$ và $N_1 > 0$ sao cho $\sum_{k\geqslant 1} 1_{\sigma Q_k} \leqslant C\sigma^{N_1}$.

Trước hết ta xét một toán tử cực đại mới là mở rộng của toán tử cực đại cấp phân số,

$$\mathbf{M}_p f(z) = \sup_{z\in B(x_0,r)} \left(\frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ta có bổ đề nổi tiếng sau đây.

Bổ đề 2.8. *Với mọi $f \in L^p_\omega(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ và $\omega \in A_p$. Khi đó ta có*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{M}_p f(x)|^p \, \omega(x)\mathrm{d}x \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \omega(x)\mathrm{d}x.$$

Thực chất, ta có thể hiểu đây là tính bị chặn của chuẩn trong không gian Lebesgue có trọng. Tức là ta có thể viết lại

$$\left\|\mathbf{M}_p f\right\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| f\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Giả sử $\alpha > 0$, kí hiệu $\mathbb{B}_{\rho,\alpha}$ là họ các quả cầu có bán kính thỏa $r \leqslant \alpha\rho$, tức là

$$\mathbb{B}_{\rho,\alpha} := \left\{B(y,r) : y \in \mathbb{R}^n, r \leqslant \alpha\rho(y)\right\}.$$

Cho $\alpha > 0, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ và $x \in \mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa

$$\mathbf{M}_{\rho,\alpha} g(x) = \sup_{x\in B\in\mathbb{B}_{\rho,\alpha}} \frac{1}{|B|} \int_B |g(y)| \, \mathrm{d}y$$

và

$$\mathbf{M}^\sharp_{\rho,\alpha} g(x) = \sup_{x\in B\in\mathbb{B}_{\rho,\alpha}} \frac{1}{|B|} \int_B |g(y) - g_B| \, \mathrm{d}y.$$

Không mất tính tổng quát, ta luôn giả sử rằng $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Khi đó ta có

Bổ đề 2.9. *(*Guixia Pan & Ling Tan, 2016, Bổ đề 3.8)

Giả sử $a_{ij} \in BMO_\theta(\rho), \forall i, j \in \{1,2,..,n\}$ *và* $\mathbb{V} \in B^*_{\frac{n}{2}}$. *Với mỗi* $1 < q, v < \infty$, *tồn tại hằng số* C *sao cho* với mọi $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\mathbf{M}^\sharp_{\rho,4}\left(D_{ij}u\right)(z) \leqslant C\sum_{i,j=1}^n \left[a_{ij}\right]_\theta \mathbf{M}_{qv}\left(D_{ij}u\right)(z) + C\mathbf{M}_q\left(Lu\right)(z).$$

Bổ đề 2.10. (Guixia Pan & Ling Tan, 2016, Bổ đề 3.9)

Cho $1 < q, v < \infty, a_{ij} \in BMO_\theta(\rho), \forall i, j \in \{1,2,..,n\}$ *và* $\mathcal{L}u = div\left(F\right)$. *Nếu* $\mathbb{V} \in B_n$ *thì tồn tại hằng số* C *sao cho* với mọi $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\mathbf{M}^\sharp_{\rho,4}\left(D_m u\right)(z) \leqslant C\sum_{i,j=1}^n \left[a_{ij}\right]_\theta \left(\mathbf{M}_{qv}\left(D_j u\right)(z) + \mathbf{M}_q\left(D_j u\right)(z)\right) + C\mathbf{M}_q\left(F\right)(z),$$

trong đó $m \in \{1,\cdots,n\}$ *và đúng với hầu khắp nơi* $z \in \mathbb{R}^n$.

Bổ đề 2.11. (Guixia Pan & Ling Tan, 2016, Bổ đề 3.10)

Giả sử $1 < q, v < \infty$, $a_{ij} \in BMO_\theta\left(\rho\right), \forall i, j \in \{1,2,..,n\}$. *Nếu* $\mathbb{V} \in B^*_{\frac{n}{2}}$ *thì tồn tại hằng số* C *sao cho*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |D_{ij}u(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant C\sum_{i,j=1}^n [a_{ij}]_\theta \inf_{y\in Q}\mathbf{M}_{qv}\left(D_{ij}u\right)(y) + C\inf_{y\in Q}\mathbf{M}_q\left(Lu\right)(y),$$

trong đó $Q = B(x_0, \rho(x_0))$.

Bổ đề 2.12. (Guixia Pan & Ling Tan, 2016, Bổ đề 3.11)

Cho $a_{ij} \in BMO_\theta(\rho), \forall i, j \in \{1,2,..,n\}$ *và* $\mathcal{L}u = div\left(F\right)$. *Giả sử* $\mathbb{V} \in B_n$ *và* $1 < q, v < \infty$. *Khi đó tồn tại hằng số* C *sao cho*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|D_m u(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant C\sum_{i,j=1}^n \left[a_{ij}\right]_\theta \left(\inf_{y\in Q}\mathbf{M}_{qv}\left(D_j u\right)(y) + \inf_{y\in Q}\mathbf{M}_q\left(D_j u\right)(y)\right) + C\inf_{y\in Q}\mathbf{M}_q\left(F\right)(y),$$

trong đó $Q = B\left(x_0, \rho\left(x_0\right)\right)$ *và* $m, k \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Cuối cùng ta mở rộng kết quả so sánh giữa các toán tử cực đại đã định nghĩa. Cho E là tập đo được Lebesgue và $\omega \in A_p$ là một hàm trọng, kí hiệu:

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)\mathrm{d}x.$$

Khi đó ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.13. *Cho* $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ *là dãy các quả cầu ở* Bổ đề 2.7 *và* $1 < p < \infty$. *Khi đó tồn tại* β, γ *và hằng số* C *sao cho khi đó với mọi* $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *ta có*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathbf{M}_{\rho,\beta} g(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathbf{M}^{\sharp}_{\rho,\gamma} g(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y + C\sum_k \omega(Q_k)\left(\frac{1}{|2Q_k|}\int_{2Q_k} |g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p,$$

trong đó $2Q_k$ *là quả cầu có cùng tâm với* Q_k *nhưng có bán kính gấp đôi. Hơn nữa, ta có thể chọn* $\beta = \frac{1}{2C_0^2}$ (C_0 là hằng số xuất hiện trong Bổ đề 2.4) và $\gamma = 2$.

Chứng minh. Ý tưởng chính của bổ đề này là sử dụng bất đẳng thức Fefferman – Stein trong (Pradolini & Salinas, 2007) và sử dụng ý tưởng chứng minh của Bổ đề 2 trong (Bongioanni, Harboure, & Salinas, 2011). Trước hết ta định nghĩa các hàm sau

$$\mathbf{M}_Q g(y) = \sup_{y\in B\in\mathcal{F}(Q)} \frac{1}{|B|}\int_{B\cap Q} |g(z)|\,\mathrm{dz}$$

và

$$\mathbf{M}^{\sharp}_Q g(y) = \sup_{y\in B\in\mathcal{F}(Q)} \frac{1}{|B\cap Q|}\int_{B\cap Q} |g(z) - g_{B\cap Q}|\,\mathrm{dz},$$

trong đó $\mathcal{F}(Q) = \{B(y_0, r) : y_0 \in Q, r > 0\}$. Ta đặt $\beta = \frac{1}{2C_0^2}$ (C_0 là hằng số xuất hiện trong Bổ đề 2.4) và $\gamma = 4$, bằng cách chọn như vậy, theo trang 121 trong (Bongioanni, 2011) ta thu được

$$\mathbf{M}_{\rho,\beta} g(y) \leqslant \mathbf{M}_{2Q}(g\chi_{2Q})(y) \quad \text{và} \quad \mathbf{M}^{\sharp}_{2Q}(g\chi_{2Q})(y) \leqslant C\mathbf{M}^{\sharp}_{\rho,2} g(y).$$

Hơn nữa, theo định nghĩa thì

$$\mathbf{M}_Q g(y) \leqslant \mathbf{M}^{\sharp}_Q g(y) + \frac{1}{|Q|}\int_Q |g|_Q\,\mathrm{d}y = \mathbf{M}^{\sharp}_Q g(y) + |g|_Q.$$

Vậy $\mathbf{M}_{\rho,\beta} g(y) \leqslant C\mathbf{M}^{\sharp}_{\rho,2} g(y) + C|g|_{2Q}$.

Kết hợp với tính chất của họ các quả cầu trong **Bổ đề 2.4** ta thấy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathbf{M}_{\rho,\beta} g(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y &\leqslant \sum_k \int_{Q_k} \left|\mathbf{M}_{\rho,\beta} g(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y \\
&\leqslant C\sum_k \int_{Q_k} \left|\mathbf{M}^{\sharp}_{\rho,2}(g)(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y + C\sum_k \int_{Q_k} \left(|g|_{2Q_k}\right)^p \omega(y)\mathrm{d}y \\
&\leqslant C\sum_k \int_{Q_k} \left|\mathbf{M}^{\sharp}_{\rho,2}(g)(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y + C\sum_k \left(|g|_{2Q_k}\right)^p \int_{Q_k} \omega(y)\mathrm{d}y \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathbf{M}^{\sharp}_{\rho,2}(g)(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y + C\sum_k \omega(Q_k)\left(|g|_{2Q_k}\right)^p.
\end{aligned}$$

Nhớ lại rằng $|g|_{2Q_k} = \frac{1}{|2Q_k|}\int_{2Q_k} |g(y)|\,\mathrm{d}y$, chứng minh được hoàn thành. □

3. Kết luận

Ta chứng minh các kết quả chính của bài báo.

Định lí 3.1. *Giả sử* $a_{ij} \in BMO_\theta(\rho)$, $1 < p < \infty$ *và* $\omega \in A_p$. *Nếu* $\mathbb{V} \in B^*_{\frac{n}{2}}$ *thì tồn tại các hằng số* $\varepsilon > 0$ *v* $C > 0$ *à sao cho nếu* $[a_{ij}]_\theta < \varepsilon$ *thì*

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\left\|Lu\right\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)},$$

Chứng minh.

Theo định nghĩa của $\mathbf{M}_{\rho,\beta}$, ta có

$$\left\|D_{ij}u\right\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |(D_{ij}u)(x)|^p\ \omega(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{M}_{\rho,\beta}(D_{ij}u)(x)|^p\ \omega(x)\mathrm{d}x$$

Sử dụng Bổ đề 2.13 ta được

$$\left\|D_{ij}u\right\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathbf{M}^\sharp_{\rho,4}(D_{ij})(x)\right|^p \omega(x)\mathrm{d}x + C\sum_k \omega(Q_k)\left(\frac{1}{|2Q_k|}\int_{2Q_k}|D_{ij}(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p. \quad (3.1)$$

Chọn $q, v > 1$ sao cho $1 < qv < p$. Theo Bổ đề 2.9 ta có

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathbf{M}^\sharp_{\rho,4}(D_{ij})(x)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}x \leqslant C\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n}\left|[a_{ij}]_\theta \mathbf{M}_{qv}(D_{ij}u)(x)\right|^p \omega(x)\mathrm{d}x + C\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathbf{M}_q(Lu)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\varepsilon^p \sum_{i,j=1}^n \left\|\mathbf{M}_{qv}(D_{ij}u)\right\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} + C\left\|\mathbf{M}_q(Lu)\right\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Tiếp tục sử dụng Bổ đề 2.11 và ý *(ii)* Bổ đề 2.7 ta thu được

$$\sum_k \omega(2Q_k)\left(\frac{1}{|2Q_k|}\int_{2Q_k}|D_{ij}(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p = \sum_k \int_{2Q_k}\left(\frac{1}{|2Q_k|}\int_{2Q_k}|D_{ij}(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \omega(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\varepsilon^p \sum_k \int_{2Q_k}\sum_{i,j=1}^n\left|\mathbf{M}_{qv}(D_{ij}u)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x + C\sum_k\int_{2Q_k}|\mathbf{M}_q(Lu)(x)|^p\ \omega(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\varepsilon^p \int_{2Q_k}\sum_{i,j=1}^n\left|\mathbf{M}_{qv}(D_{ij}u)(x)\right|^p\sum_k \chi_{2Q_k}\omega(x)\mathrm{d}x + C\int_{\mathbb{R}^n}|\mathbf{M}_q(Lu)(x)|^p\ \sum_k\chi_{2Q_k}\omega(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i,j=1}^n\left|\mathbf{M}_{qv}(D_{ij}u)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x + C\int_{\mathbb{R}^n}|\mathbf{M}_q(Lu)(x)|^p\ \omega(x)\mathrm{d}x.$$

Áp dụng hai đánh giá trên vào (3.1) ta được

$$\left\|D_{ij}u\right\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\varepsilon^p \sum_{i,j=1}^n \left\|\mathbf{M}_{qv}(D_{ij}u)\right\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} + C\left\|\mathbf{M}_q(Lu)\right\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.2)$$

Cuối cùng ta sử dụng tính bị chặn của toán tử cực đại thì thu được

$$\|\mathbf{M}_{qv}(D_{ij}u)\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|D_{ij}u\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \quad \text{và} \quad \|\mathbf{M}_q(Lu)\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|Lu\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Một lần nữa, sử dụng đánh giá này vào (3.2) thì

$$\|D_{ij}u\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\varepsilon^p \sum_{i,j=1}^n \|D_{ij}u\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} + C\|Lu\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Ta lấy tổng vế trái theo $\mathrm{i, j} = 1,..,\mathrm{n}$ và chọn $\varepsilon^p < \frac{1}{2Cn^2}$, khi đó ta nhận được

$$\|D^2u\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|Lu\|^p_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Vậy ta đã chứng minh xong định lí. □

Định lí 3.2. *Cho* $a_{ij} \in BMO_\theta(\rho), \forall i, j \in \{1,2,..,n\}$, $1 < p < \infty$ *và* $\omega \in A_p$. *Giả sử* $\mathcal{L}u = div(F)$, *nếu* $\mathbb{V} \in B_n$ *thì tồn tại các hằng số* $\varepsilon > 0$ *và* $C > 0$ *sao cho nếu* $[a_{ij}]_\theta < \varepsilon$ *thì*

$$\|Du\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|F\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Chứng minh. Chứng minh hoàn toàn tương tự **Định lí 3.1** trong đó **Bổ đề 2.10** thay cho **Bổ đề 2.9** và **Bổ đề 2.12** thay cho **Bổ đề 2.11.** □

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bongioanni, B., Harboure, E., & Salinas, O. (2011). Classes of weights related to Schrodinger operator. *J. Math. Anal. Appl*, 373, 563-579.

Bongioanni, B., Harboure, E., & Salinas, O. (2011). Commutators of Riesz transforms related to Schrödinger operators. *J. Fourier Anal, 17,* 115-134.

Bui, T. A. (2020). Regularity Estimates for Nondivergence Parabolic Equations on Generalized Orlicz Spaces. *International Mathematics Research Notices, 2021*(14), 11103-11139.

Bramanti, M., & Brandolini, L., & Harboure, E., & Viviani, B. (2012). Global $W^{2,p}$ estimates for nondivergence elliptic operators with potentials satisfying a reverse Hölder condition. *Ann. Mat., 191,* 339-362.

Bramanti, M., & Cerutti, M. (1993). $W_p^{1,2}$ solvability for the Cauchy–Dirichlet problem for parabolic equations with VMO coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, *18,* 1735-1763.

Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer New York.

Byun, S. (2004). Elliptic equations with BMO coefficients in Lipschitz domains. *Trans. Amer. Math. Soc., 357,* 1025-1046.

Caffarelli, L., & Peral, I. (1998). On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form. *Comm. Pure Appl. Math*., *51,* 1-21.

Chiarenza, F., & Frasca, M., & Longo, P. (1991). $W^{2,p}$ estimates for nondivergence form elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ric. Mat.*, *40*, 149-168.

Chiarenza, F., & Frasca, M., & Longo, P. (1993). $W^{2,p}$ solvability of the Dirichlet problem for nondivergence form elliptic equations with VMO coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc., 336*, 841-853.

Fefferman, C. (1983). The uncertainty principle. *Bull. Amer. Math. Soc., 9*(2), 129-206.

García-Cuerva, J., & Rubio de Francia, J. (1985). *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.* NorthHolland, Amsterdam–New York.

Gilbarg, D., & Trudinger, N. (1983). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (2nd ed.). Springer Verlag, Berlin.

Guixia Pan & Lin Tang (2016). *Solvability for Schrodinger equations with discontinuous coefficients.*

John, F., & Nirenberg, L. (1961). On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math*., *4*.

Kurata, K., & Sugano, S. (2000). Estimate of the fundamental solution for magnetic Schrodinger operators and their applications. *Tohoku Math. J.*, *52*.

Le, X. T., & Tran, T. D., & Nguyen, N. T., & Nguyen, T. T. (2020). Global Orlicz estimates for non-divergence elliptic operators with potentials satisfying a reverse Holder condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *491*(2), 124-352.

Okazawa, N. (1984). An L^p theory for Schrodinger operators with nonnegative potentials. *J. Math. Soc. Japan*.

Pradolini, G., & Salinas (2007). Commutators of singular integrals on spaces of homogeneous type. *Czechoslov. Math. J*., *57*(1), 75-93.

Sarason, D. (1975). *Functions of vanishing mean oscillation*. *Trans. Amer. Math. Soc.*

Shen, Z. (1994). On the Neumann problem for Schodinger operators in Lipschitz domains. *Indiana Univ. Math. J., 453*.

Shen, Z. (1995). L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials. *Ann. Inst. Fourier* (Greno-ble), *45*, 513-546.

Shen, Z. (1996). Estimates in L^p for magnetic Schrodinger operators. *Indiana Univ. Math. J., 45*.

Stein, E. M. (1993). *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

Zhong, J. (1993). *Harmonic analysis for some Schrodinger type operators.* Ph.D. thesis, Princeton University.

REGULAR ESTIMATION FOR SCHRODINGER OPERATORS

Tran Phuoc An

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

Corresponding author: Tran Phuoc An – Email: tranphuocan2014@gmail.com

Received: October 16, 2022; Revised: March 31, 2023; Accepted: April 01, 2023

ABSTRACT

Recently, the theory of Schrodinger operators has attracted the interest of many mathematicians in both harmonic analysis and partial differential equations. Research directions focus on two types of operators in the form of divergence and non-divergence. This paper focuses on these two types. We prove the regularization results in weighted Lebesgue spaces for two types of equations:

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u(x) + \mathbb{V}(x)u(x),$$

and

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} -D_i \left(a_{ij} D_j \right) u(x) + \mathbb{V}(x)u(x),$$

where the coefficient $\left(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\right)$ *belongs to the new BMO class associated with the potential* $\mathbb{V}$*, which contains the classical BMO class.*

We used some necessary results on maxima functions associated with the potential $\mathbb{V}$ *and boundedness of the Riesz transform in weighted Lebesgue space. Our results generalize some of the results of Pan and Tang (2016).*

Keywords: divergence; non-divergence, Schrodinger equation; Schrodinger operator; weighted Lebesgue space