



PHÂN TÍCH ỨNG XỬ ĐỘNG CỦA TẤM MINDLIN CHỊU TÁC DỤNG CỦA HỆ KHỐI LƯỢNG – Lò xo – CẢN, CHUYỂN ĐỘNG VỚI VẬN TỐC BIẾN THIÊN SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ CHUYỂN ĐỘNG - MEM

DYNAMIC ANALYSIS OF NON-UNIFORM MOTION OF MINDLIN PLATE SUBJECTED TO A MOVING MASS-SPRING-DAMPER SYSTEM USING THE MEM

➔ PGS.TS **Trần Minh Thi** - Bộ môn Sức bền – Kết cấu; Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại Học Bách Khoa HCM – Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh; 093 841 4090 – Email: tmthi@hcmut.edu.vn

➔ **Nguyễn Nam Nguyễn** - Học viên cao học ngành Kỹ thuật Xây dựng, Bộ môn Sức bền – Kết cấu, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại Học Bách Khoa HCM – Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh; 032 772 2118 – Email: nnnguyen.sdh212@hcmut.edu.vn

TÓM TẮT: Nghiên cứu này tập trung phân tích ứng xử động lực học của tấm Mindlin đặt trên nền Pasternak, đặc biệt dưới tác động của hệ khối lượng – lò xo – cản chuyển động với vận tốc biến thiên. Áp dụng mô hình Reissner – Mindlin cùng với phương pháp phần tử chuyển động (Moving Element Method – MEM), tấm được chia nhỏ thành các phần tử đẳng tham số tứ giác 9 nút, cho phép mô phỏng chính xác hơn cơ chế làm việc phức tạp của kết cấu.

Một chương trình tính toán chuyên biệt đã được phát triển trên Matlab để mô phỏng chi tiết ứng xử động lực học của tấm Mindlin dưới tác động của hệ tải trọng chuyển động. Độ chính xác của chương trình được kiểm chứng thông qua đối chiếu kết quả với các nghiên cứu đã công bố, khẳng định độ tin cậy và hiệu quả của phương pháp đề xuất. Bên cạnh đó, nghiên cứu còn mở rộng khảo sát tác động của các tham số quan trọng như khối lượng, độ cứng lò xo, hệ số cản, vận tốc của hệ tải trọng, cùng với các đặc tính nền như chiều dày, độ cứng nền,... đến động học của tấm Mindlin.

Những kết quả thu được không chỉ làm sáng tỏ cơ chế ứng xử động của tấm mà còn cung cấp cơ sở khoa học vững chắc cho thiết kế và tối ưu hóa kết cấu chịu tải trọng động. Ngoài ra, nghiên cứu đã đi sâu phân tích vai trò của các yếu tố đặc thù như biên độ và bước sóng gồ ghề bề mặt, giúp hiểu rõ hơn ảnh hưởng của chúng đến sự ổn định và khả năng chịu tải của tấm Mindlin.

Từ khóa: Ứng xử động lực học, Tấm Mindlin, Nền Pasternak, Phương pháp phần tử chuyển động

ABSTRACT: This study focuses on analyzing the dynamic behavior of Mindlin plates on a Pasternak foundation, particularly under the influence of a moving mass-spring-damper system with variable velocity. By applying the Reissner–Mindlin model in conjunction with the Moving Element Method (MEM), the plate is discretized into nine-node isoparametric quadrilateral elements, enabling a more accurate simulation of the complex working mechanisms of the structure.

A specialized computational program was developed in Matlab to simulate in detail the dynamic response of the Mindlin plate under the effects of the moving load system. The accuracy of the program was verified by comparing the results with published studies, affirming the reliability and efficiency of the proposed method. Additionally, the study extends to investigate the effects of key parameters such as mass, spring stiffness, damping coefficient, velocity of the moving load system, as well as foundation characteristics like thickness and stiffness, on the dynamic behavior of the Mindlin plate.

The findings not only elucidate the dynamic response mechanism of the plate but also provide a robust scientific foundation for the design and optimization of structures subjected to dynamic loads. Furthermore, the research delves into the roles of specific factors such as surface roughness amplitude and wavelength, offering deeper insights into their impact on the stability and load-bearing capacity of the Mindlin plate.

Keywords: Dynamic behavior, Mindlin plate, Pasternak foundation, Moving Element Method – MEM

1. Giới thiệu

Trong bối cảnh phát triển kinh tế - xã hội, nhu cầu xây dựng các tuyến đường giao thông và mở rộng sân bay ngày càng gia tăng, đòi hỏi sự bền vững và tính thẩm mỹ cao trong các công trình. Điều này dẫn đến yêu cầu cấp thiết về việc nghiên cứu chuyên sâu ứng xử của cấu trúc mặt đường nhằm đáp ứng các tiêu chuẩn kỹ thuật và tối ưu hóa độ bền.

Hiện nay, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào phân tích ứng xử của các cấu trúc tấm dưới các dạng tải trọng chuyển động, bao gồm tải trọng tập trung, tải trọng phân bố, và tải trọng điều hòa. Tuy nhiên, một số công trình vẫn gặp phải hư hỏng nghiêm trọng chỉ sau một thời gian ngắn sử dụng, đặt ra vấn đề về độ chính xác của mô hình nghiên cứu cũng như các điều kiện thi công thực tế.

Bằng phương pháp giải tích, Kim và Reosset

(1998) [1] đã khảo sát ứng xử của tấm trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng là hằng số và tải trọng điều hòa di chuyển. Huang và Thambiratnam (2002) [2] đã khảo sát ứng xử tĩnh và động của tấm trên nền đàn hồi chịu tải trọng tĩnh, tải trọng chuyển động đều và chuyển động có gia tốc. Kim (2004) [3] đã phân tích ứng xử của tấm trên nền đàn hồi và nền hai thông số dưới tác dụng đồng thời của tải trọng nén và tải trọng di động. Sun (2005) [4] đã xây dựng lời giải giải tích cho bài toán tấm mỏng Kirchhoff trên nền đàn nhớt dưới tác dụng của tải trọng tập trung điều hòa và tải trọng dạng đường điều hòa di chuyển.

Tuy phương pháp giải tích có ưu điểm về độ chính xác cao khi giải phương trình vi phân chuyển động của tấm, nhưng với các bài toán phức tạp như hệ nhiều bậc tự do hoặc tải trọng có gia tốc, phương pháp này trở nên khó khăn và không khả thi.

Để giải quyết các nhược điểm của phương pháp giải tích cho bài toán tấm chịu tải trọng di động, phương pháp MEM đã được áp dụng rộng rãi trong các nghiên cứu, đặc biệt là với các bài toán liên quan đến tấm Mindlin. Cao và cộng sự (2015) [5] đã phân tích ứng xử của tấm dày Mindlin trên nền Pasternak chịu tác dụng của tải trọng di chuyển. Cao và cộng sự (2016) [6] đã phân tích ứng xử động tấm Mindlin trên nền đàn nhớt chịu tải trọng điều hòa di động sử dụng phương pháp phần tử chuyển động. Lương và cộng sự (2018) [7] đã phân tích ứng xử tĩnh và động của tấm Mindlin trên nền đàn nhớt sử dụng phương pháp MEM. Lương và cộng sự (2020) [8] đã phân tích ứng xử động của tấm biến đổi chức năng FGM trên nền Pasternak chịu tải trọng điều hòa di chuyển. Trần và cộng sự (2023) [9] đã phân tích ứng xử động của tấm Mindlin chịu tác dụng của hệ khối lượng – lò xo – cản di chuyển sử dụng phương pháp phần tử chuyển động – MEM.

Tuy nhiên, các nghiên cứu trên tập trung cho bài toán ứng xử của tấm chịu tải di động với vận tốc là hằng số. Vì vậy, nghiên cứu này phân tích ứng xử động của tấm Mindlin chịu tác dụng của hệ khối lượng – lò xo – cản chuyển động với vận tốc biến thiên. Các giai đoạn tăng tốc, giảm tốc và các thông số như khối lượng, độ cứng lò xo, độ cứng nền, kháng cản nền,... được khảo sát nhằm cung cấp cái nhìn toàn diện hơn về ứng xử động của tấm chịu tải di động.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Ứng suất và biến dạng của tấm

Trường biến dạng của một điểm bất kỳ trong tấm theo lý thuyết tấm Mindlin được xác định như sau:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

$\epsilon = \epsilon_m + z\kappa$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{0,x} \\ \beta_y + w_{0,y} \end{Bmatrix}$$

trong đó:

ϵ_m – là trường biến dạng màng của tấm

κ – là độ cong của tấm

Mối quan hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng trong tấm Mindlin tuân theo định luật Hooke:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$$\tau = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

trong đó:

Các hằng số vật liệu được xác định theo công thức:

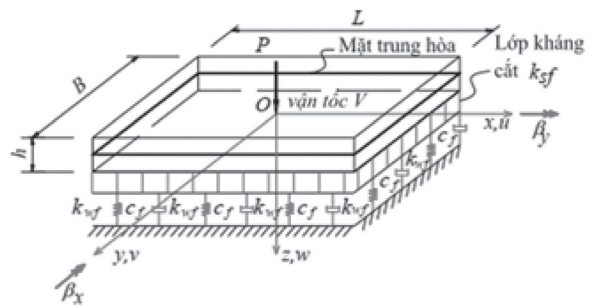
$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3}$$

E – module đàn hồi của vật liệu;

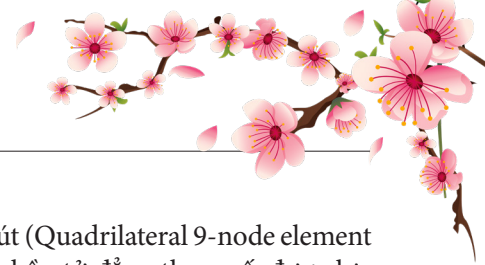
ν – hệ số poisson

2.2. Mô hình nền đàn nhớt Pasternak



Hình 1. Tấm Mindlin chịu tải trọng chuyển động đặt trên nền Pasternak





Mô hình Pasternak (mô hình nền hai thông số) được xây dựng bằng cách bổ sung thêm một lớp kháng cắt liên kết giữa các đỉnh của các lò xo trong mô hình nền Winkler. Nhờ đó, nền Pasternak đã khắc phục được hạn chế của nền Winkler. Phản lực của nền Pasternak tác dụng lên kết cấu tấm được biểu diễn dưới dạng toán học như đã được trình bày trong các nghiên cứu trước đây (Atmane và cộng sự [9], Zenkour và Radwan [10]):

$$p = k_{wf} w - k_{sf} \nabla^2 w + c_f \dot{w} \quad (4)$$

trong đó:

∇^2 - đạo hàm cấp 2 theo phương x và phương y được xác định theo công thức:

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^T \quad (5)$$

k_{wf} - thông số nền thứ nhất (độ cứng theo phương đứng nền Winkler);

k_{sf} - thông số nền thứ hai (độ cứng lớp kháng cắt của nền Pasternak);

c_f - hệ số cản của nền;

w - chuyển vị theo phương đứng của tấm;

\dot{w} - vận tốc của chuyển vị theo phương đứng của tấm.

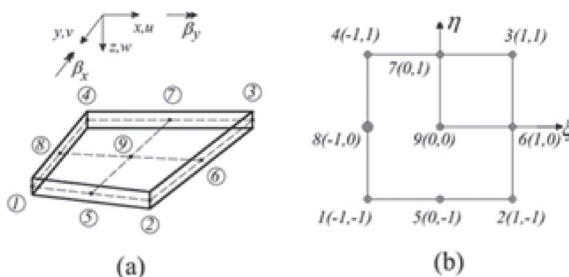
2.3. Tấm Mindlin trên nền đàn nhớt Pasternak

Dựa trên nguyên lý công ảo, phương trình chuyển động của tấm được thiết lập: “Nếu một vật thể ở trạng thái cân bằng thì tổng công nội ảo bằng tổng công ngoại ảo đối với bất kỳ chuyển vị khả dĩ”.

$$\int_{\Omega} \left\{ (\partial \varepsilon_m)^T \quad (\partial \kappa)^T \quad (\partial \gamma)^T \right\} \begin{bmatrix} D_m & D_{mb} & 0 \\ D_{mb} & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} (\partial u)^T \mathbf{m} \dot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \partial w^T k_{wf} w d\Omega - \int_{\Omega} \partial w^T k_{sf} \nabla^2 w d\Omega + \int_{\Omega} \partial w^T c_f \dot{w} d\Omega = \int_{\Omega} (\partial u)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (6)$$

2.4. Phương pháp phần tử chuyển động (MEM)

Khái niệm phần tử đẳng tham số được xây dựng dựa trên việc sử dụng phép biến đổi từ một phần tử chuẩn (master element) trong hệ tọa độ tự nhiên $O\xi\eta$ sang phần tử thực có hình dạng bất kỳ trong hệ tọa độ Descartes Oxy. Trong nghiên cứu này,



Hình 2. a) Phần tử Q9 trong hệ tọa độ tổng thể (x,y); b) Phần tử Q9 trong hệ tọa độ tự nhiên (xi,eta).

phần tử tứ giác 9 nút (Quadrilateral 9-node element - Q9), thuộc loại phần tử đẳng tham số, được lựa chọn để mô hình hóa các bài toán tấm

Các hàm nội suy Lagrange của phần tử Q9 được cho bởi công thức:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi-1)(\eta-1)\xi\eta, & N_2 &= \frac{1}{4}(\xi+1)(\eta-1)\xi\eta \\ N_3 &= \frac{1}{4}(\xi+1)(\eta+1)\xi\eta, & N_4 &= \frac{1}{4}(\xi-1)(\eta+1)\xi\eta \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta-1)\eta, & N_6 &= \frac{1}{2}(\xi+1)(1-\eta^2)\xi \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta+1)\eta, & N_8 &= \frac{1}{2}(\xi-1)(1-\eta^2)\xi \\ N_9 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Ma trận Jacobi cho phép biến đổi tọa độ được cho trong dạng như sau:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_9 & y_9 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Định thức ma trận Jacobi trong công thức tích phân được chuyển đổi như sau:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det J d\xi d\eta \quad (9)$$

Công thức (9) được tính bằng phương pháp cầu phương Gauss trong mặt phẳng và có dạng như sau:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (10)$$

2.5. Bài toán tấm Mindlin trên nền đàn nhớt Pasternak chịu tải trọng di chuyển

Phương trình chuyển động của phần tử tấm Mindlin đặt trên nền Pasternak

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{d}}^{(e)} + \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{P}^{(e)} \quad (11)$$

trong đó:

$\mathbf{M}^{(e)}$ - ma trận khối lượng của phần tử tấm chuyển động được xác định:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{m} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det J d\xi d\eta \quad (12)$$

$\mathbf{C}^{(e)}$ - ma trận cản của phần tử tấm chuyển động được xác định:

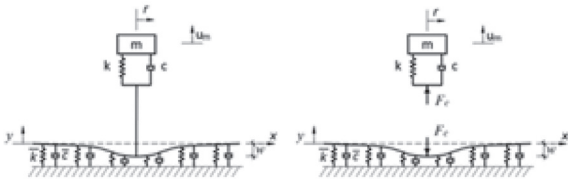
$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(e)} &= -2\mathbf{m} \mathbf{v} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{,r} \det J d\xi d\eta + \\ &+ c_f \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w \det J d\xi d\eta \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathbf{K}^{(e)}$ - ma trận độ cứng của phần tử tấm chuyển động được xác định như công thức (14) dưới đây:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{(e)} = & \int_{\Omega^{(e)}} \left\{ (\mathbf{B}_m)^T (\mathbf{B}_b)^T (\mathbf{B}_s)^T \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & 0 \\ \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{D}_b & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{Bmatrix} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \\
 & + k_{sf} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w \det \mathbf{J} d\xi d\eta - k_{sf} \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_{w,rr} + \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_{w,ss}) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (14) \\
 & + \mathbf{m} v^2 \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{,rr} \det \mathbf{J} d\xi d\eta - \mathbf{m} a \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{,r} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \\
 & - c_f v \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_{w,r} \det \mathbf{J} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

$\mathbf{P}^{(e)}$ - véc tơ tải trọng của phần tử tấm chuyển động được xác định:

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b}(r, s) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (15)$$



Hình 3. Mô hình hệ khối lượng – lò xo – cản

2.6. Mô hình hệ khối lượng – lò xo – cản

Phương trình cân bằng cho khối lượng m, áp dụng nguyên lý D’Alambert:

$$m\ddot{u}_m + c(\dot{u}_m - \dot{w}) + k(u_m - w) = -mg \quad (16)$$

Lực tương tác giữa hệ khối lượng – lò xo – cản và tấm mindlin được xác định:

$$F_c = c(\dot{w} + \dot{y}_t - \dot{u}_m) + k(w + y_t - u_m) \quad (17)$$

trong đó:

m, c, k lần lượt là khối lượng, hệ số cản, độ cứng lò xo của hệ;

$u_m, \dot{u}_m, \ddot{u}_m$ lần lượt là chuyển vị, vận tốc, gia tốc chuyển vị đứng của khối lượng;

F_c là lực tương tác tại điểm tiếp xúc giữa hệ tải trọng và tấm;

w, \dot{w} lần lượt là chuyển vị, vận tốc đứng của tấm tại điểm tương tác;

y_t - chuyển vị phát sinh do độ gồ ghề của bề mặt tấm, được giả thuyết theo dạng như sau:

$$y_t = y_0 \sin \frac{2\pi t}{\lambda^t} \quad (18)$$

y_0 - biên độ gồ ghề của bề mặt tấm ;

λ^t - bước sóng gồ ghề của bề mặt tấm ;

\dot{y}_t - tốc độ biến thiên chuyển vị phát sinh do độ gồ ghề của bề mặt tấm.

Phương trình chủ đạo của tấm chịu hệ khối lượng – lò xo – cản di động với vận tốc biến thiên

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (19)$$

Trong đó:

M - ma trận khối lượng tổng thể của hệ;

C - ma trận cản tổng thể của hệ;

K - ma trận độ cứng tổng thể của hệ;

P - véc tơ tải trọng tổng thể của hệ;

d - véc tơ chuyển vị tổng thể của hệ;

$\dot{\mathbf{d}}$ - véc tơ vận tốc của chuyển vị tổng thể của hệ;

$\ddot{\mathbf{d}}$ - véc tơ gia tốc của chuyển vị tổng thể của hệ.

Phương trình trên được giải bằng phương pháp Newmark sử dụng giá trị $\gamma=1/2, \beta=1/4$. Một chương trình tính toán Matlab được đề xuất để phân tích ứng xử động của tấm Mindlin chịu hệ khối lượng – lò xo – cản chuyển động thay đổi vận tốc.

3. Các bài toán số

3.1. Khảo sát sự hội tụ và kiểm chứng độ tin cậy

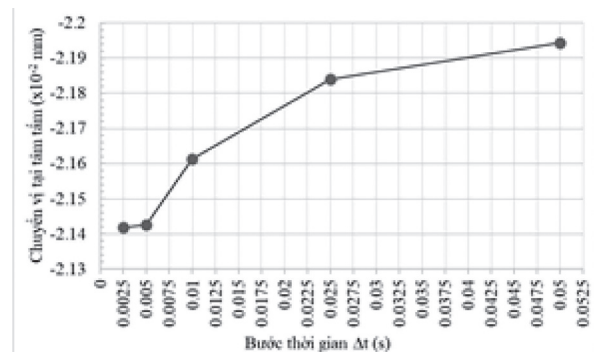
Các thông số vật liệu, tải trọng và nền được sử dụng bao gồm: module đàn hồi $E=3.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, hệ số Poisson $\nu=0.3$ và độ cứng nền $k_{wf}=10^7 \text{ N/m}^3$.. Biểu đồ vận tốc được chia thành 3 giai đoạn: tăng tốc, vận tốc không đổi, và giảm tốc, nhằm tái hiện đầy đủ các điều kiện tải trọng thực tế.



Hình 4. Biểu đồ vận tốc hệ tải trọng qua các giai đoạn

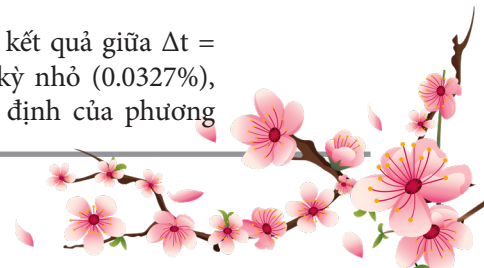
3.1.1. Sự hội tụ của chuyển vị tấm theo bước lặp thời gian Δt

Để lựa chọn bước thời gian phù hợp cho các bài toán trong luận văn, cần tiến hành khảo sát sự hội tụ của phương pháp được áp dụng. Cụ thể, kiểm tra nghiệm của bài toán với lưới phần tử 24×8 và các bước thời gian (Δt) khác nhau: 0.05s, 0.025s, 0.01s, 0.005s và 0.0025s. Kết quả chuyển vị đứng tương ứng với từng bước thời gian được trình bày trong ở hình 5.



Hình 5. Sự hội tụ chuyển vị theo các bước thời gian Δt

Hình 5 thể hiện chênh lệch kết quả giữa $\Delta t = 0.005s$ và $\Delta t = 0.0025s$ là cực kỳ nhỏ (0.0327%), minh chứng cho sự hội tụ ổn định của phương





pháp. Với kích thước phần tử $1.25m \times 1.25m$, việc lựa chọn bước thời gian $\Delta t = 0.005s$ không chỉ đảm bảo độ chính xác của nghiệm mà còn tối ưu hóa thời gian tính toán.

3.1.2. Độ tin cậy của bài toán tĩnh

Xét tấm Mindlin bốn biên liên kết ngàm có các thông số kích thước và vật liệu lấy theo bài toán đã được công bố của Huang và Thambiratnam (2002) [2] trình bày bảng 3.1. Tấm được đặt trên nền Pasternak có hệ số độ cứng nền, hệ số kháng cắt nền và hệ số cản nền được trình bày trong bảng 3.2. Các mốc giá trị thời gian $t_1 = t_2 = t_3 = 0_s$. Để khảo sát sự hội tụ của bài toán, phần tử tấm được rời rạc hóa theo phương x và y lần lượt là 6×2 , 12×4 , 24×8 , 30×10 , 36×12 và 42×14 .

Bảng 3.1: Thông số tấm Mindlin

Module đàn hồi E (N/m ²)	Hệ số Poisson ν	Kích thước tấm (m)	Trọng lượng riêng P (kg/m ³)
1.51×10^{10}	0.35	L = 30 B = 10 h = 0.5	2440

Bảng 3.2: Thông số nền hai thông số Pasternak

Hệ số độ cứng k _{wf} (N/m ³)	Hệ số kháng cắt k _{sf} (N/m)	Hệ số cản nền c _f (N.s/m ³)
9.5×10^7	2.375×10^7	0

Bảng 3.3: Chuyển vị tâm tấm Mindlin theo lưới chia phần tử

Phương pháp	x10-3mm					
	Lưới chia					
	6x2	12x4	24x8	30x10	36x12	42x14
MEM (Luận văn)	-1.109	-1.799	-2.187	-2.248	-2.286	-2.314
FEM-9	-1.109	-1.799	-2.187	-2.248	-2.286	-2.314
V.H.Luong và cộng sự (2018) [7]	-1.109	-1.799	-2.187	-2.248	-2.286	-2.314
Sai số so với lưới 42x14 (%)	-	-	-	2.852	1.210	1.000

Bảng 3.3 cho thấy kết quả tính toán bằng thuật toán MEM sử dụng trong nghiên cứu này so với phương pháp FEM-9 và kết quả đã công bố của Lương và cộng sự (2018) [7] gần như là bằng nhau. Đồng thời, kết quả cũng cho thấy khi lưới chia của phần tử càng chia mịn thì giá trị của chuyển vị tại tâm tấm càng gần nhau và dần tiến tới hội tụ.

3.1.3. Độ tin cậy của bài toán động

Các thông số đầu vào của bài toán động được trình bày ở bảng 3.4, 3.5 và 3.6. Các mốc giá trị thời gian $t_1 = 1s$, $t_2 = 2s$, $t_3 = 3s$.

Bảng 3.4: Thông số tấm Mindlin

Module đàn hồi E (N/m ²)	Hệ số Poisson ν	Kích thước tấm (m)	Trọng lượng riêng (kg/m ³)
3.1×10^{10}	0.25	L B = 10 h = 0.3	2440

Bảng 3.5: Thông số nền hai thông số Pasternak

Hệ số độ cứng k _{wf} (N/m ³)	Hệ số kháng cắt k _{sf} (N/m)	Hệ số cản nền c _f (N.s/m ³)
1.0×10^7	0	0

Bảng 3.6: Thông số hệ tải trọng

Khối lượng m (kg)	Độ cứng lò xo k (N/m)	Hệ số cản c (N.s/m)	Vận tốc V (m/s)
100	-	-	20

Bảng 3.7 cho thấy kết quả để xuất khá trùng khớp với kết quả đã được công bố của Luong và cộng sự (2018) [7] và Huang và Thambiratnam (2002) [2]. Như vậy, kết quả so sánh này cho thấy thuật toán sử dụng trong nghiên cứu này đáng tin cậy.

Bảng 3.7: Hội tụ chuyển vị tâm tấm khi chiều dài L thay đổi

Phương pháp	x10-3mm			
	Chiều dài của tấm L (m)			
	10	20	30	40
MEM (Luận văn)	-4.8291	-4.7836	-4.7836	-4.7836
Sai khác (%) so với L = 40m	0.9510	0.0000	0.0000	0.0000
V.H.Luong và cộng sự (2018) [7]	-4.8292	-4.7837	-4.7837	-7.7837
Huang và Thambiratnam (2002) [2]	-4.7837			

3.2. Ảnh hưởng của các thông số đến ứng xử động của tấm Mindlin

Xét tấm Mindlin đặt trên nền Pasternak chịu tác dụng của hệ khối lượng – lò xo – cản di động dọc theo chiều dài tấm, 4 cạnh của tấm là liên kết ngàm. Hệ tải trọng di chuyển với vận tốc V dọc theo trục x. Thông số kích thước tấm, thông số nền và thông số hệ tải trọng lần lượt được cho trong bảng 3.8, 3.9

Bảng 3.8: Thông số tấm Mindlin

Module đàn hồi E (N/m ²)	Hệ số Poisson ν	Kích thước tấm (m)	Trọng lượng riêng P (kg/m ³)	Độ gồ ghề	
				Biên độ (mm)	Bước sóng (m)
1.516×10^{10}	0.35	L = 30 B = 10 h = 0.5	2440	0.5	1.0

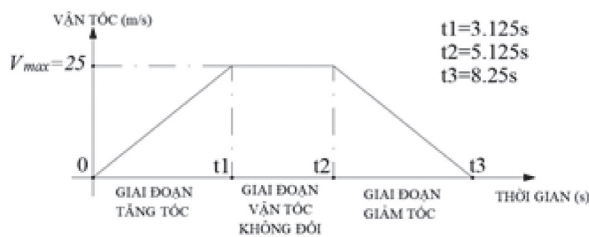
Bảng 3.9: Thông số nền hai thông số Pasternak

Hệ số độ cứng k_{vt} (N/m ³)	Hệ số kháng cắt k_{ct} (N/m)	Hệ số cản nền c_f (N.s/m ³)
9.5x107	2.375x107	1.0x106

Bảng 3.10: Thông số hệ tải trọng

Khối lượng m (kg)	Độ cứng lò xo k (N/m)	Hệ số cản c (N.s/m)	Vận tốc V (m/s)
770	1x107	3.7x103	25

và 3.10, cùng với biểu đồ vận tốc hình 6. Tầm được rời rạc hóa thành các phần tử có kích thước 1,25m x 1,25m.

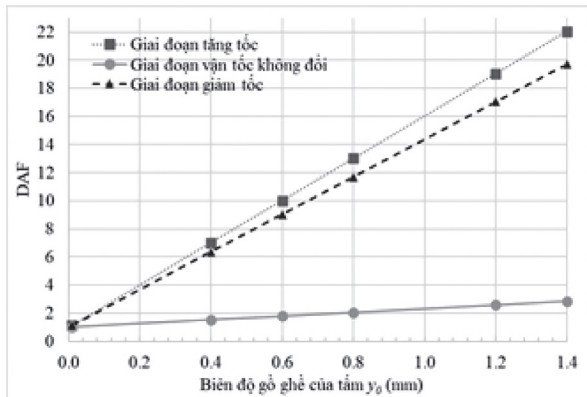


Hình 6. Biểu đồ vận tốc hệ khối lượng

3.2.1 Ảnh hưởng của biên độ gồ ghề của bề mặt tấm

Xét sự ảnh hưởng biên độ gồ ghề của bề mặt tấm đến ứng xử động lực học của hệ tải trọng được thực hiện thông qua khảo sát hệ số động (Dynamic Amplification Factor – DAF) của bề mặt tấm. Bước sóng gồ ghề cố định là 0.5m.

Hình 7 thể hiện sự thay đổi của DAF theo biên độ gồ ghề. Khi bề mặt tấm gần như nhẵn (biên độ gồ ghề $y_{01} = 0.01mm$), hệ số động DAF gần như xấp xỉ bằng 1. Khi biên độ gồ ghề của bề mặt tấm tăng từ 0.2mm đến 1.4mm, DAF được ghi nhận tăng dần và sau đó tăng đáng kể trong các giai đoạn tăng tốc/giảm tốc.

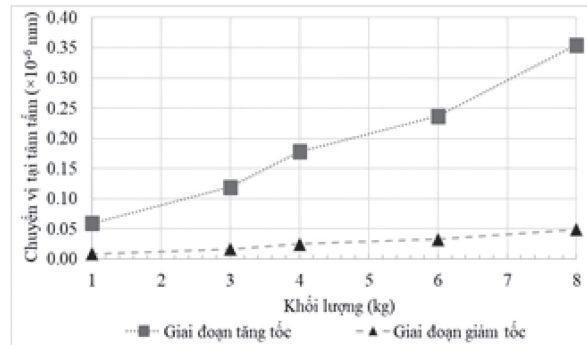


Hình 7. Ảnh hưởng biên độ gồ ghề của tấm đến DAF

3.2.2. Ảnh hưởng của khối lượng m

Hình 8 thể hiện sự thay đổi chuyển vị tại tâm

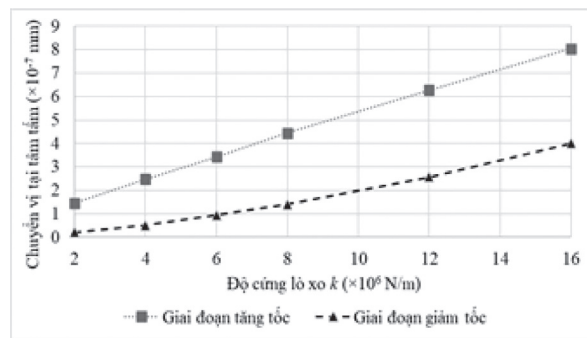
tầm theo khối lượng trong giai đoạn tăng và giảm tốc. Chuyển vị tại tâm tầm tăng gần như tuyến tính với khối lượng của hệ tải trọng. Điều này phù hợp với tính chất vật lý vì khối lượng tải trọng lớn hơn sẽ tạo ra lực lớn hơn, dẫn đến chuyển vị của tầm lớn hơn.



Hình 8. Giá trị tuyệt đối chuyển vị tại tâm tầm khi khối lượng m thay đổi

3.2.3. Ảnh hưởng độ cứng k

Hình 9 thể hiện chuyển vị tại tâm tầm theo độ cứng lò xo của tải trọng. Khi độ cứng lò xo k của hệ tải trọng tăng dần thì chuyển vị của tầm cũng tăng dần. Điều này là phù hợp với tính chất vật lý, khi độ cứng tăng thì lực tương tác tăng theo và kéo theo chuyển vị tại tâm tầm tăng.



Hình 9. Giá trị tuyệt đối chuyển vị tại tâm tầm khi độ cứng lò xo k thay đổi

4. Kết luận

Nghiên cứu đã ứng dụng phương pháp phần tử chuyển động để phân tích động lực học của kết cấu tấm Mindlin trên nền Pasternak, chịu tác động của hệ khối lượng – lò xo – cản chuyển động với vận tốc biến thiên. Ảnh hưởng của các thông số quan trọng như khối lượng tải trọng, độ cứng lò xo, biên độ gồ ghề đã được khảo sát chi tiết.

Phân tích được thực hiện bằng phương pháp MEM đảm bảo độ chính xác cao thông qua việc kiểm chứng với nghiên cứu trước đây.

Kết quả trong bài khảo sát này giúp cải thiện thiết kế nền đường nhằm giảm lún và biến dạng





không mong muốn. Các hệ số điều chỉnh một cách phù hợp sẽ giúp hỗ trợ giảm hư hỏng cho nền đường, giúp nền bền và tuổi thọ cao.

LỜI CẢM ƠN

Chúng tôi xin cảm ơn Trường Đại học Bách Khoa, ĐHQG-HCM đã hỗ trợ cho nghiên cứu này.

Tài liệu tham khảo

- [1] S. M. Kim and J. Roesset, "Moving loads on a plate on elastic foundation," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 124, pp. 1010-1017, 1998.
- [2] M. H. Huang and D. Thambiratam, "Dynamic response of plates on elastic foundation to moving loads," *Journal of Civil Engineering Mechanics*, vol. 128, no.9, pp. 1016-1022, 2002.
- [3] S. M. Kim, "Buckling and vibration of a plate on elastic foundation subjected to in-plate compression and moving loads," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 5647-5661, 2004.
- [4] L. Sun, "Dynamic of plate generated by Moving Harmonic Loads," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 72, pp. 772-777, 2005.
- [5] T. N. T. Cao, V. H. Lương và T. P. Nguyễn, "Phân tích ứng xử động của tấm Mindlin trên nền Pasternak chịu tải trọng di động sử dụng phương pháp phần tử chuyển động," *Tạp chí Xây dựng*, vol. 10, pp. 113-118, 2015.
- [6] C. T. Nguyen, H. N. Vo, V. H. Luong and T. N. T. Cao, "Dynamic response of Mindlin plates resting on the viscoelastic foundation subjected to moving harmonic load

using moving element method," *Journal of Construction*, vol. 7, pp. 111-117, 2016.

[7] V. H. Luong, T. N. T. Cao, J. N. Reddy, K. K. Ang, M. T. Tran and J. Dai, "Static and dynamic analysis of Mindlin plates resting on viscoelastic foundation by using moving element method," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 18, no. 11, pp. 1850131-1-1850131-20, 2018.

[8] V. H. Luong, T. N. T. Cao, Q. X. Lieu and X. V. Nguyen, "Moving element method for dynamic analysis of functionally graded plates resting on Pasternak foundation subjected to moving harmonic load," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 20, no. 1, pp. 2050003-1-2050003-25, 2020.

[9] M. T. Tran, T. C. Truong, N. T. Do and V. H. Luong, "Dynamic Analysis of Mindlin Plate Subjected to a Moving Mass-Spring-Damper System Using the Moving Element Method," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 23, no. 15, 2350176, 2023.

[10] H. A. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab and E. A. A. Bedia, "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler - Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 6, pp. 112-121, 2010.

[11] A. M. Zenkour and A. F. Radwan, "Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak foundation under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory," *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, vol. 18, no. 2, pp. 645-658, 2018.

Truyện cười ngày Tết Ất Tỵ 2025

Nai hóa sư tử

Ngày tết, hai bạn thân gặp lại nhau sau một thời gian dài xa cách. Chuyện trò hồi lâu, chợt một người hỏi:

- À mối tình của cậu và con nai vàng bây giờ ra sao rồi?

- Người kia thoáng buồn rồi đáp: - Hết rồi cậu ạ! Chẳng nhìn bóng dáng con nai vàng đâu cả!

- Sao vậy?

- Mình đã cưới nó rồi! Bây giờ, nó đã hoá ra con sư tử!

Biết

Ngày tết, ông Giám đốc đi ngắm công viên. Tình cờ, ông thấy đứa con

nhỏ của người lái xe. Ông móc túi li xì cho nó rồi tươi cười hỏi:

- Cháu biết chú là ai không?

- Dạ biết! Chú là bạn bố cháu!

Ngày nào bố cháu cũng cho chú đi nhờ xe, cháu thấy hoài.

Say thế nào được

Đêm giao thừa, anh chồng về muộn kêu công âm ỉ, chị vợ vội ra mở cổng. Thấy anh chồng loay hoay mãi không vào được chị liền bảo:

- Chắc là anh say rồi phải không?

- Say thế nào được! Mẹ mầy cứ nói vậy người ta cười cho...

- Sao anh không vào để em còn

khoá cổng?

- Mẹ mày giữ cái cổng lại một tí...
tôi thấy nó cứ đu đưa, sợ chết đi được!
- ???

Khéo nói

Anh nọ "bị nhiễm máu dê". Chờ vợ đi chơi Tết mà anh cứ chăm chăm nhìn vào các cô gái trẻ. Cô vợ nổi xung, nắm tai anh ta vặn ngược ra sau, hằm hằm nói:

- Nhìn cái gì mà ghê thế?

Không ngờ, anh ta nói tình bơ:

- À! Anh chỉ nhìn để so sánh thôi!

- So sánh thế nào?

- Trông các cô ấy, chẳng có ai duyên dáng bằng em cả!

Nghe thế, tuy chưa nguôi cơn giận, nhưng cô vợ cũng từ từ buông tai chàng ra.