

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN GALERKIN ĐỂ MÔ PHỎNG DÒNG THẨM KHÔNG ỔN ĐỊNH HAI CHIỀU NGANG

APPLICATION OF THE GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD FOR SIMULATING TWO-DIMENSIONAL HORIZONTAL UNSTEADY SEEPAGE FLOW

GS.TS Nguyễn Thế Hùng, TS. Lương Nguyễn Hoàng Phương - Trường Đại học Nam Cần Thơ

TS. Nguyễn Hà Quốc Tín - Trường Đại học Tây Đô

Tóm tắt: Trong bài báo này, nhằm xác định được trữ lượng, sự thay đổi mực nước ngầm cũng như vận tốc thấm trong quá trình khai thác nước ngầm tại Thành phố Kon Tum; các tác giả dựa vào các số liệu thu thập được và thiết lập chương trình tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin để giải phương trình vi phân về dòng thấm không ổn định hai chiều ngang. Từ đó làm cơ sở để dự báo sự thay đổi mực nước ngầm và vận tốc thấm trong đất khi có phương án khai thác nguồn nước ngầm khác.

Từ khóa: Phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin, dòng thấm 2 chiều ngang, khai thác nước ngầm.

1. Đặt vấn đề

Nước là tài nguyên thiết yếu của sự sống, phục vụ cho mọi hoạt động của con người. Thực tế, ngoài việc sử dụng nguồn nước mặt được lấy từ các con sông trong vùng, việc nghiên cứu sử dụng nguồn nước ngầm là điều cần thiết. Trong chiến lược phát triển lâu dài, nước ngầm vẫn là nguồn nước tốt nhất phục vụ cho sinh hoạt, tưới tiêu trong nông nghiệp và các vấn đề khác bởi những ưu điểm của nó.

Việc nghiên cứu nước ngầm cũng đã được các tác giả trong nước và trên thế giới nghiên cứu bằng các phương pháp khác nhau. Trong thế kỷ 21, một số công trình nghiên cứu về thủy văn nước dưới đất đã được công bố như Husam Baalousha (2011) [2], Karatzas (2017) [6], Sikdar (2019) [15], Říha và cộng sự (2020) [14], Karamouz và cộng sự (2020) [5], Ke và cộng sự (2021) [8]... Phương pháp phần tử hữu hạn tuy rất phức tạp và khó hiểu nhưng có độ chính xác cao, lưới mềm dẻo có thể phủ miền bất kỳ. Ưu điểm nổi bật của phương pháp phần tử hữu hạn cho bài toán có nhiều loại vật liệu khác nhau và cho các điều kiện biên bất kỳ. Khi áp dụng cho bài toán chất lỏng, thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin [1] [3] [4] [7] [9-13].

Bài báo xác định trữ lượng, sự thay đổi mực nước ngầm cũng như vận tốc thấm trong quá trình khai thác nước ngầm tại Thành phố Kon Tum; các tác giả thiết lập chương trình tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin để giải phương

Abstract: In this paper, to determine the storage capacity, groundwater level variations, and seepage velocity during groundwater exploitation in Kon Tum City; the authors rely on collected data and develop a computational program based on the Galerkin finite element method to solve the differential equation for two-dimensional unsteady seepage flow. This serves as the basis for predicting changes in groundwater levels and seepage velocity in the soil under different groundwater exploitation scenarios.

Keywords: The Galerkin finite element method, two-dimensional horizontal seepage flow, groundwater exploitation.

trình thấm không ổn định; dự báo sự thay đổi mực nước ngầm và vận tốc thấm khi có các phương án khai thác nguồn nước trong khu vực nghiên cứu.

2. Lý thuyết tính toán

Dòng thấm trong đất được tính toán dựa theo phương trình thấm, được thiết lập dựa vào định luật Darcy và phương trình liên tục về dòng thấm. Trong những điều kiện có phân bố địa chất theo chiều sâu ít thay đổi, ta có thể áp dụng phương trình thấm hai chiều ngang (2DH) để tính toán.

2.1. Phương trình dòng thấm hai chiều ngang không ổn định:

Phương trình dòng thấm không ổn định hai chiều ngang được viết như sau:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

Trong đó S_s : lượng trữ riêng của tầng thấm nước; t : thời gian tính (sec); h : Cột nước thấm tính toán (m); K_x, K_y : Hệ số thấm theo các phương x, y ; q : lưu lượng tại điểm nguồn, q có giá trị (-) nếu lưu lượng lấy ra khỏi miền và ngược lại.

2.2. Rời rạc theo không gian

Theo không gian áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin; hàm nội suy được chọn có dạng sau:

$$h^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i h_i \quad (2)$$

$h^{(e)}$: giá trị gần đúng của cột nước thủy lực trong phần tử e ; N_i : hàm dạng tại nút i trong phần tử e ; n : số nút của phần tử e ; h_i : giá trị chưa biết của cột áp thủy lực tại nút i của phần tử e .

Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin thiết lập ở dạng yếu, sử dụng tích phân từng phần cho đạo hàm bậc 2 và giả sử tại mỗi phần tử e các giá trị của hệ số thẩm theo các phương x, y là không thay đổi, ta có:

$$R_i^{(e)} = - \iint_{A^{(e)}} N_i^{(e)} \left[K_x^{(e)} \frac{\partial^2 \hat{h}^{(e)}}{\partial x^2} + K_y^{(e)} \frac{\partial^2 \hat{h}^{(e)}}{\partial y^2} + q^{(e)} - S_s^{(e)} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial t} \right] dx dy = 0 \quad (3)$$

$$- \iint_{A^{(e)}} N_i^{(e)} \left[K_x^{(e)} \frac{\partial^2 \hat{h}^{(e)}}{\partial x^2} + K_y^{(e)} \frac{\partial^2 \hat{h}^{(e)}}{\partial y^2} + q^{(e)} \right] dx dy + \iint_{A^{(e)}} N_i^{(e)} S_s^{(e)} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial t} dx dy = 0 \quad (4)$$

$$\iint_{A^{(e)}} N_i^{(e)} \left[K_x^{(e)} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial x} + K_y^{(e)} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{A^{(e)}} N_i^{(e)} S_s^{(e)} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial t} dx dy - \int_{C^{(e)}} N_i^{(e)} \left(K_x^{(e)} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial x} l + K_y^{(e)} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial y} m \right) ds - F_i^{(e)} = 0$$

l, m : cosin chỉ phương của vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài tại biên; $K_x^{(e)}, K_y^{(e)}$: hệ số thẩm tương ứng theo các phương x, y của phần tử e ; $A^{(e)}$: diện tích của phần tử. Theo các kết quả trên, chúng ta đặt tổng đại số của hai số hạng đầu của (4) là:

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \\ \vdots \\ R_n^{(e)} \end{Bmatrix} = [K^{(e)}] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \\ \vdots \\ F_n^{(e)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} G_1^{(e)} \\ G_2^{(e)} \\ \vdots \\ G_n^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Số hạng thứ ba sẽ là:

$$\iint_{A^{(e)}} N_i^{(e)} S_s^{(e)} \frac{\partial \hat{h}^{(e)}}{\partial t} dx dy = \iint_{A^{(e)}} N_i^{(e)} S_s^{(e)} \left[N_1^{(e)} \dots N_n^{(e)} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial t} \end{Bmatrix} dx dy \quad (6)$$

Có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \\ \vdots \\ R_n^{(e)} \end{Bmatrix}_C = [C^{(e)}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$[C^{(e)}]$: ma trận phần tử dung lượng, với:

$$[C^{(e)}] = \iint_{A^{(e)}} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ \vdots \\ N_n^{(e)} \end{Bmatrix} [S_s^{(e)}] [N_1^{(e)} \dots N_n^{(e)}] dx dy \quad (8)$$

Trong bài báo này, chúng tôi dùng công thức phần tử gộp để tính $[C^{(e)}]$. Đối với phần tử tam giác có ba đỉnh là nút i, j, k ta có kết quả sau:

$$N_i^{(e)} N_j^{(e)} = \begin{cases} \frac{1}{3} & khi \ i = j \\ 0 & khi \ i \neq j \end{cases} \quad (9)$$

$$Ta \ có: \ [C^{(e)}] = \frac{S_s^{(e)} A^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.3. Rời rạc theo thời gian bằng sai phân trọng số

Đối với toàn miền tính toán, ta có ma trận dung lượng tổng thể với p nút, m phần tử:

$$[C] = \sum_{e=1}^m [C^{(e)}] \quad (11)$$

Tập hợp các phương trình viết cho tất cả các phần tử của toàn miền tính toán ta được:

$$[C] \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial t} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{Bmatrix} = [F] + [G] \quad (12)$$

Chúng ta định nghĩa hai vectơ $\{h^*\}$ và $\{h\}$ như sau:

$$\{h^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial t} \end{Bmatrix}, \quad \{h\} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Phương trình (12) có thể viết lại:

$$[C][h^*] + [K][h] = [F] + [G] \quad (14)$$

Áp dụng sai phân theo thời gian:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cong \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \quad (15)$$

$$h(\varepsilon) \cong h(t) + (\varepsilon - t) \frac{\partial h}{\partial t} = h(t) + (\varepsilon - t) \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \quad (16)$$

$$\text{Đặt: } \omega = \frac{(\varepsilon - t)}{\Delta t} \quad (17)$$

$$\text{Vậy: } h(\varepsilon) = (1 - \omega)h(t) + \omega h(t + \Delta t) \quad (18)$$

Mở rộng cho vector h, F, G :

$$\{h\} = (1 - \omega)\{h\}_t + \omega\{h\}_{t+\Delta t} \quad (19)$$

$$\{F\} = (1 - \omega)\{F\}_t + \omega\{F\}_{t+\Delta t} \quad (20)$$

$$\{G\} = (1 - \omega)\{G\}_t + \omega\{G\}_{t+\Delta t} \quad (21)$$

Thay các công thức trên vào phương trình (14) ta có:

$$\begin{aligned} & \left([C] + \omega\Delta t[K] \right) \{h\}_{t+\Delta t} = \\ & = \left([C] - (1 - \omega)\Delta t[K] \right) \{h\}_t + \\ & \Delta t \left((1 - \omega)\{F\}_t + \omega\{F\}_{t+\Delta t} \right) + \\ & + \Delta t \left((1 - \omega)\{G\}_t + \omega\{G\}_{t+\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Giá trị của $\{h\}$ tại thời điểm ban đầu $t = t_0$ là: giá trị cho trước. Dùng phương trình (22), sau khi ghép nối các phần tử và gán điều kiện biên, giải tìm giá trị của $\{h\}$ tại thời điểm cuối của bước thời gian thứ nhất $\{h\}_{t_0+\Delta t}$. Tiếp đến đặt: $\{h\}_t = \{h\}_{t_0+\Delta t}$. Quá trình này được lặp cho các bước tiếp theo. Trong bài báo này, chúng tôi chọn cách giải Cholesky vì đơn giản, hiệu quả tính toán cao, tiết kiệm bộ nhớ và độ ổn định số tốt.

Để giải bài toán thấm, chương trình được viết theo sơ đồ khối như Hình 1.

3. Áp dụng tính toán cho khu vực Thành phố Kon Tum

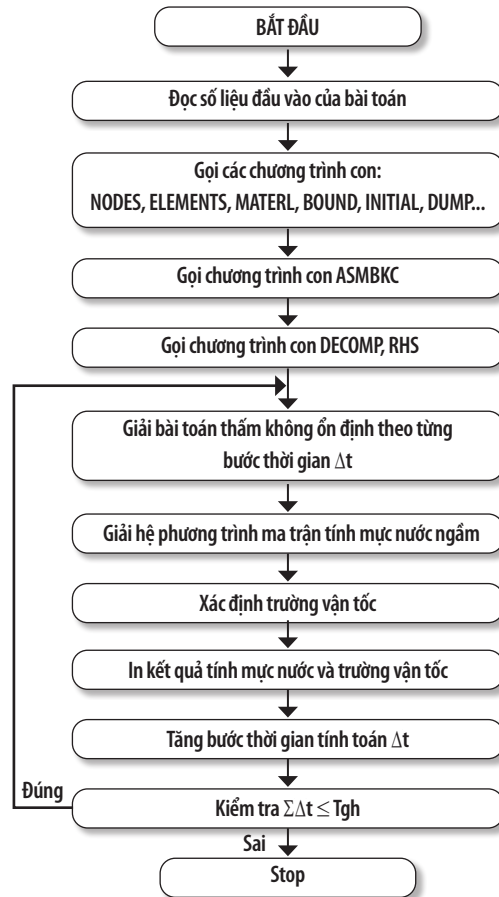
3.1. Giới thiệu khu vực

Thành phố Kon Tum nằm ở khu vực Bắc Tây Nguyên, hiện tại nguồn nước cung cấp cho thành phố chủ yếu là nước mặt lấy từ sông Đăk Bla. Sự phát triển đô thị trong những năm gần đây dẫn đến nhu cầu về nước tăng rất nhanh. Đối với Thành phố Kon Tum trong chiến lược phát triển lâu dài, nguồn nước ngầm vẫn là nguồn nước tốt nhất cho sinh hoạt và các hoạt động khác.

3.2. Miền tính toán

Trên cơ sở bản đồ địa chất thủy văn khu vực

Thành phố Kon Tum, tiến hành khoanh vùng tính toán. Dùng mô hình GMS để chia lưới tự động hai chiều ngang (2D). Miền tính toán và hệ trục tọa độ thể hiện trong hình 2. Hệ số thấm của tầng chứa nước khu vực tính toán: $K_x = K_y = 2.67\text{m/ng}$. Hệ số trữ nước $S_s = 0.185$



Hình 1. Sơ đồ giải bài toán thấm theo phương pháp phần tử hữu hạn

3.3. Điều kiện biên và điều kiện ban đầu

+ Điều kiện ban đầu: Tại thời điểm $t = 0$ ta lấy cao trình mực nước ngầm trung bình trên toàn miền $H = 515\text{(m)}$

+ Điều kiện biên mực nước: Dựa vào mực nước tĩnh trong các lỗ khoan ta tính toán và nội suy được cao trình mực nước ngầm (so với mặt nước biển) dọc theo biên của miền tính toán, giá trị cho ở Bảng 1.

+ Trên các biên còn lại dòng chảy vào bằng không ($Q = 0$).

+ Trong khu vực có 04 lỗ khoan bơm thí nghiệm với lưu lượng bơm như sau :

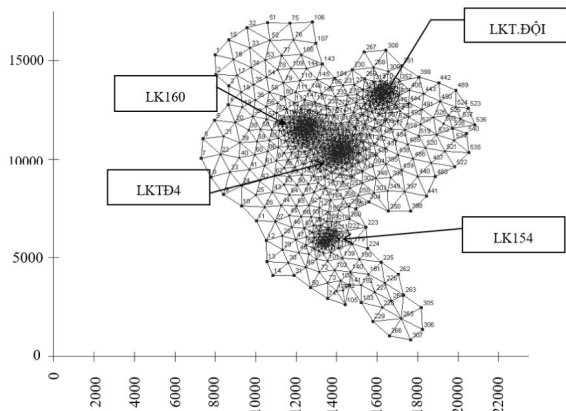
- Lỗ khoan Tĩnh đội: $Q = 259,2\text{m}^3/\text{ngđ}$, nút lưới số: 500, tọa độ (16053.0, 13222.0)

- Lỗ khoan 160: $Q = 363,6\text{m}^3/\text{ngđ}$, nút lưới số: 375, tọa độ (12207.0, 11433.0)

- Lỗ khoan TĐ4: $Q = 527,9\text{ m}^3/\text{ngđ}$, nút lưới số: 515, tọa độ (13924.0, 10199.0)

Bảng 1. Điều kiện biên cột nước tại các nút

STT	Tên nút	H(m)	STT	Tên nút	H(m)	STT	Tên nút	H(m)
1	531	514.5	10	522	513.45	18	183	526.2
2	399	514.5	11	488	513.45	19	141	526.2
3	442	514.5	12	441	513.45	20	105	526.2
4	489	514.5	13	398	513.45	21	74	526.2
5	523	514.5	14	350	513.45	22	7	515
6	536	514.5	15	304	513.45	23	6	515
7	538	514.5	16	261	513.45	24	5	515
8	540	514.5	17	223	513.45	25	4	515
9	535	513.45						



Hình 2. Miền tính toán và lưới phần tử hữu hạn

- Lỗ khoan 154: $Q = 394,6 \text{ m}^3/\text{ngđ}$, nút lưới số: 217, tọa độ (13334.0, 5727.0)
- + Thời gian tính toán $T = 100$ ngày
- + Bước thời gian tính toán $dt = 1$ ngày

3.4. Kết quả tính toán

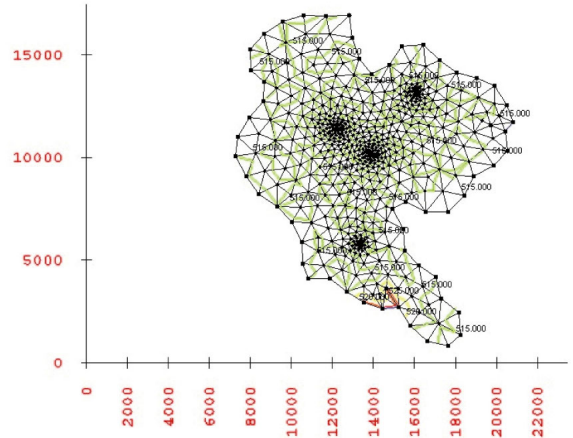
Từ chương trình đã thiết lập, chúng tôi tiến hành nhập dữ liệu đầu vào ứng với các điều kiện biên và điều kiện ban đầu đã cho. Từ kết quả tính toán vẽ được các biểu đồ đường đẳng mực nước và đẳng vận tốc thấm thể hiện ở hình vẽ từ Hình 3 ÷ 5.

Dựa trên đồ thị vẽ được từ kết quả tính toán, ta thấy càng gần các lỗ khoan mực nước ngầm càng hạ thấp, ví dụ như lỗ khoan TĐ4 ứng với thời gian tính toán 100 ngày thì bán kính ảnh hưởng $R = 135\text{m}$, độ hạ thấp mực nước $S = 17\text{m}$

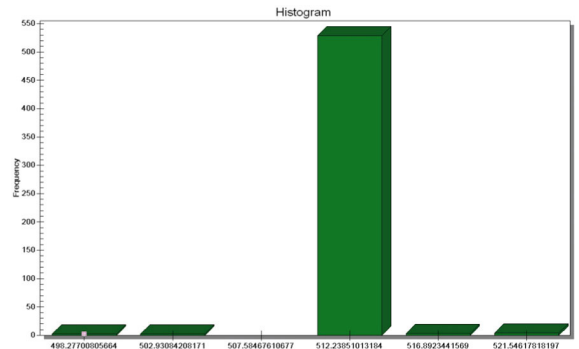
Các số liệu tính toán dự báo ở đây rất cần thiết để làm cơ sở đặt máy bơm, cho phép tính toán được sự lún sụt của nền đất, khả năng xói ngầm khi bơm hút nước. Mực nước ngầm hạ thấp còn ảnh hưởng đến sự khai thác nước ngầm của các công trình lân cận đã có cũng như sự sinh trưởng và phát triển của cây trồng.

3.5 Nhận xét:

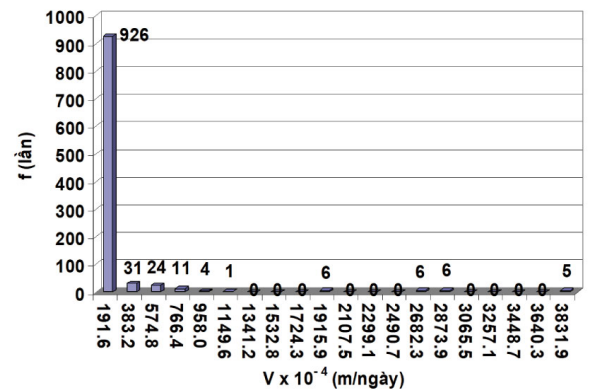
Từ kết quả tính theo mô hình toán, có được



Hình 3. Đường đẳng mực nước ngầm (đường tô màu) ứng với lưu lượng bơm thí nghiệm trong miền tính toán; Thời gian tính toán $T = 100$ ngày



Hình 4. Biểu đồ thống kê tần số xuất hiện của mực nước ngầm tại các nút của miền tính toán ứng với lưu lượng bơm thí nghiệm; Thời gian tính toán $T = 100$ ngày



Hình 5. Biểu đồ thống kê vận tốc thấm ứng với lưu lượng bơm thí nghiệm trong miền tính toán; Thời gian tính toán $T = 100$ ngày

những thông số cơ bản như sau:

Với lưu lượng bơm thí nghiệm: Mực nước ngầm tại các lỗ khoan dao động từ $H_{\min} = 498\text{m}$ đến $H_{\max} = 515.02\text{m}$, vận tốc thấm $V_{\max} = 0,383\text{m}/\text{ngđ}$.

Với lưu lượng bơm khai thác: Mực nước ngầm dao động từ $H_{\min} = 478\text{m}$ đến $H_{\max} = 511.5\text{m}$, vận tốc thấm $V_{\max} = 0,842\text{m}/\text{ngđ}$.

Từ kết quả trên, dự báo được sự thay đổi mực

Bảng 2. Kết quả tính mực nước ngầm, bơm thí nghiệm; T = 100 ngày

Tên nút	H(m)	Tên nút	H(m)	Tên nút	H(m)
1	515.01	10	515.00	19	515.01
2	514.99	11	515.00	20	515.00
3	515.00	12	515.01	21	514.99
4	515.00	13	515.00	22	515.00
5	515.00	14	515.01	23	514.97
6	515.00	15	514.99	24	514.97
7	515.00	16	515.00	25	515.01
8	515.01	17	515.01	26	514.99
9	515.02	18	515.00	27	515.00

Bảng 3. Kết quả tính vận tốc thấm, bơm thí nghiệm; T = 100 ngày

Phần tử	V_x	V_y
1	3,022802E-05	3,392556E-05
2	1,353887E-05	-3,527735E-05
3	-3,621150E-05	2,006782E-05
4	-3,738575E-05	-1,109500E-05
5	-1,496355E-05	-2,834534E-05
6	1,521197E-06	2,363854E-06
7	-2,556552E-05	2,968310E-05
8	-3,472695E-05	-1,854174E-05
9	5,069930E-06	-4,243903E-06
10	3,584907E-06	-1,719370E-05
11	1,625387E-05	-1,034718E-05
12	1,459062E-05	5,107036E-06
13	9,169104E-06	-9,284460E-07
14	5,443236E-06	1,920697E-05
15	1,247229E-04	-2,781567E-05
16	8,948876E-05	1,012726E-04
17	8,108471E-05	1,035053E-04
18	9,809159E-05	7,002069E-05

nước ngầm trong khu vực thành phố, làm cơ sở thiết kế cho các công trình khai thác nước ngầm được hợp lý.

4. Kết luận

Nghiên cứu này đã xây dựng được thuật toán và chương trình giải phương trình dòng thấm 2 chiều ngang. Theo chiều không gian, phương trình được rời rạc bằng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin; theo chiều thời gian bằng sai phân trọng số; lưới tính toán được chia theo phần tử tam giác.

Từ kết quả tính toán về trữ lượng khai thác cho khu vực Thành phố Kon Tum; trữ lượng khai thác cho các công trình và cột áp, vận tốc thấm khi có các lỗ khoan khai thác dự kiến khác nhau trong

khu vực, nghiên cứu đi đến kết luận: Với nhu cầu nước phục vụ cho sinh hoạt và các mục đích khác tại Thành phố Kon Tum trong tương lai có thể lên đến 20.000m³/ng; cho thấy trữ lượng khai thác khu vực tính toán đủ đảm bảo cung cấp, nhưng cần phải có những giải pháp khai thác hợp lý để bảo đảm được tính bền vững lâu dài của nguồn nước ngầm.

Sự dao động của mực nước ngầm cộng với vận tốc thấm khá lớn có thể gây ra hiện tượng sụt lún và xói ngầm, ảnh hưởng đến chất lượng khai thác và sử dụng của các công trình xây dựng trong khu vực.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Ambrosi D, Quartapelle L (1998) A Taylor-Galerkin Method for Simulating Nonlinear Dispersive Water Waves. *Journal of Computational Physics* 146(2):546-569
- Baalousha H (2011) Fundamentals of groundwater modelling. , pp 113-130
- Desitter A, Bates PD, Anderson MG, Hervouet J-M (2000) Development of one, two and three-dimensional finite element groundwater models within a generalized object-oriented framework. *Hydrological Processes* 14(13):2245-2259
- Idris Dag, Aynur Canivar (2011) Taylor-Galerkin method for advection-diffusion equation. *Kybernetes*. doi: 10.1108/03684921111142304
- Karamouz M, Ahmadi A, Akhbari M (2020) Groundwater Hydrology: Engineering, Planning, and Management, 2nd ed. doi: 10.1201/9780429265693
- Karatzas GP (2017) Developments on Modeling of Groundwater Flow and Contaminant Transport. *Water Resour Manage* 31(10):3235-3244
- Karim IA, Lee CH, Gil AJ, Bonet J (2014) A two-step Taylor-Galerkin formulation for fast dynamics. *Engineering Computations* 31(3):366-387
- Ke X, Wang W, Xu X, Li J, Hu H (2021) A saturated-unsaturated coupling model for groundwater flowing into seepage wells: a modeling study for groundwater development in river basins. *Environ Earth Sci* 80(21):711
- Kumar BVR, Mehra M (2005) Wavelet multilayer Taylor Galerkin schemes for hyperbolic and parabolic problems. *Applied Mathematics and Computation* 166(2):312-323
- Lai W, and Khan AA (2012) Discontinuous Galerkin Method for 1D Shallow Water Flows in Natural Rivers. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics* 6(1):74-86
- Lewis RW, Nithiarasu P, Seetharamu KN (2004) Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow, 1st ed. doi: 10.1002/0470014164
- Mehra M, Kumar V (2007) Fast wavelet-Taylor Galerkin method for linear and non-linear wave problems. *Applied Mathematics and Computation* 189(2):1292-1299
- Nguyễn TH (2004) Phương pháp phần tử hữu hạn với độ chính xác cao áp dụng cho bài toán dòng chảy hai chiều ngang. *TC Nông nghiệp và phát triển nông thôn*,
- Říha J (2020) Groundwater Flow Problems and Their Modelling. In: Zelenakova M, Fialová J, Negm AM (eds) Assessment and Protection of Water Resources in the Czech Republic. Springer International Publishing, Cham, pp 175-199
- Sikdar PK (2019) Numerical Groundwater Modelling. In: Sikdar PK (ed) Groundwater Development and Management: Issues and Challenges in South Asia. Springer International Publishing, Cham, pp 191-207