LŨY THỪA CỦA MA TRẬN CẤP HAI THÔNG QUA VẾT VÀ ĐỊNH THỨC

Lê Anh Xuân[1], Phạm Thanh Dược[1] và Trần Hoài Ngọc Nhân[2]

[1] Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ,
[2] Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long.
Email: laxuan@ctuet.edu.vn

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 21.01.2024
Ngày nhận bài sửa: 16.02.2024
Ngày duyệt đăng: 20.02.2024

Từ khóa: *Định thức, lũy thừa của ma trận, vết.*

TÓM TẮT

Có nhiều phương pháp để tính lũy thừa của ma trận vuông trong từng trường hợp cụ thể; tuy nhiên, nói chung chưa có phương pháp giải bài toán tổng quát. Trong bài viết này, nhóm tác giả trình bày một phương pháp để tính lũy thừa của ma trận cấp hai thông qua vết và định thức. Đồng thời, nhóm tác giả đưa ra công thức tổng quát và các ví dụ minh họa trong từng trường hợp cụ thể. Cách tiếp cận của nhóm tác giả có thể áp dụng để tính lũy thừa của ma trận vuông cấp cao hơn trên trường là vành chia được trong một lớp rộng; phương pháp này cũng có thể áp dụng để tìm số hạng tổng quát của dãy số được cho bởi công thức truy hồi tuyến tính,... Bài viết có thể dùng làm tài liệu tham khảo nâng cao cho sinh viên, chuyên đề bồi dưỡng các đội tuyển tham dự kỳ thi Olympic toán học sinh viên toàn quốc.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tính lũy thừa của ma trận là một bài toán mở. Luân và cộng sự (2022) đã tổng hợp 7 phương pháp tính lũy thừa của ma trận, mỗi phương pháp đều có ưu nhược điểm riêng. Riêng trong trường hợp ma trận cấp hai, Williams (1992) đã đưa ra công thức tổng quát thông qua giá trị riêng của ma trận và chứng minh tương đối ngắn gọn. Tiếp theo, McLaughlin (2004) đưa ra công thức khai triển lũy thừa bậc n của ma trận thông qua định thức và vết của nó. McLaughlin dùng phương pháp quy nạp để chứng minh nên giới hạn trong việc ứng dụng để dự đoán công thức đối với ma trận cấp cao hơn. Gần đây, Konvalina (2015) đưa ra công thức khai triển lũy thừa bậc n của ma trận thông qua các phần tử của nó. Tuy nhiên, số hạng tử trong công thức khai triển của Konvalina và McLaughlin là tương đối lớn, từ đó việc rút gọn công thức của họ là không dễ dàng.

Trong bài viết này, nhóm tác giả trình bày phương pháp tính lũy thừa ma trận cấp hai thông qua vết và định thức, trên cơ sở ứng dụng định lý Cayley-Hamilton. Cách tiếp cận của nhóm tác giả hoàn toàn khác với các tác giả trước đây. Đồng thời, nhóm tác giả đưa ra công thức cụ thể trong từng trường hợp. Cuối cùng, chúng tôi trình bày các ví dụ minh họa, các kết quả này dễ dàng kiểm tra bằng máy tính cầm tay hoặc chứng minh bằng quy nạp. Ưu điểm của phương pháp này là trình bày từng bước để đi đến kết quả và đặc biệt là có thể áp dụng để tính lũy thừa của ma trận cấp cao hơn trong một số trường hợp đặc biệt.

2. NỘI DUNG

Trong toàn bộ bài viết này, kí hiệu $tr(A), det(A)$ lần lượt là vết và định thức của ma trận A. Từ định lý Cayley-Hamilton (Prasolov, 1994, tr. 80), suy ra mọi ma trận A vuông cấp 2 thỏa mãn $A^2 - tr(A)\cdot A + det(A)\cdot I = 0.$ Trong trường hợp $det(A)=0$ hoặc $tr(A)=0$ thì bài toán trở nên đơn giản. Trường hợp $det(A)\neq 0$ và $tr(A)\neq 0,$ bài toán quy về việc tính lũy thừa cấp n của ma trận $M=\begin{pmatrix} tr(A) & -det(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Chúng ta biểu diễn ma trận $M=T+E$, trong đó

$$T=\begin{pmatrix} \frac{tr(A)}{2} & det(A) \\ 1 & -\frac{tr(A)}{2} \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} \frac{tr(A)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{tr(A)}{2} \end{pmatrix}.$$

Bởi vì ma trận E giao hoán với mọi ma trận cấp hai khác nên có thể áp dụng công thức khai triển Newton cho $M^n=(T+E)^n$.

Từ đó, ta có thể dùng các công thức tổ hợp để rút gọn từng phần tử của ma trận thu được.

2.1. Phương pháp tính lũy thừa của ma trận cấp hai

Từ định lý Cayley-Hamilton (Prasolov, 1994, tr. 80), suy ra mọi ma trận A vuông cấp 2 thỏa mãn $A^2 = tr(A)\cdot A - det(A)\cdot I.$

2.1.1. Khi $det(A)=0$

Từ $A^2 = tr(A)\cdot A$, dễ dàng chứng minh bằng quy nạp, với mọi $n\geq 2$ thì

$$A^n = \left(tr(A)\right)^{n-1}\cdot A.$$

2.1.2. Khi $det(A)\neq 0, tr(A)=0$

Từ $A^2=-det(A)\cdot I$, dễ dàng chứng minh bằng quy nạp, với mọi $n\geq 2$ thì

$$\begin{cases} A^n = \left(-det(A)\right)^m\cdot I \text{ khi } n=2m, \\ A^n = \left(-det(A)\right)^m\cdot A \text{ khi } n=2m+1, \end{cases}$$

hay

$$A^n = \left(-det(A)\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot A^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

2.1.3. Khi $det(A)\neq 0, tr(A)\neq 0$

Ta có

$$A^n = tr(A)\cdot A^{n-1} - det(A)\cdot A^{n-2},\ \forall n\geq 2.$$

Khi đó

$$\begin{pmatrix} A^n \\ A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tr(A) & -det(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A^{n-1} \\ A^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A^n \\ A^{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} tr(A) & -det(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{n-1} \\ A^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} tr(A) & -det(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} tr(A) & -det(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{n-2} \\ A^{n-3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} tr(A) & -det(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} A^{n-2} \\ A^{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} tr(A) & -det(A) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}, \ \forall n \geq 3.\end{aligned}$$

Đặt $x = tr(A),\ y = -det(A)$. Ta cần tính $M^{n-1},\ n \geq 3,$ với $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Đặt $T = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & y \\ 1 & -\frac{x}{2} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{x}{2} \end{pmatrix}$. Lưu ý rằng E giao hoán với mọi ma trận cấp 2.

Ta viết lại M dưới dạng

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & y \\ 1 & -\frac{x}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{x}{2} \end{pmatrix} = T + E,$$

trong đó $E^k = \left(\frac{x}{2} \cdot I\right)^k = \left(\frac{x}{2}\right)^k \cdot I,\ \forall k \geq 0.$

i) Khi $det(T) = 0$: Vì $tr(T) = 0$ nên $T^2 = 0$, suy ra

$$M^{n-1} = (T+E)^{n-1} = C_{n-1}^{n-1}E^{n-1} + C_{n-1}^{n-2}TE^{n-2} = \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} I + (n-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} \frac{x}{2} & y \\ 1 & -\frac{x}{2} \end{pmatrix} I.$$

ii) Khi $det(T) < 0$: Theo trường hợp 2.1.2 thì

$$T^k = \left(-det(T)\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]} \cdot T^{k-2\left[\frac{k}{2}\right]}.$$

Suy ra

$$M^{n-1} = (T+E)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k T^k E^{n-1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\left(-det(T)\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}\cdot T^{k-2\left[\frac{k}{2}\right]}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\left(\sqrt{-det(T)}\right)^{2\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}\cdot T^{k-2\left[\frac{k}{2}\right]}$$

$$=\sum_{k\text{ chẵn}} C_{n-1}^{k}\left(\sqrt{-det(T)}\right)^{k}\cdot\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}\cdot I$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-det(T)}}\sum_{k\text{ lẻ}} C_{n-1}^{k}\left(\sqrt{-det(T)}\right)^{k}\cdot\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}\cdot T$$

$$=\frac{\left(\frac{tr(A)}{2}+\sqrt{-det(T)}\right)^{n-1}+\left(\frac{tr(A)}{2}-\sqrt{-det(T)}\right)^{n-1}}{2}I$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-det(T)}}\cdot\frac{\left(\frac{tr(A)}{2}+\sqrt{-det(T)}\right)^{n-1}-\left(\frac{tr(A)}{2}-\sqrt{-det(T)}\right)^{n-1}}{2}T.$$

Cuối cùng ta có

$$A^{n}=\left(M^{n-1}\right)_{11}A+\left(M^{n-1}\right)_{12}I.$$

iii) Khi $det(T)>0$: Tương tự như trường hợp ii), ta có

$$M^{n-1}=\left(T+E\right)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}T^{k}E^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\left(-det(T)\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}\cdot T^{k-2\left[\frac{k}{2}\right]}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\left(i\sqrt{det(T)}\right)^{2\left[\frac{k}{2}\right]}\cdot\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}\cdot T^{k-2\left[\frac{k}{2}\right]}$$

$$=\sum_{k\text{ chẵn}} C_{n-1}^{k}\left(i\sqrt{det(T)}\right)^{k}.\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}.I$$

$$+\frac{1}{i\sqrt{det(T)}}\sum_{k\text{ lẻ}} C_{n-1}^{k}\left(i\sqrt{det(T)}\right)^{k}.\left(\frac{tr(A)}{2}\right)^{n-1-k}.T$$

$$=\frac{\left(\frac{tr(A)}{2}+i\sqrt{det(T)}\right)^{n-1}+\left(\frac{tr(A)}{2}-i\sqrt{det(T)}\right)^{n-1}}{2}I$$

$$+\frac{1}{i\sqrt{det(T)}}\cdot\frac{\left(\frac{tr(A)}{2}+i\sqrt{det(T)}\right)^{n-1}-\left(\frac{tr(A)}{2}-i\sqrt{det(T)}\right)^{n-1}}{2}T.$$

Cuối cùng ta có $A^n=\left(M^{n-1}\right)_{11}A+\left(M^{n-1}\right)_{12}I.$

2.2. Các ví dụ

Trong phần này nhóm tác giả trình bày các ví dụ cụ thể minh họa cho các trường hợp ở tiểu mục 2.1.3. Các kết quả có thể dễ dàng kiểm tra bằng máy tính cầm tay hoặc chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 1: Cho $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Tính A^n, $n\geq 3$.

Giải.

Ta có $tr(A)=2,\ det(A)=1$, $M=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Ta viết lại M dưới dạng

$$M=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=T+E,$$

trong đó $T=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $det(T)=0,\ E^k=I,\ \forall k\geq 0.$

$$M^{n-1}=(T+E)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}T^kE^{2-k}$$

$$=(C_{n-1}^{1}T+C_{n-1}^{0})I=(n-1)T+I$$

$$=(n-1)\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}n&-n+1\\n-1&-n+2\end{pmatrix}.$$

Vậy

$$A^n=\left(M^{n-1}\right)_{11}A+\left(M^{n-1}\right)_{12}I$$

$$=nA+(-n+1)I$$

$$=n\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+(-n+1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 2 (Dãy Fibonacci): Tìm số hạng tổng quát của dãy số được xác định bởi

$$F(1)=1,\ F(2)=1 \text{ và } F(n+1)=F(n)+F(n-1) \text{ với } n\geq 2.$$

Giải.

Ta có

$$\begin{pmatrix}F(n+1)\\F(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F(n)\\F(n-1)\end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{pmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F(2) \\ F(1) \end{pmatrix}.$$

Như vậy chúng ta cần tính M^{n-1} với $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ta viết lại M dưới dạng

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = T + E,$$

với $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $det(T) = -\frac{5}{4}$, $tr(E) = 1$, $E^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k I$, $\forall k \geq 0$.

Suy ra

$$M^{n-1} = \frac{\left(\frac{tr(A)}{2} + \sqrt{-det(T)}\right)^{n-1} + \left(\frac{tr(A)}{2} - \sqrt{-det(T)}\right)^{n-1}}{2} I$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-det(T)}} \cdot \frac{\left(\frac{tr(A)}{2} + \sqrt{-det(T)}\right)^{n-1} - \left(\frac{tr(A)}{2} - \sqrt{-det(T)}\right)^{n-1}}{2} T$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{2} I + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{2} T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n} & \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{2^n} \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$F(n+1) = \left(M^{n-1}\right)_{11} F(2) + \left(M^{n-1}\right)_{12} F(1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n}}{2^{n}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{2^{n}}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Vậy

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right],\text{ với mọi } n\geq 1.$$

Ví dụ 3: Cho $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Tính A^n, $n\geq 3$.

Giải.

Ta có $tr\left(A\right)=2, det\left(A\right)=2$, $M=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Ta viết lại M dưới dạng

$$M=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=T+E,$$

trong đó $T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $det\left(T\right)=1,\ E^k=I,\ \forall k\geq 0.$

Suy ra

$$M^{n-1}=\frac{\left(\frac{tr\left(A\right)}{2}+i\sqrt{det\left(T\right)}\right)^{n-1}+\left(\frac{tr\left(A\right)}{2}-i\sqrt{det\left(T\right)}\right)^{n-1}}{2}I$$

$$+\frac{1}{i\sqrt{det\left(T\right)}}\cdot\frac{\left(\frac{tr\left(A\right)}{2}+i\sqrt{det\left(T\right)}\right)^{n-1}-\left(\frac{tr\left(A\right)}{2}-i\sqrt{det\left(T\right)}\right)^{n-1}}{2}T$$

$$=\frac{\left(1+i\right)^{n-1}+\left(1-i\right)^{n-1}}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{i}\cdot\frac{\left(1+i\right)^{n-1}-\left(1-i\right)^{n-1}}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} & -\dfrac{(1+i)^{n-1} - (1-i)^{n-1}}{i} \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$A^n = \left(M^{n-1}\right)_{11} A + \left(M^{n-1}\right)_{12} I$$

$$= \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(1+i)^{n-1} - (1-i)^{n-1}}{i} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-(1-i)(1+i)^{n-1} + (1+i)(1-i)^{n-1}}{2i} & -\dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \\ \dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} & \dfrac{-(1-i)(1+i)^{n-1} + (1+i)(1-i)^{n-1}}{2i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-\dfrac{2}{1+i}(1+i)^{n-1} + \dfrac{2}{1-i}(1-i)^{n-1}}{2i} & -\dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \\ \dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} & \dfrac{-\dfrac{2}{1+i}(1+i)^{n-1} + \dfrac{2}{1-i}(1-i)^{n-1}}{2i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{(1+i)^{n-2} - (1-i)^{n-2}}{i} & -\dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \\ \dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} & -\dfrac{(1+i)^{n-2} - (1-i)^{n-2}}{i} \end{pmatrix}.$$

3. KẾT LUẬN

Bài viết trình bày phương pháp và đưa ra công thức tính lũy thừa của ma trận cấp hai bất kỳ thông qua vết và định thức. Phương pháp này được nhóm tác giả trình bày chi tiết từng bước và không cần nhớ những công thức phức tạp. Mặt khác, từ định lý Caley-Hamilton suy ra, mỗi ma trận cấp n là nghiệm của một đa thức bậc n có hệ số phụ thuộc vào $det(A)$ và $tr(A^i), i = \overline{1, n-1}$ (trang web của wikipedia, (n.d)) . Như vậy, phương pháp của chúng tôi hoàn toàn có thể áp dụng cho ma trận cấp cao hơn trên trường là vành chia được trong những trường hợp khuyết $tr(A^i), i = \overline{2, n-1}$.

Bài viết có thể dùng làm chuyên đề bồi dưỡng các đội tuyển Olympic Đại số sinh viên toàn quốc và phương pháp tính lũy thừa của ma trận cấp cao hơn sẽ được trình bày trong chuỗi bài viết của nhóm tác giả.

Tài liệu tham khảo

Konvalina, J. (2015), "A Combinatorial Formula for Powers of 2×2 Matrices", Mathematics Magazine, 88:4, pp. 280-284

Luân, N.T., Thùy, L.T.T., Nhân, T.N.H. (2022), "Về các phương pháp tính lũy thừa của ma trận cấp 2", Tạp chí khoa học Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long, Số chuyên đề tháng 10/2022, trang 184-189.

McLaughlin, J. (2004), "Combinatorial identities deriving from the nth power of a 2×2 matrix", Integers 4, A19.

Prasolov, V. V. (1994), *Problems and Theorems in Linear Algebra*, Moscow, Russia.

Williams, K. S. (1992), "The nth Power of a 2×2 Matrix", Mathematics Magazine, 65:5, pp. 336.

"Cayley–Hamilton theorem" available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley%E2%80%93Hamilton_theorem (accessed 30 January, 2024).

POWER OF A 2 x 2 MATRIX BASED ON ITS TRACE AND DETERMINANT

ABSTRACT

Powers of a square matrix can be calculated in a variety of ways depending on the situation, but generally speaking, there is currently no way to solve the issue. This article explains how to compute powers of a 2×2 *matrix using its determinant and trace. In addition, we offer generic formulas and case-specific examples in every instance. Our approach can be used to find a formula for the general term of a sequence that is given by a linear regression formula, etc. It can also be used to calculate powers of higher order square matrices on fields that are divisible rings in a wide class. The paper can serve as an advanced resource and a topic for training for university teams participating in the National Mathematics Olympiad for students.*

Keywords: *Determinant, powers of matrices, trace.*