TÍNH LIÊN TỤC HAUSDORFF CỦA ÁNH XẠ CHO BÀI TOÁN TỐI THIỂU HÓA CHI PHÍ TUYẾN ĐƯỜNG CÓ CHỨA THAM SỐ

Phạm Thanh Dược[1], Nguyễn Thị Ngọc Như[1] và Nguyễn Đăng Hoa Nghiêm[1]

[1]Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ

Email: ndhnghiem@ctuet.edu.vn

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 22/8/2024
Ngày nhận bài sửa: 22/10/2024
Ngày duyệt đăng: 01/11/2024

Từ khóa:

Ánh xạ nghiệm xấp xỉ, cân bằng mạng giao thông, tính liên tục Hausdorff, vô hướng hóa phi tuyến.

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu bài toán tối thiểu hóa chi phí tuyến đường có tham số, tập trung vào tính liên tục Hausdorff của các ánh xạ nghiệm xấp xỉ. Trước hết, mô hình tối thiểu hóa chi phí tuyến đường trong trường hợp có tham số được phân tích. Tiếp theo, các khái niệm về tính liên tục và tính liên thông cung của ánh xạ được trình bày chi tiết. Dựa trên giả thiết về tính tựa lồi theo cung liên thông của hàm chi phí tuyến đường, tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán được thiết lập.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trạng thái cân bằng có vai trò thiết yếu trong mạng lưới giao thông, hỗ trợ dự báo và tối ưu hóa điều khiển giao thông trong các hệ thống vận tải. Wardrop (1952) đã đề xuất một mô hình cân bằng vô hướng, trong đó giả định rằng người dùng chọn tuyến đường có chi phí thấp nhất cho hành trình từ điểm xuất phát đến điểm đến. Dựa trên mô hình này, Chen và Yen (1993) mở rộng thành mô hình cân bằng véctơ, nhấn mạnh rằng người dùng sẽ lựa chọn tuyến đường tối ưu Pareto cho chuyến đi của họ. Kể từ đó, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào các khía cạnh khác nhau của bài toán tối thiểu chi phí tuyến đường dựa trên mô hình cân bằng véctơ, tiêu biểu như Hung (2018), Wei và cộng sự (2021), cùng các tài liệu tham khảo liên quan.

Trong các khảo sát thực tế của nhiều bài toán khác nhau, vấn đề chính mà các nhà nghiên cứu gặp phải thường là số liệu xấp xỉ do việc sử dụng các thiết bị đo hoặc độ tin cậy của kết quả thống kê. Những yếu tố này làm cho các dữ liệu thu thập được thiếu độ tin cậy và có nhiều hạn chế. Khi đó, các mô hình toán học được áp dụng trong việc thể hiện những vấn đề này được thiết kế dưới dạng gần đúng, nhằm mục đích kiểm soát các khía cạnh thiết yếu của hiện tượng trong thế giới thực đang được nghiên cứu. Khi nghiên cứu những mô hình gần đúng, các nhà nghiên cứu thường tìm cách để có được nghiệm, thường được gọi là "nghiệm chính xác". Tuy nhiên, việc nhận ra các nghiệm được gọi là nghiệm chính xác vẫn là các nghiệm gần đúng là một điều quan trọng. Vì vậy, nghiên cứu về các nghiệm gần đúng là mối quan tâm lớn trong việc ứng dụng và ước tính thực tiễn (Khanh, 2007; Sisarat, 2020).

Để đảm bảo rằng dù là những thay đổi nhỏ trong dữ liệu đầu vào, chẳng hạn dữ liệu đầu vào phụ thuộc vào các tham số, dẫn đến những thay đổi nhỏ trong dữ liệu xuất ra thì việc thực hiện các bài kiểm tra là vô cùng quan trọng. Những bài kiểm tra này là cần thiết để đảm bảo tính đáng tin cậy, phạm vi nhiễu và tính có thể ứng dụng thực tế của các ánh xạ nghiệm trong các viễn cảnh thực. Do đó, việc khảo sát tính ổn định nghiệm của các mô hình có chứa tham số là rất cần thiết, trong đó các điều kiện đủ cho tính liên tục của ánh xạ nghiệm trong các mô hình chứa tham số ngày càng được quan tâm và đang được nghiên cứu rộng rãi, bằng chứng là có nhiều nỗ lực nghiên cứu trong Li và Li (2011), Anh và các cộng sự (2020).

Được thúc đẩy bởi các yếu tố đã nêu trên, nghiên cứu này hướng tới việc kiểm tra điều kiện liên tục Hausdorff cho bài toán tối thiểu chi phí tuyến đường với tham số trong trường hợp không lồi. Bài báo gồm hai kết quả chính: Thứ nhất, một biểu diễn vô hướng của các hàm gần đúng tối thiểu chi phí tuyến đường theo tham số được đưa ra. Thứ hai, các điều kiện đủ cho tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm được tính toán mà không cần đến giả thiết về tính đơn điệu hay tính lồi của hàm chi phí tuyến đường.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu này phân tích một mạng lưới giao thông đô thị dưới dạng mạng lưới có hướng, trong đó các nút đại diện cho các điểm xuất phát, điểm đến và các điểm giao cắt, còn các liên kết biểu thị các đoạn đường một chiều. Tập hợp các nút và các liên kết trong mô hình được ký hiệu lần lượt là $\mathcal{N}$ và $\mathcal{L}$, với cả hai tập hợp đều hữu hạn. Trong mạng lưới giao thông đô thị này, một tuyến đường từ nút x đến nút y được xác định như một chuỗi các liên kết liền kề trong tập hợp $\mathcal{L}$, cụ thể là:

$$(x,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{k-1},x_k),(x_k,y),$$

trong đó mỗi x_j thuộc về tập hợp $\mathcal{N}$ với $j := \overline{1,k}$. Tập hợp $R(x,y)$ biểu thị tất cả các tuyến đường từ nút x đến nút y mà không đi qua bất kỳ liên kết nào hai lần. Điều đáng lưu ý là $R(x,y)$ và tập hợp tổng các tuyến đường

$$\mathcal{R} = \cup_{x,y\in\mathcal{N}} R(x,y),$$

đều là tập hợp hữu hạn. Vì vậy, tập hợp tất cả các tuyến đường trong mô hình có thể được biểu diễn dưới dạng $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$. Đối với mỗi tuyến đường $R_r \in \mathcal{R}$, luồng giao thông được ký hiệu là f_r và và chi phí di chuyển dọc theo tuyến đường đó là c_r. Véctơ $f := (f_r)_{r=\overline{1,n}}$ là phân luồng hoặc luồng đường và véctơ $C := (c_r)_{r=\overline{1,n}}$ biểu thị cho chi phí phân luồng hoặc chi phí tuyến. Tiếp theo, xét các thuộc tính của phân bổ lưu lượng giao thông trong thực tế. Đầu tiên, tập hợp tất cả các nhu cầu di chuyển từ nút x đến nút y được xác định, trong đó nhu cầu di chuyển p được coi là tham số của mạng lưới có hướng. Trong mô hình này, các giá trị p được giới hạn, do đó, tập hợp nhu cầu $\mathcal{P}$ cũng bị chặn. Thứ hai, đối với mỗi liên kết $L_i \in \mathcal{L}$ chúng tôi biểu thị rõ sự giới hạn sức chứa đối với luồng di chuyển dọc theo liên kết đó là $[0, F_i]$, trong đó $F_i \in \mathbb{R}_+$ biểu thị cho sức chứa tối đa của luồng đối với liên kết L_i. Sau đó, tuyến đường liên kết được xác định bởi

$$a_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{nếu liên kết } L_i \text{ là một phần của tuyến } R_r, \\ 0, & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

và tập hợp tất cả luồng đường có thể đáp ứng nhu cầu đi lại thuộc tập hợp này có thể được xác định như sau:

$$S(p) = \left\{ f = (f_r)_{r=\overline{1,n}} \mid p(x,y) = \sum_{R_r\in R(x,y)} f_r, 0 \le \sum_{r=1}^{n} a_{ir} f_r \le F_i \right\} \tag{1}$$

Khi đó, hàm có khả năng cung cấp $S : \mathcal{P} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ được xác định bởi (1) là Lipschitz liên tục với các giá trị lồi khác rỗng, compact trên tập $\mathcal{P}$ (xem trang 376 trong Rockafellar và Wets (2009)), và do đó $S(\mathcal{P})$ là compact vì tính hữu hạn của tập $\mathcal{P}$.

Những biến động của thị trường dẫn đến sự thay đổi chi phí tuyến đường, vốn chịu ảnh hưởng bởi nhu cầu p. Do đó, hàm chi phí tuyến đường được xác định là $C(f,p) = (c_r(f,p))_{r=\overline{1,n}}$ đối với mọi luồng đường khả thi f của nguồn cung. Nguyên lý nổi tiếng về người dùng của Wardrop nêu rằng khi luồng giao thông đạt đến trạng thái cân bằng, người dùng sẽ chỉ chọn tuyến đường có chi phí tối thiểu cho hành trình của họ. Với mỗi $p \in \mathcal{P}$, bài toán tối thiểu hóa chi phí tuyến đường theo tham số được xác định như sau:

$$\min C(f,p) \text{ sao cho } f \in S(p).$$

Trong nghiên cứu các bài toán thực tế, người ta thường giải quyết dữ liệu gần đúng vì có sự hiện diện của các thiết bị đo lường hoặc các kết quả thống kê. Do đó, các mô hình toán học được sử dụng để biểu thị những bài toán này đều mang tính gần đúng. Dựa trên những lý do nêu trên, khái niệm về nghiệm gần đúng cho bài toán chi phí tối tiểu cho tuyến đường được giới thiệu như sau.

Định nghĩa 1. Với $\varepsilon \in \mathbb{R}_+, e \in \text{int } \mathbb{R}^n_+$, một tuyến đường $f \in S(p)$ được gọi là một tối tiểu gần đúng cho bài toán tối tiểu chi phí tuyến đường theo tham số, viết là $f \in \text{Sol}(\varepsilon,p)$, nếu không tồn tại bất kỳ $g \in S(p)$ sao cho

$$C(g,p) - C(f,p) + \varepsilon e \in -\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}.$$

Chú ý: Với mọi $0 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_2$ và $p \in \mathcal{P}$, có một $\text{Sol}(\varepsilon_1,p) \subset \text{Sol}(\varepsilon_2,p)$.

Tiếp theo, các khái niệm chính được xem xét lại, đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích các điều kiện ổn định cho bài toán tối thiểu hóa chi phí tuyến đường theo tham số.

Định nghĩa 2. (Avriel, 1980) Giả sử Ω là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Với mỗi cặp điểm $\bar{f}, \hat{f} \in \mathbb{R}^n$, giả sử $\Gamma_{\bar{f},\hat{f}}: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ là một hàm liên tục sao cho

$$\Gamma_{\bar{f},\hat{f}}(0) = \bar{f} \text{ và } \Gamma_{\bar{f},\hat{f}}(1) = \hat{f}.$$

Khi đó, $\Gamma_{\bar{f},\hat{f}}$ được gọi là một cung trên $\mathbb{R}^n$ với điểm đầu $\bar{f}$ và cuối $\hat{f}$. Tập Ω được gọi là một cung liên thông nếu với mỗi cặp điểm f, g trong Ω, có một cung $\Gamma_{f,g}$ trên Ω.

Định nghĩa 3. (Anh,2022) Một hàm véctơ $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là $\mathbb{R}^n_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung liên thông Ω của $\mathbb{R}^n$ nếu với $f, g \in \Omega$, tồn tại một cung $\Gamma_{f,g}$ trên Ω sao cho với mỗi $t \in]0,1[$, có thể tìm một vài $s \in]0,1[$,

$$C(\Gamma_{f,g}(t)) \in (1-s)C(f) + sC(g) - \mathbb{R}^n_+.$$

Định nghĩa 4. (Luc, 1989) Một hàm véctơ $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được gọi là

(a) $\mathbb{R}^n_+$-nửa liên tục dưới ($\mathbb{R}^n_+$-lsc) tại $f_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu với bất kỳ lân cận $\mathcal{V}$ của $C(f_0)$, tồn tại một vài lân cận $\mathcal{U}$ của f_0 sao cho $C(f) \in \mathcal{V} + \mathbb{R}^n_+$ với mọi $f \in \mathcal{U}$;

(b) $\mathbb{R}^n_+$-nửa liên tục trên ($\mathbb{R}^n_+$-usc) tại $f_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu $-C$ là $\mathbb{R}^n_+$-lsc tại f_0;

(c) $\mathbb{R}^n_+$-liên tục tại $f_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu nó vừa $\mathbb{R}^n_+$-usc và $\mathbb{R}^n_+$-lsc tại f_0.

Định nghĩa 5. [Göpfert các cộng sự (2003)] Một hàm véctơ $W: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ được gọi là

(a) nửa liên tục trên (usc) tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu với bất kỳ lân cận $\mathcal{V}$ của $W(x_0)$, có một vài lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $W(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$;

(b) nửa liên tục dưới (lsc) tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu với bất kỳ tập mở $\mathcal{V}$ của $\mathbb{R}^n$ với $W(x_0) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, có một vài lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $W(x) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(c) liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu nó vừa usc và lsc tại x_0.

Định nghĩa 6. (Göpfert, 2003)]Một hàm đa trị $W: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ được gọi là

(a) nửa liên tục trên Hausdorff (Husc) tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{V}$ của điểm gốc trong $\mathbb{R}^n$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $W(x) \subset W(x_0) + \mathcal{V}$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(b) nửa liên tục dưới Hausdorff (Hlsc) tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{V}$ của điểm gốc trong $\mathbb{R}^n$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $W(x_0) \subset W(x) + \mathcal{V}$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(c) liên tục Hausdorff tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nếu nó vừa Husc và Hlsc tại x_0.

Bổ đề 7. Giả sử $K: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là nửa liên tục trên có giá trị compact trên $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Nếu $\mathcal{A}$ là compact, khi đó hàm $W: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ được định nghĩa bởi

$$W(x) := K(\mathcal{A}, x) = \{K(a, x): a \in \mathcal{A}\}$$

là usc trên $\mathcal{B}$.

Chứng minh. Nếu W không usc tại $x_0 \in \mathcal{B}$ thì có một lân cận mở $\mathcal{U}$ của $W(x_0)$, một dãy $\{x_n\}$ hội tụ tại x_0 sao cho

$$W(x_n) \not\subset \mathcal{U}, \text{với mọi } n.$$

Tức là, tồn tại $y_n \in W(x_n) \setminus \mathcal{U}$. Khi đó, có một $a_n \in \mathcal{A}$ sao cho $y_n \in K(a_n, x_n)$. Từ tính compact của $\mathcal{A}$, chúng tôi có thể giả sử rằng $\{a_n\}$ hội tụ tại $a_0 \in \mathcal{A}$. Từ đó, K là usc với giá trị compact tại (a_0, x_0), dãy $\{y_n\}$ hội tụ tại $y_0 \in K(a_0, x_0)$. Do đó, $y_0 \in W(x_0) \subset \mathcal{U}$ vô lý vì y_n không thuộc vào $\mathcal{U}$ với mọi n. Khi đó, W là usc trên $\mathcal{B}$.

Định nghĩa 8. (Göpfert, 2003) Một hàm vô hướng hóa phi tuyến $\varphi_e: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được định nghĩa

$$\varphi_e(y) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: y \in \lambda e - \mathbb{R}^n_+\}, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Bổ đề 9. (Göpfert, 2003) Các khẳng định sau đây luôn đúng

(a) với mọi $\lambda \in \mathbb{R}, \varphi_e(y) < \lambda$ khi và chỉ khi $y \in \lambda e - \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$;

(b) với mọi $\lambda \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Y}, \varphi_e(y + \lambda e) = \varphi_e(y) + \lambda$;

(c) với mọi $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, y_1 \in y_2 - \mathbb{R}^n_+$ dẫn đến $\varphi_e(y_1) \le \varphi_e(y_2)$ tại int $\mathbb{R}^n_+$ đại diện cho phần trong $\mathbb{R}^n_+$.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Xét các hàm số $\xi: \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $H, Q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{P} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ được định nghĩa

$$\xi(g, p, f) := \varphi_e(C(g, p) - C(f, p)),$$
$$H(f, \varepsilon, p) := \{\bar{g} \in S(p): \xi(\bar{g}, p, f) \le \xi(g, p, f) + \varepsilon \ \forall f \in S(p)\},$$
$$Q(f, \varepsilon, p) := \{\bar{g} \in S(p): \xi(\bar{g}, p, f) < \xi(g, p, f) + \varepsilon \ \forall f \in S(p)\},$$

với mọi $f, g \in \mathbb{R}^n, p \in \mathcal{P}, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Khi đó, biểu thị vô hướng của $\mathrm{Sol}(\varepsilon, p)$ được xây dựng trong kết quả sau.

Bổ đề 10. Cho $\varepsilon > 0, p \in \mathcal{P}$. Nếu $C(\cdot, p)$ là một $\mathbb{R}^n_+$- tựa lồi tự nhiên theo cung liên thông trên $S(p)$. Khi đó,

$$Q(S(\mathcal{P}), \varepsilon, p) \subset \mathrm{Sol}(\varepsilon, p) \subset H(S(\mathcal{P}), \varepsilon, p) \subset \mathrm{cl}Q(S(\mathcal{P}), \varepsilon, p).$$

Chứng minh. Đối với bao hàm thức thứ nhất, lấy tùy ý $\bar{g} \in Q(S(\mathcal{P}), \varepsilon, p)$, khi đó tồn tại $\bar{f} \in S(\mathcal{P})$ sao cho

$$\xi(\bar{g}, p, \bar{f}) < \xi(g, p, \bar{f}) + \varepsilon \ \forall g \in S(p). \quad (2)$$

Nếu $\bar{g} \notin \mathrm{Sol}(\varepsilon,p)$ thì có một $\hat{g} \in S(p)$ sao cho

$$C(\hat{g},p) - C(\bar{g},p) + \varepsilon e \in -\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}.$$

Từ Bổ đề 9 (b) và (c), ta được $\xi(\hat{g},p,\bar{f}) + \varepsilon \leq \xi(\bar{g},p,\bar{f})$ mâu thuẫn (2). Vì vậy, $\bar{g} \in \mathrm{Sol}(\varepsilon,p)$.

Đối với bao hàm thức thứ hai, với bất kỳ $f \in \mathrm{Sol}(\varepsilon,p)$, ta có

$$C(g,p) - C(f,p) + \varepsilon e \notin -\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \text{ với mọi } g \in S(p).$$

Kết hợp với Bổ đề 9 (a) và (b), ta có

$$\xi(g,p,f) + \varepsilon \geq 0 = \xi(f,p,f).$$

Do đó, $f \in H(f,\varepsilon,p) \subset H(S(\mathcal{P}),\varepsilon,p)$.

Đối với bao hàm thức cuối, với $f \in S(\mathcal{P})$, lấy $\bar{g} \in H(f,\varepsilon,p)$, $\hat{g} \in Q(f,\varepsilon,p)$ tùy ý, ta có

$$\xi(\bar{g},p,f) \leq \xi(g,p,f) + \varepsilon \text{ và } \xi(\hat{g},p,f) < \xi(g,p,f) + \varepsilon,\ \forall g \in S(p) \qquad (3)$$

Từ $\mathbb{R}^n_+$-tựa lồi theo cung của $C(\cdot,p)$ trên $S(p)$, từ Bổ đề 3.4 (b) trong Anh và các cộng sự (2023) cho chúng ta kết luận rằng tồn tại một arc $\Gamma_{\bar{g},\hat{g}}$ trên $S(p)$ thỏa mãn với mỗi $t \in]0,1[$, tồn tại $s \in]0,1[$ sao cho

$$\xi(\Gamma_{\bar{g},\hat{g}}(t),p,f) \leq (1-s)\xi(\bar{g},p,f) + s\xi(\hat{g},p,f).$$

Cùng với (3) ta có kết quả

$$\xi(\Gamma_{\bar{g},\hat{g}}(t),p,f) < (1-s)(\xi(g,p,f)+\varepsilon) + s(\xi(g,p,f)+\varepsilon) = \xi(g,p,f)+\varepsilon,$$

với mọi $g \in S(p)$, và vì vậy $\Gamma_{\bar{g},\hat{g}}(t) \in Q(f,\varepsilon,p)$. Giả sử $t \to 0$, ta có $\bar{g} \in \mathrm{cl}\, Q(f,\varepsilon,p)$. Vì vậy, $H(f,\varepsilon,p) \subset \mathrm{cl}\, Q(f,\varepsilon,p) \subset \mathrm{cl}\, Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon,p)$, ta có điều phải chứng minh.

Để đảm bảo những xáo trộn nhiễu loạn nhỏ trong dữ liệu đầu vào, như sự thay đổi nhu cầu p và ε các giá trị gần đúng, dẫn đến những thay đổi trong dữ liệu ra trọng phạm vi cho phép, đặc biệt là chi phí tối thiểu cho tuyến đường theo tham số véctơ $\mathrm{Sol}(\varepsilon,p)$, điều quan trọng là phải kiểm tra tính liên tục của các ánh xạ nghiệm. Điều này đảm bảo tính đáng tin cậy, tính chính xác, khả năng ứng dụng thực tiễn của các hàm nghiệm trong các tình huống thực. Vì vậy, trong phần còn lại này, các điều kiện cho tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán tối tiểu chi phí tuyến đường được xây dựng theo tham số.

Định lý 11. Giả sử rằng

(i) C là $\mathbb{R}^n_+$-liên tục tại $S(\mathcal{P}) \times \mathcal{P}$;

(ii) với mỗi $p \in \mathcal{P}, C(\cdot,p)$ là tựa lồi tự nhiên theo cung liên thông $\mathbb{R}^n_+$ trên $S(p)$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm Sol liên tục Hausdorff trên $]0,+\infty[\times \mathcal{P}$.

Chứng minh. Sử dụng kỹ thuật chứng minh tương tự của Bổ đề 3.8 (c) trong Anh và các cộng sự (2023), kết luận rằng ξ liên tục trên $S(\mathcal{P}) \times \mathcal{P} \times S(\mathcal{P})$. Khi đó, với mỗi $(p,f) \in \mathcal{P} \times S(\mathcal{P})$, hàm số $\xi(\cdot,p,f)$ đạt giá trị cực tiểu trên một tập compact $S(p)$. Do đó, tập $H(f,\varepsilon,p)$ và $Q(f,\varepsilon,p)$ khác rỗng với mọi $\varepsilon > 0$. Với mỗi lân cận $\mathcal{V}$ của điểm gốc trong $\mathbb{R}^n$, tồn tại một vài lân cận $\mathcal{V}_1$ của điểm gốc trong $\mathbb{R}^n$ sao cho

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V} \qquad (4)$$

Phần còn lại của chứng minh này được chia thành bốn bước.

Bước 1. Ánh xạ H là nửa liên tục trên có giá trị compact trên $S(\mathcal{P}) \times]0,+\infty[\times \mathcal{P}$.

Giả sử rằng H không usc tại $(f_0,\varepsilon_0,p_0) \in S(\mathcal{P}) \times]0,+\infty[\times \mathcal{P}$, một lân cận mở $\mathcal{U}$ của $H(f_0,\varepsilon_0,p_0)$ và một dãy $\{(f_n,\varepsilon_n,p_n)\}$ hội tụ đến (f_0,ε_0,p_0) sao cho

$$H(f_n,\varepsilon_n,p_n) \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset \text{ với mọi } n.$$

Tức là, $g_n \in H(f_n,\varepsilon_n,p_n) \setminus \mathcal{U}$ với mọi n.

Khi đó S là usc với giá trị compact tại p_0 và $g_n \in S(p_n)$, từ Mệnh đề 2.19 trong Hu và Papageorgiou (1997) cho ta giả sử rằng

$$\{g_n\} \to g_0 \in S(p_0).$$

Nếu $g_0 \notin H(f_0, \varepsilon_0, p_0)$, khi đó tồn tại $\hat{g} \in S(p_0)$ sao cho

$$\xi(g_0, p_0, f_0) > \xi(\hat{g}, p_0, f_0) + \varepsilon_0. \quad (5)$$

Từ đó, S là lsc tại p_0 và $\hat{g} \in S(p_0)$, từ Mệnh đề 2.6 trong Hu và Papageorgiou (1997), có $\{\hat{g}_n\} \subset S(p_n)$ hội tụ đến $\hat{g}$. Từ $g_n \in H(f_n, \varepsilon_n, p_n)$, ta có

$$\xi(g_n, p_n, f_n) \le \xi(\hat{g}_n, p_n, f_n) + \varepsilon_n.$$

Điều này kết hợp với tính liên tục của ξ trên $S(\mathcal{P}) \times \mathcal{P} \times S(\mathcal{P})$ dẫn đến

$$\xi(g_0, p_0, f_0) \le \xi(\hat{g}, p_0, f_0) + \varepsilon_0$$

mâu thuẫn (5). Tức là, $g_0 \in H(f_0, \varepsilon_0, p_0) \subset \mathcal{U}$ nó thì vô lý khi $\{g_n\} \not\subset \mathcal{U}$ và $\mathcal{U}$ mở. Vì vậy, H nửa liên tục trên trên $S(\mathcal{P}) \times]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Tiếp theo, với bất kỳ $\{g_n\} \subset H(f, \varepsilon, p)$ hội tụ đến $g_0 \in S(p)$, ta có

$$\xi(g_n, p, f) \le \xi(g, p, f) + \varepsilon \text{ với mọi } g \in S(p).$$

Áp dụng tính liên tục của $\xi(\cdot, p, f)$ tại g_0, ta có

$$\xi(g_0, p, f) \le \xi(g, p, f) + \varepsilon \text{ với mọi } g \in S(p),$$

và do đó $g_0 \in H(f, \varepsilon, p) \subset S(p)$. Vì $S(p)$ compact nên $H(f, \varepsilon, p)$ cũng compact.

Bước 2. Ánh xạ nghiệm Sol là nửa liên tục trên Hausdorff trên $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Giả sử $(\varepsilon_0, p_0) \in]0, +\infty[\times \mathcal{P}$ tùy ý. Từ phần 2, tập $S(\mathcal{P})$ compact. Điều này cùng với Bước 1 và Bổ đề 7 dẫn đến $H(S(\mathcal{P}), \cdot, \cdot)$ là usc tại (ε_0, p_0). Do đó, với $\mathcal{V}_1$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của (ε_0, p_0) sao cho

$$H(S(\mathcal{P}), \varepsilon, p) \subset H(S(\mathcal{P}), \varepsilon_0, p_0) + \mathcal{V}_1 \text{ với mọi } (\varepsilon, p) \in \mathcal{U}.$$

Từ Bổ đề 10 và (4), ta có

$$\mathrm{Sol}(\varepsilon, p) \subset \mathrm{cl}\, Q(S(\mathcal{P}), \varepsilon_0, p_0) + \mathcal{V}_1 \subset Q(S(\mathcal{P}), \varepsilon_0, p_0) + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1 \subset \mathrm{Sol}(\varepsilon_0, p_0) + \mathcal{V}$$

Vì vậy, ánh xạ Sol là Husc tại (ε_0, p_0).

Bước 3. Với mỗi $f \in S(\mathcal{P})$, hàm $Q(f, \cdot, \cdot)$ là nửa liên tục dưới trên $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Nếu $Q(f, \cdot, \cdot)$ không là lsc tại $(\varepsilon_0, p_0) \in]0, +\infty[\times \mathcal{P}$, khi đó $g_0 \in Q(f, \varepsilon_0, p_0)$ và $\{(\varepsilon_n, p_n)\}$ hội tụ đến (ε_0, p_0) sao cho với mọi $g_n \in Q(f, \varepsilon_n, p_n)$, dãy $\{g_n\}$ không hội tụ đến g_0. Do đó, giả sử rằng $g_0 \notin Q(f, \varepsilon_n, p_n)$ với mọi n, tức là $\hat{g}_n \in S(p_n)$ sao cho

$$\xi(g_0, p_n, f) \ge \xi(\hat{g}_n, p_n, f) + \varepsilon_n \ \forall n \quad (6)$$

Bởi vì S là usc với giá trị compact tại p_0 và $\hat{g}_n \in S(p_n)$, từ Mệnh đề 2.19 trong Hu và Papageorgiou (1997), dãy $\{\hat{g}_n\}$ hội tụ đến $\hat{g} \in S(p_0)$. Kết hợp với (6), tính liên tục của $\xi(\cdot, \cdot, f)$ dẫn đến

$$\xi(g_0, p_0, f) \ge \zeta(\hat{g}, p_0, f) + \varepsilon_0,$$

mâu thuẫn với $g_0 \in Q(f, \varepsilon_0, p_0)$. Do đó, $Q(f, \cdot, \cdot)$ là nửa liên tục dưới trên $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Bước 4. Ánh xạ Sol là nửa liên tục dưới Hausdorff trên $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Với bất kỳ $(\varepsilon_0, p_0) \in]0, +\infty[\times \mathcal{P}$, giả sử $\mathcal{N}$ là một tập mở sao cho

$$Q(S(\mathcal{P}), \varepsilon_0, p_0) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset.$$

Khi đó, ta có $f \in S(\mathcal{P})$ sao cho $Q(f, \varepsilon_0, p_0) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Vì $Q(f, \cdot, \cdot)$ lsc tại (ε_0, p_0), với lân cận $\mathcal{U}$ của (ε_0, p_0) sao cho

$$Q(f, \varepsilon, p) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \text{ với mọi } (\varepsilon, p) \in \mathcal{U}.$$

Dẫn đến,

$$Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon,p)\cap\mathcal{N}\neq\emptyset \text{ với mọi } (\varepsilon,p)\in\mathcal{U},$$

nghĩa là, $Q(S(\mathcal{P}),\cdot,\cdot)$ lsc tại (ε_0,p_0). Từ Mệnh đề 2.38 trong Hu và Papageorgiou (1997), $\mathrm{cl}\,Q(S(\mathcal{P}),\cdot,\cdot)$ cũng lsc tại (ε_0,p_0). Khi đó $\mathrm{cl}\,Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon_0,p_0)$ là một tập compact đóng $S(p_0)$, từ Định lý 2.68 trong Hu và Papageorgiou (1997), cl $Q(S(\mathcal{P}),\cdot,\cdot)$ là Hlsc tại (ε_0,p_0). Khi đó, với $\mathcal{V}_1$, một lân cận $\mathcal{U}_0$ của (ε_0,p_0) sao cho

$$\mathrm{cl}\,Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon_0,p_0)\subset\mathrm{cl}\,Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon,p)+\mathcal{V}_1.$$

Kết hợp với Bổ đề 10 và (4), ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Sol}(\varepsilon_0,p_0)&\subset\mathrm{cl}\,Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon_0,p_0)\subset\mathrm{cl}\,Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon,p)+\mathcal{V}_1\\&\subset Q(S(\mathcal{P}),\varepsilon,p)+\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_1\subset\mathrm{Sol}(\varepsilon,p)+\mathcal{V}\end{aligned}$$

Với mọi $(\varepsilon,p)\in\mathcal{U}_0$. Vì vậy, Sol là nửa liên tục dưới Hausdorff tại (ε_0,p_0).

Chú ý: Trong Hung (2018), các tác giả nghiên cứu tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm mạnh và yếu cho các bài toán mạng giao thông chứa tham số. Sau đó, các tác giả trong Anh và các cộng sự (2020) đã tiến hành nghiên cứu về tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm yếu cho bài toán cân bằng giao thông, sử dụng các tính chất đơn điệu của hàm mục tiêu. Định lý 11 nghiên cứu tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán tối thiểu hóa chi phí tuyến đường theo nghĩa Pareto. Loại nghiệm này có giá trị thực tiễn vượt trội hơn so với các nghiệm mạnh và nghiệm yếu. Do đó, Định lý 11 khác với kết quả thu được trong Anh và các cộng sự (2020); Hung (2018). Các tác giả trong Han và Li (2024) gần đây đã khám phá các vấn đề tổng quát được gọi là vấn đề tối ưu hóa véctơ tham số. Họ đã xây dựng tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm Pareto cho những vấn đề như vậy bằng cách giả sử tính chất tựa lồi hình nón tự nhiên của hàm mục tiêu. Điều đáng chú ý là tính chất tựa lồi nón tự nhiên theo cung liên thông yếu hơn tính chất nói trên, dẫn đến sự khác biệt đáng kể giữa Định lý 4.2 và các phát hiện trong Han và Li (2024). Do đó, đây là kết quả hoàn toàn mới.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã thành công trong việc phân tích bài toán tối thiểu hóa chi phí tuyến đường có tham số thông qua việc thiết lập tính liên tục Hausdorff của các ánh xạ nghiệm xấp xỉ. Dựa trên các giả thiết về tính tựa lồi và tính liên thông cung của hàm chi phí tuyến đường, kết quả chứng minh cho thấy ánh xạ nghiệm xấp xỉ duy trì được tính liên tục Hausdorff ngay cả trong những mạng giao thông phức tạp. Các kết quả này không chỉ mở ra tiềm năng áp dụng phương pháp cho các bài toán tối ưu khác mà còn cung cấp các giải pháp hiệu quả hơn trong quản lý và điều phối giao thông.

Tài liệu tham khảo

Avriel, M., Zang, I., Generalized arcwise-connected functions and characterizations of local-global minimum properties, J. Optim. Theory Appl. 32 (1980) 407-425

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N., Continuity of approximate solution maps of primal and dual véctơ equilibrium problems, Optim. Lett. 13 (2018) 201-211

Anh, L.Q., Duoc, P.T., Tam, T.N., On the stability of approximate solutions to set-valued equilibrium problems, Optimization 69 (2020) 1583-1599

Anh, L.Q., Duoc, P.T., Tung, N.M., On Lipschitz continuity of solutions to equilibrium problems via the Hiriart Urruty oriented distance function, Comp. Appl. Math. 41, 57 (2022)

Anh, L.Q., Anh, N.T., Duoc P.T., Khanh, L.T.V., Thu, P.T.A., The connectedness of weakly and strongly efficient solution sets of nonconvex vécto equilibrium problems, Appl. Set-Valued Anal. Optim. 4 (2022) 109-127

Anh, L.Q., Anh, N.T., Duoc, P.T., Khanh, L.T.V., Thu, P.T.A., Connectedness properties of efficient and minimal sets to vécto optimization problems, Appl. Set-Valued Anal. Optim. 5 (2023) 121-135

Chen, G.Y., Yen, N.D., On the variational inequality model for network equilibrium, Internal Report 3.196 (724), Dep. Math. Univ. Pisa (1993)

Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., Zălinescu, C., Variational Methods in Partially Ordered Spaces. Springer, Berlin, 2003

Hu, S., Papageorgiou, N., Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory. Boston: Kluwer, 1997

Han, Y., Gong, X.H., Lower semicontinuity of solution mapping to parametric generalized strong vécto equilibrium problems, Appl. Math. Lett. 28 (2014) 38-41

Hung, N.V., On the stability of the solution mapping for parametric traffic network problems. Ind. Math. 29 (2018), 885-894

Hung, N.V., Novo, V., Tam, V.M., Error bound analysis for vécto equilibrium problems with partial order provided by a polyhedral cone. J. Glob. Optim. 82 (2022) 139-159

Han, Y., Li, S.J., Stability of the approximate solution sets for set optimization problems with the perturbations of feasible set and objective mapping. Optimization. (2024) 1-31

Khanh, P.Q., Luu, L.M., Lower and upper semicontinuity of the solution sets and the approximate solution sets to parametric multivalued quasivariational inequalities, J. Optim. Theory Appl. 133 (2007) 329-339

Luc, D.T., Theory of Vécto Optimization. Springer, Berlin, 1989

Li, X.B., Li, S.J., Continuity of approximate solution mappings for parametric equilibrium problems. J. Glob. Optim. 51 (2011) 541-548

Preechasilp, P., Wangkeeree, R., A note on semicontinuity of the solution mapping for parametric set optimization problems, Optim. Lett. 13 (2019) 1085-1094

Rockafellar, R.T., Wets, R.J.N., Variational Analysis, Springer, Berlin, 2009

Sisarat, N., Wangkeeree, R., Tanaka, T., Sequential characterizations of approximate solutions in convex vécto optimization problems with set-valued maps, J. Glob. Optim 77 (2020) 273-287

Wardrop, J.G., Some theoretical aspects of road traffic research, Proc. Inst. Civil. Engrs. 1 (1952) 325-362

Wangkeeree, R., Preechasilp, P., Continuity of the solution mappings to parametric generalized vécto equilibrium problems. Appl. Math. Lett. 29 (2014) 42-45

Wei, H., Chen, C., Wu, B., Vécto network equilibrium problems with uncertain demands and capacity constraints of arcs, Optim. Lett. 15 (2021) 1113-1131

HAUSDORFF CONTINUITY OF SOLUTION MAPPINGS FOR PARAMETER ROUTE COST MINIMIZATION PROBLEM

ABSTRACT

This paper investigates the problem of minimizing the cost of parametric routes, focusing on the Hausdorff continuity of approximate solution mappings. First, we analyze a model of the parametric route cost minimization problem. Definitions of continuity and arcwise connectivity of mappings are then presented. Finally, the Hausdorff continuity of the approximate solution mapping for the problem is established based on the assumption of arcwise quasi-convexity of the route cost functions.

Keywords: *approximate solution mapping, Hausdorff continuity, nonlinear scalarization traffic, network equilibrium.*