

TÍNH LIÊN TỤC LIPSCHITZ CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Nguyễn Hữu Danh^{1*} và Phạm Thanh Dục²

¹Trường Đại học Tây Đô

²Trường Đại học Kỹ thuật Công nghệ Cần Thơ

(*Email: nhdanh@tdu.edu.vn)

Ngày nhận: 14/02/2023

Ngày phản biện: 26/3/2023

Ngày duyệt đăng: 20/4/2023

TÓM TẮT

Nghiên cứu được thực hiện về tính ổn định theo nghĩa Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán cân bằng vectơ chứa tham số trong không gian định chuẩn. Cụ thể là để đạt được tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán này, chúng tôi đã sử dụng công cụ hàm vô hướng hóa phi tuyến Gerstewitz, một công cụ rất hữu hiệu trong việc nghiên cứu các tính chất của nghiệm các bài toán liên quan đến tối ưu, cùng với các giả thiết về tính lõm giảm nhẹ của hàm mục tiêu. Chúng tôi cũng đưa ra ví dụ cho thấy rằng tính chất này yếu hơn so với tính lõm theo nón của một ánh xạ có giá trị vectơ. Ngoài ra, tính liên tục Lipschitz và tính đường kính bị chặn đều của ánh xạ ràng buộc đều được sử dụng. Cách tiếp cận và kết quả thu được về tính liên tục Lipschitz cho bài toán này là mới và khác với những kết quả đã có.

Từ khóa: Bài toán cân bằng, hàm Gerstewitz, liên tục Lipschitz, tính lõm, vô hướng hóa phi tuyến

Trích dẫn: Nguyễn Hữu Danh và Phạm Thanh Dục, 2023. Tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng. Tạp chí Nghiên cứu khoa học và Phát triển kinh tế Trường Đại học Tây Đô. 17: 330-340.

*Ths. Nguyễn Hữu Danh – Giảng viên Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô

1. GIỚI THIỆU

Bài toán cân bằng và các dạng mở rộng của nó chiếm vị trí quan trọng trong lý thuyết tối ưu và đã được nghiên cứu sâu rộng trong những năm gần đây. Trong nhiều chủ đề nghiên cứu về bài toán cân bằng, việc phân tích sự ổn định của nghiệm được quan tâm đáng kể vì ý nghĩa quan trọng trong cả lý thuyết và thực tiễn, và là một công cụ hữu dụng cho việc phân tích hậu tối ưu. Đặc biệt là tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới, và tính liên tục Hölder hoặc Lipschitz của ánh xạ nghiệm các bài toán tham số đã được nghiên cứu một cách sâu sắc trong nhiều công trình trước đây (Li et al., 2011; Han and Gong, 2014; Peng et al., 2015; Sadeqi and Salehi, 2016; Huong et al., 2017; Anh et al., 2020).

Khi nghiên cứu tính nửa liên tục và tính liên tục Hölder hoặc Lipschitz của nghiệm cho các bài toán cân bằng vectơ, các phương pháp vô hướng hóa được sử dụng rất hiệu quả. Một mặt, phương pháp vô hướng hóa tuyến tính đã được áp dụng để xử lý tính nửa liên tục và tính liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm các bài toán cân bằng vectơ yếu tổng quát chứa tham số (Chen and Huang, 2013; Xu and Li, 2013; Anh et al., 2017). Bằng cách sử dụng các điều kiện liên quan đến tính lồi của hàm mục tiêu, nhiều công trình đã xây dựng điều kiện ổn định thông qua phương pháp vô hướng hóa tuyến tính cho nhiều mô hình trong tối ưu vectơ như Peng et al. (2015), Sadeqi and Salehi (2016) và Anh et al. (2017). Mặt khác, các phương pháp tiếp cận bằng hàm vô hướng phi tuyến tính (hàm Gerstewitz và hàm khoảng cách định hướng Hiriart

Urruty) đã được sử dụng để nghiên cứu tính nửa liên tục dưới (Sach, 2012; Xu and Li, 2016) và liên tục Hölder/Lipschitz của nghiệm (Li and Chen, 2014). Ta biết rằng hàm Gerstewitz có một số tính chất đẹp như tính liên tục, dưới tuyến tính, tính lồi, tính đơn điệu (nghiêm ngặt),... Những tính chất này đã được khai thác một cách triệt để trong công trình Gerth and Weidner (1990), Hernandez and Rodríguez-Marín (2007). Các tính Lipschitz địa phương và toàn cục của hàm này đã được thảo luận trong Tammer and Zălinescu (2010) và được áp dụng để khảo sát tính liên tục Hölder/Lipschitz của nghiệm cho bài toán cân bằng vectơ chứa tham số ở loại yếu (Chen and Li, 2014 và Li and Chen, 2014). Theo tìm hiểu của chúng tôi, cho đến nay có rất ít công trình dành riêng cho tính liên tục Lipschitz của nghiệm xấp xỉ bài toán cân bằng vectơ dạng mạnh.

Trên cơ sở các nghiên cứu trên, nghiên cứu này nhằm mục đích khảo sát các điều kiện ổn định cho nghiệm bài toán cân bằng vectơ dạng mạnh chứa tham số trong cả hàm mục tiêu và ánh xạ ràng buộc bằng cách sử dụng hàm vô hướng phi tuyến Gerstewitz. Chi tiết hơn, các điều kiện đủ cho tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ của bài toán đang xét được thiết lập.

2. MỞ ĐẦU

Cho X, Y, W, Z là các không gian định chuẩn, \mathcal{A} là một tập con khác rỗng của X , và \mathcal{L}, \mathcal{M} lần lượt là các tập con khác rỗng của W, Z . Ký hiệu $\|\cdot\|$ là chuẩn trong không gian định chuẩn bất kỳ, và $\text{int}\mathcal{A}$ là phần trong của \mathcal{A} . Cho \mathbb{R}_+ là tập hợp các

số thực không âm, $\text{diam}\mathcal{A} := \sup_{x,z \in \mathcal{A}} \|x - z\|$ là đường kính của \mathcal{A} , và $\mathbb{B}[x, r]$ là quả cầu đóng bán kính $r \geq 0$ có tâm tại x . Cho $\mathcal{C} \subset \mathbb{Y}$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh với $\text{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$, $K: \mathcal{L} \rightrightarrows \mathcal{A}$ là một ánh xạ đa trị có giá trị lồi, bị chặn và khác rỗng, và $f: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vectơ. Với mỗi $(\lambda, \mu) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$, ta xét bài toán cân bằng vectơ chứa tham số sau.

(VEP) Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho với mọi $y \in K(\lambda)$,

$$f(\bar{x}, y, \mu) \in \mathcal{C}.$$

Với $(\varepsilon, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L} \times \mathcal{M}$, và $e \in \text{int}\mathcal{C}$, ta ký hiệu tập ε -nghiệm xấp xỉ của (VEP) bởi

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) := \{x \in K(\lambda) \mid f(x, y, \mu) + \varepsilon e \in \mathcal{C}, \forall y \in K(\lambda)\}$$

Do các điều kiện tồn tại nghiệm đã được nghiên cứu nhiều trong các tài liệu Durea (2007), Sadeqi and Salehi (2011), Jafari et al. (2017) nên trong bài báo này chúng tôi chỉ tập trung vào điều kiện ổn định và luôn giả thiết tập nghiệm của bài toán đang xét là khác rỗng.

Trước tiên, chúng ta nhắc lại một số khái niệm cần thiết trong phần tiếp theo.

Định nghĩa 2.1 (a) Một hàm số $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là ℓ -Lipschitz tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu tồn tại một lân cận \mathcal{V} của x_0 sao cho với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$,

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \ell \|x_1 - x_2\|.$$

(b) (Anh et al., 2018) Một ánh xạ có giá trị vectơ $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ được gọi là \mathcal{C} - ℓ -Lipschitz tại $x_0 \in \mathbb{X}$ ứng với e nếu tồn tại một lân cận \mathcal{V} của x_0 sao cho với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$,

$$g(x_1) + \ell \|x_1 - x_2\|e \in g(x_2) + \mathcal{C}.$$

(c) Một ánh xạ đa trị $Q: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là ℓ -Lipschitz tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu tồn tại một lân cận \mathcal{V} của x_0 sao cho với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$,

$$Q(x_1) \subset Q(x_2) + \mathbb{B}[0, \ell \|x_1 - x_2\|].$$

Ta nói rằng một tính chất nào đó được thỏa mãn trên một tập $\mathcal{D} \subset \mathbb{X}$ nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn tại mọi điểm của \mathcal{D} .

Định nghĩa 2.2 (Anh et al., 2022) Một ánh xạ đa trị $Q: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là có đường kính bị chặn đều trên một tập con A của \mathbb{X} nếu và chỉ nếu tồn tại một số dương ρ sao cho với mọi $x \in A$, $\text{diam}Q(x) \leq \rho$.

Rõ ràng nếu $Q(A)$ bị chặn, thì Q có đường kính bị chặn đều trên A với mọi $A \subset \mathbb{X}$. Xét $Q: \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ được xác định bởi $Q(x, y) = [x - 1, x + 1] \times [y - 1, y + 1]$, khi đó Q có đường kính bị chặn đều trên \mathbb{R}^2 với $\rho = 2\sqrt{2}$, nhưng $Q(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ thì không bị chặn. Vì vậy, chiều ngược lại của nhận xét này nói chung không đúng.

Định nghĩa 2.3 (Kuroiwa, 1996) Một ánh xạ có giá trị vectơ $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ được gọi là \mathcal{C} -lồi trên một tập con lồi $\mathcal{D} \subset \mathbb{X}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ và $t \in [0, 1]$,

$$tg(x_2) + (1 - t)g(x_1) \in g(tx_2 + (1 - t)x_1) + \mathcal{C}, \tag{1}$$

và g được gọi là \mathcal{C} -lõm nếu (1) được thay bởi

$$g(tx_2 + (1 - t)x_1) \in tg(x_2) + (1 - t)g(x_1) + \mathcal{C}.$$

Định nghĩa 2.4 Cho $\Gamma \subset \mathbb{R}$, $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm số, $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có

giá trị vector, và \mathcal{D} là một tập con lồi của \mathbb{X} .

(a) φ được gọi là Γ -lõm trên \mathcal{D} nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, p \in \Gamma$ sao cho với mọi $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) \geq 0, \varphi(x_2) \geq p \\ \Rightarrow \varphi(tx_2 + (1-t)x_1) \geq tp \end{aligned}$$

(b) g được gọi là Γ -lõm ứng với e trên \mathcal{D} nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, p \in \Gamma$ sao cho với mọi $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} g(x_1) \in \mathcal{C}, g(x_2) \in pe + \mathcal{C} \\ \Rightarrow g(tx_2 + (1-t)x_1) \\ \in tpe + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.5 Cho $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{D} = \mathbb{R}, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+, \Gamma = -\mathbb{R}_+$ và

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } x < 0 \\ x^2, & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

Ta kiểm tra $\varphi(x)$ là Γ -lõm trên \mathcal{D} . Thật vậy, với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, t \in [0,1], \varphi(x_1) = x_1^2 \geq 0$ và $\varphi(x_2) - p \geq 0$, với mọi $p \in \Gamma$, ta cần chứng minh rằng $\varphi(x_t) - tp \geq 0$ với $x_t := tx_2 + (1-t)x_1$. Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $x_1 \geq 0$ và $x_2 \geq 0$, thì $x_t \geq 0$, và do đó $\varphi(x_t) - tp = x_t^2 - tp \geq 0$.

Trường hợp 2: Nếu $x_1 \geq 0$ và $x_2 < 0$, thì hoặc $x_t < 0$ hoặc $x_t \geq 0$. Trong trường hợp $x_t \geq 0$, tương tự Trường hợp 1, ta được $\varphi(x_t) - tp \geq 0$. Nếu $x_t < 0$, thì $\varphi(x_t) - tp = x_t - tp = tx_2 + (1-t)x_1 - tp = t(x_2 - p) + (1-t)x_1 \geq 0$.

Bổ đề 2.6 Cho g, \mathcal{D} như trong Định nghĩa 2.4. Nếu g là \mathcal{C} -lõm trên \mathcal{D} , thì g là \mathbb{R} -lõm ứng với e trên \mathcal{D} .

Chứng minh. Lấy $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, p \in \mathbb{R}, g(x_1) \in \mathcal{C}$ và $g(x_2) \in pe + \mathcal{C}$. Khi đó, với bất kỳ $t \in [0,1]$, tính \mathcal{C} -lõm của g suy ra

$$\begin{aligned} g(tx_2 + (1-t)x_1) &\in tg(x_2) \\ &+ (1-t)g(x_1) + \mathcal{C} \\ &\in t(pe + \mathcal{C}) + (1-t)\mathcal{C} + \mathcal{C} \\ &\in tpe + t\mathcal{C} + (1-t)\mathcal{C} + \mathcal{C} \\ &\in tpe + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Vì vậy, g là \mathbb{R} -lõm ứng với e trên \mathcal{D} .

Ví dụ sau đây chỉ ra chiều ngược lại của Bổ đề 2.6 không đúng.

Ví dụ 2.7 Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathcal{D} = \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+^2, e = (1,1)$ và

$$g(x) = \begin{cases} (3x, 3x + 1), & \text{nếu } x \geq 0 \\ (x, x + 1), & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Với bất kỳ $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, t \in [0,1]$ và $p \in \mathbb{R}$, nếu $g(x_1) \in \mathbb{R}_+^2$ và $g(x_2) \in (p, p) + \mathbb{R}_+^2$, thì

$$g(x_t) \in (tp, tp) + \mathbb{R}_+^2,$$

với $x_t := tx_2 + (1-t)x_1$. Thật vậy, ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: Nếu $x_1 \geq 0$ và $x_2 \geq 0$, thì $x_t \geq 0$. Do đó,

$$\begin{aligned} 3x_t - tp &\geq 3(tx_2 + (1-t)x_1) - tp \\ &\geq t(3x_2 - p) + 3(1-t)x_1 \geq 0, \end{aligned}$$

suy ra $g(x_t) \in (tp, tp) + \mathbb{R}_+^2$.

Trường hợp 2: Nếu $x_1 \geq 0$ và $x_2 < 0$, thì hoặc $x_t \geq 0$ hoặc $x_t < 0$. Ta chỉ trình bày trường hợp $x_t < 0$ vì kết quả của trường hợp $x_t \geq 0$ rất đơn giản khi $0 > x_2 \geq p$. Trong trường hợp $x_t < 0$, ta có

$$\begin{aligned} x_t - tp &= tx_2 + (1 - t)x_1 - tp \\ &= t(x_2 - p) + (1 - t)x_1 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

vì $x_1 \geq 0$ và $x_2 - p \geq 0$. Do đó, $g(x_t) \in (tp, tp) + \mathbb{R}_+^2$. Vì vậy, g là \mathbb{R} -lõm ứng với e trên \mathcal{D} . Tuy nhiên, lấy $x_1 = -1; x_2 = 1$ và $t = \frac{1}{2}$, thì $g(tx_2 + (1 - t)x_1) = g(0) = (0, 1) \notin \frac{1}{2}g(-1) + \frac{1}{2}g(1) + \mathbb{R}_+^2 = [1, +\infty[\times [2, +\infty[$, suy ra g không \mathcal{C} -lõm trên \mathcal{D} .

Định nghĩa 2.8 (Anh et al., 2023) Hàm phi tuyến $\xi_e: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi, với mọi $y \in \mathbb{Y}$,

$$\xi_e(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y + te \in \mathcal{C}\}.$$

Áp dụng các kỹ thuật được sử dụng trong Gerth and Weidner (1990), Tammer and Zălinescu (2010) ta cũng đặt được các tính chất quan trọng sau đây của hàm ξ_e .

Bổ đề 2.9 Cho $e \in \text{int}\mathcal{C}, r \in \mathbb{R}$ và $y \in \mathbb{Y}$. Khi đó,

- (i) $\xi_e(y) \leq r \Leftrightarrow y + re \in \mathcal{C}$.
- (ii) $\xi_e(y + re) = \xi_e(y) - r$.
- (iii) ξ_e là một hàm lồi, liên tục và dưới tuyến tính trên \mathbb{Y} .

(iv) với mọi $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}, y_1 - y_2 \in \mathcal{C}$, $\xi_e(y_1) \leq \xi_e(y_2)$.

Bổ đề 2.10 Với mỗi $(\varepsilon, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L} \times \mathcal{M}$, ta có:

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) = \{x \in K(\lambda) \mid \xi_e(f(x, y, \mu)) \leq \varepsilon, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

Chứng minh. (C) Lấy tùy ý $x \in S(\varepsilon, \lambda, \mu)$, ta có $x \in K(\lambda)$ và $f(x, y, \mu) + \varepsilon e \in \mathcal{C}$, với mọi $y \in K(\lambda)$. Bổ đề 2.9 (i)

suy ra $\xi_e(f(x, y, \mu)) \leq \varepsilon$, với mọi $y \in K(\lambda)$ suy ra

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) \subset \{x \in K(\lambda) \mid \xi_e(f(x, y, \mu)) \leq \varepsilon, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

(\supset) Lấy x là một phần tử của tập hợp $\{x \in K(\lambda) \mid \xi_e(f(x, y, \mu)) \leq \varepsilon, \forall y \in K(\lambda)\}$.

Khi đó, $\xi_e(f(x, y, \mu)) \leq \varepsilon$ với mọi $y \in K(\lambda)$, kết hợp điều này với Bổ đề 2.9 (i) suy ra

$$f(x, y, \mu) + \varepsilon e \in \mathcal{C} \text{ với mọi } y \in K(\lambda).$$

Do đó,

$$\{x \in K(\lambda) \mid \xi_e(f(x, y, \mu)) \leq \varepsilon, \forall y \in K(\lambda)\} \subset S(\varepsilon, \lambda, \mu).$$

Ta được điều phải chứng minh.

3. TÍNH LIÊN TỤC LIPSCHITZ CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Trong mục này, chúng ta thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục Lipschitz của ánh xạ ε -nghiệm của (SEP).

Bổ đề 3.1 Cho $\varepsilon_0 \in]0, +\infty[$ và $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$. Giả sử f là $-\mathbb{R}_+$ -lõm ứng với e theo biến thứ nhất trên $K(\lambda)$ với $\lambda \in \mathcal{L}$.

Khi đó, S liên tục Lipschitz theo biến thứ nhất trên $]\varepsilon_0, +\infty[$.

Chứng minh. Cho $\bar{\varepsilon} \in]\varepsilon_0, +\infty[$. Khi đó, $]\varepsilon_0, 2\bar{\varepsilon} - \varepsilon_0[$ là một lân cận của $\bar{\varepsilon}$. Lấy bất kỳ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]\varepsilon_0, 2\bar{\varepsilon} - \varepsilon_0[$ với $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, ta có $S(\varepsilon_1, \lambda, \mu) \subset S(\varepsilon_2, \lambda, \mu)$ với mọi $(\lambda, \mu) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$, và do đó

$$S(\varepsilon_1, \lambda, \mu) \subset S(\varepsilon_2, \lambda, \mu) + \mathbb{B}\left[0, \frac{\bar{p}}{\varepsilon_0} \mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right] \quad (2)$$

trong đó $\bar{\rho} = \text{diam} K(\lambda_0)$. Với mỗi $x_2 \in S(\varepsilon_2, \lambda, \mu)$, $x_0 \in S(0, \lambda, \mu)$ và $y \in K(\lambda)$, ta có

$$f(x_0, y, \mu) \in \mathcal{C}, f(x_2, y, \mu) \in -\varepsilon_2 e + \mathcal{C}.$$

Từ tính lõm của $K(\lambda)$, ta được $x_1 := \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} x_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} x_0 \in K(\lambda)$. Vì f là $-\mathbb{R}_+$ -lõm ứng với e trên $K(\lambda)$, ta được

$$f\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} x_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} x_0, y, \mu\right) \in -\varepsilon_1 e + \mathcal{C}.$$

Suy ra $\xi_e(f(x_1, y, \mu)) \leq \varepsilon_1$ hoặc tương đương, $x_1 \in S(\varepsilon_1, \lambda, \mu)$. Ta được

$$\|x_2 - x_1\| = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{\varepsilon_2} \|x_2 - x_0\|.$$

Kết hợp điều này với tính bị chặn của $K(\lambda)$, ta được

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{\text{diam}K(\lambda_0)}{\varepsilon_0} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|.$$

Do đó,

$$x_2 \in x_1 + \mathbb{B}\left[0, \frac{\text{diam}K(\lambda_0)}{\varepsilon_0} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|\right],$$

suy ra,

$$S(\varepsilon_2, \lambda, \mu) \subset S(\varepsilon_1, \lambda, \mu) + \mathbb{B}\left[0, \frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|\right] \quad (3)$$

trong đó $\bar{\rho} = \text{diam} K(\lambda_0)$.

Từ (2) và (3), ta được S là $\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0}$ -Lipschitz theo biến thứ nhất tại $\bar{\varepsilon}$. Vì $\bar{\varepsilon}$ là bất kỳ, nên ta kết luận rằng S là $\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0}$ -Lipschitz theo biến thứ nhất trên $] \varepsilon_0, +\infty[$.

Áp dụng Bổ đề 3.1, ta thiết lập tính Lipschitz của ánh xạ nghiệm S .

Định lý 3.2 Cho $\varepsilon_0 \in]0, +\infty[$ và $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(i) tồn tại một lân cận \mathcal{V} của λ_0 sao cho với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{V}$,

$$K(\lambda_1) \subset K(\lambda_2) + \mathbb{B}[0, \ell_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\|],$$

và K có đường kính bị chặn đều trên \mathcal{L} .

(ii) f là $-\mathbb{R}_+$ -lõm ứng với e theo biến thứ nhất trên $K(\lambda)$ với mọi $\lambda \in \mathcal{V}$;

(iii) tồn tại một lân cận \mathcal{U} của μ_0 sao cho với mọi $(x_1, y_1, \mu_1), (x_2, y_2, \mu_2) \in K(\mathcal{V}) \times K(\mathcal{V}) \times \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} & f(x_1, y_1, \mu_1) + \ell_2 \|(x_1, y_1, \mu_1) \\ & \quad - (x_2, y_2, \mu_2)\| e \\ & \in f(x_2, y_2, \mu_2) + \mathcal{C}, \end{aligned}$$

trong đó $\|(x_1, y_1, \mu_1) - (x_2, y_2, \mu_2)\| = \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|\mu_1 - \mu_2\|$.

Khi đó, S liên tục Lipschitz trên $] \varepsilon_0, +\infty[\times \mathcal{V} \times \mathcal{U}$.

Chứng minh. Với

$(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1), (\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) \in] \varepsilon_0, +\infty[\times \mathcal{V} \times \mathcal{U}$, ta đặt

$$r := 2\ell_1 \ell_2 \|\lambda_1 - \lambda_2\|, s := \ell_2 \|\mu_1 - \mu_2\|$$

và $\theta := \varepsilon_2 - \varepsilon_0$, và ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. Nếu $r + s \leq \theta$, thì $\varepsilon_2 - r - s \geq \varepsilon_2 - \theta = \varepsilon_0$. Lấy $\bar{x} \in S(\varepsilon_2 - r - s, \lambda_1, \mu_1)$ tùy ý. Vì $\bar{x} \in K(\lambda_1)$, từ giả thiết (i) suy ra tồn tại $x_{22} \in K(\lambda_2)$, sao cho

$$\|\bar{x} - x_{22}\| \leq \ell_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\|. \quad (4)$$

Ta chứng minh rằng $x_{22} \in S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2)$. Lấy bất kỳ $y_2 \in K(\lambda_2)$, thì tồn tại $y_1 \in K(\lambda_1)$ sao

$$\|y_1 - y_2\| \leq \ell_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\|. \quad (5)$$

Từ $\bar{x} \in S(\varepsilon_2 - r - s, \lambda_1, \mu_1)$ và $y_1 \in K(\lambda_1)$ suy ra

$$\xi_e(f(\bar{x}, y_1, \mu_1)) \leq (\varepsilon_2 - r - s),$$

và do đó

$$\begin{aligned} & \xi_e(f(x_{22}, y_2, \mu_2)) + \\ & \xi_e(f(\bar{x}, y_1, \mu_1)) - \xi_e(f(x_{22}, y_2, \mu_2)) \leq \\ & (\varepsilon_2 - r - s). \end{aligned} \quad (6)$$

Từ giả thiết (iii), ta có

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}, y_1, \mu_1) + \ell_2(\|\bar{x} - x_{22}\| + \|y_1 - y_2\| \\ & + \|\mu_1 - \mu_2\|)e \\ & \in f(x_{22}, y_2, \mu_2) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}, y_1, \mu_1) - [f(x_{22}, y_2, \mu_2) \\ & - \ell_2(\|\bar{x} - x_{22}\| \\ & + \|y_1 - y_2\| \\ & + \|\mu_1 - \mu_2\|)e] \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 2.9 (iv) và (ii), ta được

$$\begin{aligned} & \xi_e(f(\bar{x}, y_1, \mu_1)) \\ & \leq \xi_e(f(x_{22}, y_2, \mu_2)) \\ & + \ell_2(\|\bar{x} - x_{22}\| \\ & + \|y_1 - y_2\| + \|\mu_1 - \mu_2\|). \end{aligned}$$

Lập luận tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} & \xi_e(f(x_{22}, y_2, \mu_2)) \\ & \leq \xi_e(f(\bar{x}, y_1, \mu_1)) \\ & + \ell_2(\|\bar{x} - x_{22}\| \\ & + \|y_1 - y_2\| + \|\mu_1 - \mu_2\|). \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} & |\xi_e(f(\bar{x}, y_1, \mu_1)) - \xi_e(f(x_{22}, y_2, \mu_2))| \\ & \leq \ell_2(\|\bar{x} - x_{22}\| \\ & + \|y_1 - y_2\| + \|\mu_1 - \mu_2\|). \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (4) và (5), ta được

$$\begin{aligned} & |\xi_e(f(\bar{x}, y_1, \mu_1)) - \xi_e(f(x_{22}, y_2, \mu_2))| \\ & \leq \ell_2(\|\bar{x} - x_{22}\| \\ & + \|y_1 - y_2\| + \|\mu_1 - \mu_2\|) \\ & \leq \ell_1 \ell_2 \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \ell_1 \ell_2 \|\lambda_1 - \lambda_2\| \\ & + \ell_2 \|\mu_1 - \mu_2\| \\ & \leq 2\ell_1 \ell_2 \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \ell_2 \|\mu_1 - \mu_2\| \\ & \leq r + s. \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (6) ta suy ra $\xi_e(f(x_{22}, y_2, \mu_2)) \leq \varepsilon_2$, và do đó $x_{22} \in S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2)$.

Tiếp theo, ta thiết lập mối quan hệ giữa $S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1)$ và $S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2)$.

Theo Bổ đề 3.1, và do K có đường kính bị chặn đều, nên tồn tại một số thực dương ρ sao cho

$$\begin{aligned} & S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1) \subset S(\varepsilon_2 - r - s, \lambda_1, \mu_1) \\ & + \mathbb{B}\left[0, \frac{\rho}{\varepsilon_0} |r + s|\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Từ (4) ta có

$$\bar{x} \in x_{22} + \mathbb{B}[0, \ell_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\|].$$

Do đó,

$$\begin{aligned} & S(\varepsilon_2 - r - s, \lambda_1, \mu_1) \subset \\ & S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) + \mathbb{B}[0, \ell_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\|]. \end{aligned} \quad (8)$$

Kết hợp (7) và (8), ta có

$$\begin{aligned} & S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1) \subset S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) \\ & + \mathbb{B}\left[0, \ell_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho}{\varepsilon_0} |r + s|\right] \\ & \subset S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) \\ & + \mathbb{B}\left[0, \ell_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\| \right. \\ & \left. + \frac{\rho}{\varepsilon_0} (2\ell_1 \ell_2 \|\lambda_1 - \lambda_2\| \right. \\ & \left. + \ell_2 \|\mu_1 - \mu_2\|) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\subset S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) \\ &\quad + \mathbb{B} \left[0, \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|\mu_1 - \mu_2\| \right]. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) &\subset S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1) \\ &\quad + \mathbb{B} \left[0, \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|\mu_1 - \mu_2\| \right]. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. Nếu $r + s > \theta$, thì tồn tại một số tự nhiên n sao cho $\frac{1}{n} \leq \min \left\{ \frac{\theta}{2r}, \frac{\theta}{2s} \right\}$. Xét \mathbb{P} là một phân hoạch của đoạn $[\lambda_1, \lambda_2]$ với $n + 1$ nút u_1, u_2, \dots, u_{n+1} sao cho $u_1 = \lambda_1, u_{n+1} = \lambda_2, \|u_i - u_{i+1}\| = \frac{\|\lambda_1 - \lambda_2\|}{n}$. Khi đó,

$$\|u_i - u_{i+1}\| = \frac{\|\lambda_1 - \lambda_2\|}{n} \leq \frac{\theta}{4\ell_1\ell_2},$$

nghĩa là,

$$2\ell_1\ell_2\|u_i - u_{i+1}\| \leq \frac{\theta}{2}. \tag{9}$$

Hơn nữa, xét \mathbb{V} là một phân hoạch của đoạn $[\mu_1, \mu_2]$ với $n + 1$ nút v_1, v_2, \dots, v_{n+1} , $v_1 = \mu_1, v_{n+1} = \mu_2, \|v_i - v_{i+1}\| = \frac{\|\mu_1 - \mu_2\|}{n}$. Rõ ràng

$$\|v_i - v_{i+1}\| = \frac{\|\mu_1 - \mu_2\|}{n} \leq \frac{\theta}{2\ell_2},$$

và do đó

$$\ell_2\|v_i - v_{i+1}\| \leq \frac{\theta}{2}. \tag{10}$$

Từ bất đẳng thức (9) và (10), ta có

$$2\ell_1\ell_2\|u_i - u_{i+1}\| + \ell_2\|v_i - v_{i+1}\| \leq \theta.$$

Áp dụng Trường hợp 1, ta được

$$\begin{aligned} S(\varepsilon_2, u_i, v_i) &\subset S(\varepsilon_2, u_{i+1}, v_{i+1}) \\ &\quad + \mathbb{B} \left[0, \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|u_i - u_{i+1}\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|v_i - v_{i+1}\| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\subset S(\varepsilon_2, u_{i+1}, v_{i+1}) \\ &\quad + \mathbb{B} \left[0, \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \frac{1}{n} \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \frac{1}{n} \|\mu_1 - \mu_2\| \right]. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1) &\subset S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) + \\ &\quad \mathbb{B} \left[0, \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|\mu_1 - \mu_2\| \right] \end{aligned} \tag{11}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) &\subset S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1) + \\ &\quad \mathbb{B} \left[0, \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|\mu_1 - \mu_2\| \right] \end{aligned} \tag{12}$$

Kết hợp (11), (12), và Bổ đề 3.1, ta kết luận

$$\begin{aligned} S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1) &\subset S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1) \\ &\quad + \mathbb{B} \left[0, \frac{\rho}{\varepsilon_0} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \right] \\ &\subset S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) + \mathbb{B} \left[0, \frac{\rho}{\varepsilon_0} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \right] \\ &\quad + \mathbb{B} \left[0, \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|\mu_1 - \mu_2\| \right]. \end{aligned}$$

Suy ra,

$$S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1) \subset S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) + \mathbb{B} \left[0, \frac{\rho}{\varepsilon_0} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|\mu_1 - \mu_2\| \right]$$

Tương tự, ta có

$$S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2) \subset S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1) + \mathbb{B} \left[0, \frac{\rho}{\varepsilon_0} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \left(\ell_1 + \frac{2\rho\ell_1\ell_2}{\varepsilon_0} \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\| + \frac{\rho\ell_2}{\varepsilon_0} \|\mu_1 - \mu_2\| \right]$$

Ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng giả thiết của chúng tôi trong Định lý 3.2 đã giảm nhẹ so với kết quả trong Anh and Tam (2017).

Ví dụ 3.3 Cho $\mathbb{X} = \mathbb{W} = \mathbb{Z} = \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{A} = [0, +\infty[, \mathcal{L} = \mathbb{R}_+, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+^2, e = (1, 1) \in \text{int}\mathcal{C}, \mathcal{M} = [1, 2], K(\lambda) = [\lambda, \lambda + 1]$ và $f(x, y, \mu) = (\mu y - \mu x, \mu y - \mu x)$. Khi đó tất cả các giả thiết của Định lý 3.2 đều thỏa mãn. Tập nghiệm $S(\varepsilon, \lambda, \mu) = [\lambda, \lambda + \min\{\frac{\varepsilon}{\mu}, 1\}]$ là liên tục Lipschitz. Tuy nhiên, $K(\mathcal{L}) = \mathcal{A}$ thì không bị chặn. Do đó kết quả trong Anh and Tam (2017) không áp dụng được.

4. KẾT LUẬN

Các điều kiện ổn định theo nghĩa liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán cân bằng vectơ phụ thuộc tham số trong không gian định chuẩn được khảo sát. Dựa trên hàm Gerstewitz

và các tính chất lõm giảm nhẹ, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán này. Cách giải quyết vấn đề của chúng tôi có thể được sử dụng để nghiên cứu các bài toán liên quan đến tối ưu tổng quát hơn, chẳng hạn như các bài toán về quan hệ biến phân, các bài toán bao hàm biến phân,...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Anh L.Q., Nguyen K.T., Tam T.N., 2017. On Hölder continuity of approximate solution maps to vector equilibrium problems. *Turkish Journal of Mathematics*. 41(6):1591-1607.
2. Anh L.Q., Tam T.N., 2017. Sensitivity analysis for parametric vector equilibrium problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*. 18(9):1707-1716.
3. Anh L.Q., Duoc P.T., Tam T.N., 2018. On Hölder continuity of solution maps to parametric vector primal and dual equilibrium problems. *Optimization*. 67(8):1169-1182.
4. Anh L.Q., Duoc P.T., Tam T.N., 2020. On the stability of approximate solutions to set-valued equilibrium problems. *Optimization*. 69(7-8):1583-1599.
5. Anh L.Q., Duoc P.T., Tung N.M., 2022. On Lipschitz continuity of solutions to equilibrium problems via the Hiriart-Urruty oriented distance function. *Computational and Applied Mathematics*. 41(1):1-17
6. Anh L.Q., Tam T.N., Danh N.H., 2023. On Lipschitz continuity of

approximate solutions to set-valued equilibrium problems via nonlinear scalarization, *Optimization*, 72(2): 439-461

7. Chen B., Huang N.J., 2013. Continuity of the solution mapping to parametric generalized vector equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*. 56:1515-1528.

8. Chen C.R., Li M.H., 2014. Hölder continuity of solutions to parametric vector equilibrium problems with nonlinear scalarization. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 35:685-707.

9. Durea M., 2007. On the existence and stability of approximate solutions of perturbed vector equilibrium problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 333(2):1165-1179.

10. Gerth C., Weidner P., 1990. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 67(2):297-320.

11. Han Y., Gong X.H., 2014. Lower semicontinuity of solution mapping to parametric generalized strong vector equilibrium problems. *Applied Mathematics Letters*. 28:38-41.

12. Hernández E., Rodríguez-Marín L., 2007. Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 325(1):1-18.

13. Huong V.T., Yao J.C., Yen N.D., 2017. On the stability and solution

sensitivity of a consumer problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 175(2):567-589.

14. Jafari S., Farajzadeh A.P., Moradi S., 2017. Existence results for quasimonotone equilibrium problems in convex metric spaces. *Optimization*. 66(3):293-310

15. Kuroiwa D., 1996. Convexity for set-valued maps. *Applied Mathematics Letters*. 9(2):97-101.

16. Li S.J., Chen C.R., Li X.B., 2011. Hölder continuity and upper estimates of solutions to vector quasi-equilibrium problems. *European Journal of Operational Research*. 210(2):148-157.

17. Li L., Chen C., 2014. Nonlinear scalarization with applications to Hölder continuity of approximate solutions. *Numerical Algebra Control and Optimization*. 4(4):295-307.

18. Peng Z.Y., Yang X.M., Teo K.L., 2015. On the Hölder continuity of approximate solution mappings to parametric weak generalized Ky Fan inequality. *Journal of Industrial and Management Optimization*. 11(2):549-562.

19. Sach P.H., 2012. New nonlinear scalarization functions and applications. *Nonlinear Analysis*. 75(4):2281-2292.

20. Sadeqi I., Salehi Paydar M., 2016. Lipschitz continuity of an approximate solution mapping for parametric set-valued vector equilibrium problems. *Optimization*. 65(5):1003-1021.

21. Tammer C., Zălinescu C., 2010. Lipschitz properties of the scalarization function and applications. *Optimization*. 59(2):305-319.

22. Xu Y.D., Li S.J., 2013. On the lower semicontinuity of the solution mappings to a parametric generalized

strong vector equilibrium problem. *Positivity*.17(2):341-353.

23. Xu Y.D., Li S.J., 2016. A new nonlinear scalarization function and applications. *Optimization*. 65(1):207-231.

LIPSCHITZ CONTINUITY OF THE SOLUTION MAPS TO EQUILIBRIUM PROBLEMS

Nguyen Huu Danh^{1*} and Pham Thanh Duoc²

¹Tay Do University

²Can Tho University of Technology

(*Email: nhdanh@tdu.edu.vn)

ABSTRACT

This paper investigates the stability in the sense of Lipschitz continuity of the approximate solution maps to the parametric vector equilibrium problem in the normed spaces. More precisely, to achieve the Lipschitz continuity of the approximate solution maps for this problem, we used the Gerstewitz nonlinear scalar function (a very useful tool in studying properties solutions related to optimization problems) together with assumptions about the relaxed conditions related to concavity properties of the objective function. We also give an example showing that this property is weaker than the cone concavity of the vector-valued map. Besides, the Lipschitz continuity and the uniformly bounded diameter of the constrained map are both used. The approach and obtained results on Lipschitz continuity for this problem are new and different from the existing ones.

Keywords: *Concavity, equilibrium problem, Gerstewitz function, Lipschitz continuity, nonlinear scalarization*