p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

TẬP HÚT LÙI CỦA HỆ NAVIER-STOKES NGẪU NHIÊN VỚI NHIỄU NHÂN TÍNH VÀ MẬT ĐỘ NGẪU NHIÊN

Phạm Chí Công[1], **Phạm Trí Nguyễn**[2]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xét hệ phương trình Navier-Stokes hai chiều với nhiễu nhân tính và mật độ ngẫu nhiên. Sử dụng phép đổi biến thích hợp, chúng tôi chuyển hệ ngẫu nhiên thành hệ tất định với các tham số ngẫu nhiên, từ đó chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất tập hút lùi của hệ.

Từ khoá: *Tập hút lùi, hệ Navier-Stokes ngẫu nhiên, nhiễu nhân tính, mật độ ngẫu nhiên.*

DOI: *https://doi.org/10.70117/hdujs.74.03.2025.764*

1. MỞ ĐẦU

Cho $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ là miền C^1 bị chặn với biên $\partial\Theta$, $\tau \in \mathbb{R}$, $t > \tau$. Xét hệ phương trình Navier-Stokes ngẫu nhiên với nhiễu nhân tính và mật độ ngẫu nhiên có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \alpha(\theta_t\omega)(u\cdot\nabla)u + \nabla p = f(x,t) + \beta u \circ \dfrac{dW(t)}{dt}, x \in \Theta, \\ \nabla \cdot u = 0, x \in \Theta, \end{cases} \tag{1}$$

với điều kiện biên

$$u(x,\tau) = 0, x \in \partial\Theta, \tag{2}$$

và điều kiện đầu

$$u(x,\tau) = u_\tau(x), x \in \Theta. \tag{3}$$

Trong đó, $u = u(x,t) = (u_1, u_2)$ là hàm vận tốc chưa biết của dòng chất lỏng, $p = p\big(x,t\big)$ là hàm áp suất, $\nu > 0$ là hệ số nhớt của chất lỏng, $\alpha(\theta_t\omega)$ là mật độ ngẫu nhiên, $f(x,t)$ là hàm ngoại lực, $\beta \in \mathbb{R}$, $W(t)$ là quá trình Wiener thực và ký hiệu $\circ$ chỉ tích phân được hiểu theo nghĩa Stratonovich.

Ta thấy rằng khi $\beta = 0$ và $\alpha(\theta_t\omega) \equiv 1$ thì hệ ta xét ở trên trở thành hệ phương trình Navier-Stokes không nén được cổ điển. Hướng nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm cũng như các tính chất của nghiệm đối với các lớp hệ phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên trong đó có hệ Navier-Stokes ngẫu nhiên là một vấn đề có tính thời sự và được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn, ta có thể tham khảo các công trình [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9] cùng các công trình được trích dẫn trong đó về hướng nghiên cứu nói trên. Bài báo này tập trung nghiên cứu về sự tồn tại và tính duy nhất của tập hút lùi của hệ Navier-Stokes hai chiều với nhiễu nhân tính và mật độ ngẫu nhiên.

---

[1] *Ban Quản lý Ký túc xá, y tế và ANTT, Trường Đại học Hồng Đức; Email: phamchicong@hdu.edu.vn*
[2] *Trường Đại học Điện lực*

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Bằng cách sử dụng phép đổi biến thích hợp, ta chuyển hệ ngẫu nhiên thành hệ tất định với các tham số ngẫu nhiên. Sau đó áp dụng các công cụ của giải tích và các phương pháp của lý thuyết hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều, ta chứng minh sự tồn tại và duy nhất tập hút lùi của hệ.

3. PHẦN CHUẨN BỊ

Cho $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất, với $\Omega = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \omega(0) = 0\}$, $\mathbb{F}$ là sigma đại số Borel, $\mathbb{P}$ là độ đo Wiener trên $(\Omega, \mathbb{F})$, $W(t,\omega) = \omega(t)$, $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ là dịch chuyển Wiener trên $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ xác định bởi: $\theta_t \omega(\cdot) = \omega(t + \cdot) - \omega(t)$.

Xét các không gian Hilbert $\mathbb{L}^2(\Theta) = [L^2(\Theta)]^2$, $\mathbb{H}_0^1(\Theta) = [H_0^1(\Theta)]^2$ với các tích vô hướng

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Theta} u_i v_i dx \ , \ \forall u, v \in \mathbb{L}^2(\Theta),$$

$$((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Theta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \ , \ \forall u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Theta),$$

và các chuẩn tương ứng $|u| = (u,u)^{1/2}$, $\|u\| = ((u,u))^{1/2}$.

Đặt $\mathcal{V} = \{u \in [C_0^\infty(\mathcal{O})]^2 : \nabla \cdot u = 0\}$ và gọi H là bao đóng của $\mathcal{V}$ trong $\mathbb{L}^2(\Theta)$, V là bao đóng của $\mathcal{V}$ trong $\mathbb{H}_0^1(\Theta)$, V' là không gian đối ngẫu của V, ký hiệu cặp đối ngẫu giữa V và V' là $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Định nghĩa toán tử Stokes $A : V \to V'$ bởi

$$\langle Au, v \rangle = ((u,v)), \ \forall u, v \in V, \ D(A) = \mathbb{H}_0^1(\Theta) \cap V.$$

Ta có bất đẳng thức Poincaré: $\lambda_1 |u|^2 \le \|u\|^2, \ \forall u \in V$, trong đó $\lambda_1 > 0$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử A.

Xét dạng ba tuyến tính $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Theta} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx, \ \forall u, v, w \in V.$ Định nghĩa toán tử $B : V \times V \to V'$, bởi $\langle B(u,v), w \rangle = b(u,v,w)$.

Khi đó hệ (1) được viết lại dưới dạng

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + \alpha(\theta_t \omega) B(u,u) = f + \beta u \circ \frac{dW(t)}{dt}. \tag{4}$$

Định nghĩa 3.1. Giả sử $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ và $u_\tau \in H$. Ánh xạ $u(\cdot, \tau, \omega, u_\tau) : [\tau, +\infty) \to H$ được gọi là nghiệm yếu của hệ (1) nếu với mỗi $\mathfrak{T} > \tau$ thì

$$u(\cdot, \tau, \omega, u_\tau) \in C([\tau, +\infty); H) \cap L^2([\tau, \mathfrak{T}]; V),$$

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + \alpha(\theta_t\omega)B(u,u) = f + \beta u \circ \frac{dW(t)}{dt} \text{ trong } V'.$$

Bổ đề 3.2. (xem [6], [7]) *Với $C > 0$ là một hằng số, ta có*

(i) $b(u,v,w) = -b(u,w,v), \ \forall u,v,w \in V$,

(ii) $|b(u,v,w)| \le C|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\||w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}}, \ \forall u,v,w \in V$,

(iii) $|b(u,v,w)| \le C|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}}|w|, \ \forall u \in V, v \in D(A), w \in H$.

Các bất đẳng thức dưới đây sẽ được sử dụng trong chứng minh kết quả chính của bài báo:

Bất đẳng thức Young: Với mọi $a,b,\varepsilon > 0$ và $1 < p,q < +\infty$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, thì

$$ab \le \frac{\varepsilon}{p}a^p + \frac{e^{-q/p}}{q}b^q.$$

Bất đẳng thức Gronwall đều: Cho g,h,y và $\frac{dy}{dt}$ là các hàm khả tích địa phương trên $(t_0,+\infty)$ thỏa mãn $\frac{dy(t)}{dt} \le g(t)y(t) + h(t), \ \forall t \ge t_0$,

và $\int_t^{t+r} g(s)ds \le a_1, \ \int_t^{t+r} h(s)ds \le a_2, \ \int_t^{t+r} y(s)ds \le a_3, \ \forall t \ge t_0$,

với r, a_1, a_2, a_3 là các hằng số dương. Khi đó

$$y(t+r) \le \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)e^{a_1}, \ \forall t \ge t_0.$$

Định lý 3.3. (Xem [6], [7]) Giả sử Θ là miền C^1 bị chặn. Khi đó $H^1(\Theta)$ được nhúng compact trong $L^2(\Theta)$.

Gọi $D = \{D(\tau,\omega) : \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ là tập hai tham số trong H, D được gọi là tăng chậm nếu với mọi $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, \gamma > 0$ thì

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\gamma t}|D(\tau - t, \theta_{-t}\omega)| = 0,$$

trong đó $|D| = \sup_{u\in D}|u|$ và ký hiệu $\mathfrak{D}$ là tập hợp các tập con trong H xác định bởi

$$\mathfrak{D} = \{D = \{D(\tau,\omega) : \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}\}.$$

Ta đưa ra các giả thiết sau cho hàm ngoại lực và hàm mật độ ngẫu nhiên:

(G_1) $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ thỏa mãn

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sigma r}|f(r)|^2\, dr < +\infty, \ \sigma \in (0, \nu\lambda_1).$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\eta t}\int_{-\infty}^{0} e^{\gamma r}\,|\,f(r+t)\,|^2\,dr < +\infty,\ \forall \eta > 0.$$

(G₂) Hàm mật độ ngẫu nhiên $\alpha(\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $t\to\alpha(\theta_t\omega)$ là liên tục.

Ta biết rằng tồn tại tập θ_t bất biến $\tilde{\Omega}\subset\Omega$ sao cho $\mathbb{P}(\tilde{\Omega})=1$ và với mỗi $\omega\in\tilde{\Omega}$ thì $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{\omega(t)}{t}=0$. Do đó từ giờ trở đi ta chỉ xét không gian $\tilde{\Omega}$ thay cho Ω và dùng chung ký hiệu là Ω.

Ký hiệu C là hằng số dương nào đó và nó có thể khác nhau trong mỗi lần xuất hiện. Ta đưa vào phép đổi biến

$$v(t,\tau,\omega,v_\tau)=e^{-\beta\omega(t)}u(t,\tau,\omega,u_\tau),\ \ v_\tau=e^{-\beta\omega(\tau)}u_\tau. \tag{5}$$

Từ (4) và (5), ta nhận được phương trình

$$\frac{dv}{dt}+\nu Av+e^{\beta\omega(t)}\alpha(\theta_t\omega)B(v,v)=e^{-\beta\omega(t)}f. \tag{6}$$

Do (6) là phương trình tất định với các tham số ngẫu nhiên nên bằng phương pháp xấp xỉ Faedo-Galerkin (xem [6], [7]), thì với mỗi $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ và $v_\tau\in H$, phương trình (6) có duy nhất nghiệm yếu $v(\cdot,\tau,\omega,v_\tau)\in C([\tau,+\infty);H)\cap L^2([\tau,+\infty);V)$ sao cho $v_\tau=e^{-\beta\omega(\tau)}u_\tau$. Hơn nữa, nghiệm $v(t,\tau,\omega,v_\tau)$ liên tục theo v_τ.

Từ kết quả về nghiệm yếu v ở trên, ta định nghĩa đối chu trình $\Psi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\Omega\times H\to H$ xác định bởi

$$\Psi(t,\tau,\omega,u_\tau)=u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau)=e^{\beta\theta_{-\tau}\omega(t+\tau)}v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau).$$

4. KẾT QUẢ CHÍNH

Kết quả dưới đây đưa ra một số ước lượng đối với nghiệm v của phương trình (6).

Bổ đề 4.1. *Với mỗi* $\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega, t>0$ *và* $v_{\tau-t}\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$ *thì*

$$|\,v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\,|^2\le e^{-\nu\lambda_1 t}\,|\,v_{\tau-t}\,|^2+\frac{2}{\nu\lambda_1}\int_{-t}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,|\,f(r+\tau)\,|^2\,dr, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\int_{-t}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,\|\,v(r+\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\,\|^2\,dr &\le \frac{2}{\nu}e^{-\nu\lambda_1 t}\,|\,v_{\tau-t}\,|^2\\ &+\frac{4}{\nu^2\lambda_1}\int_{-t}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,|\,f(r+\tau)\,|^2\,dr.\end{aligned} \tag{8}$$

Chứng minh. Nhân hai vế của phương trình (6) với $v(r)=v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})$ sau đó sử dụng Bổ đề 3.2 và bất đẳng thức Young ta có

$$\frac{d}{dr}\,|\,v\,|^2+2\nu\,\|\,v\,\|^2=e^{-\beta\omega(r)}(f,v)\le\frac{\nu\lambda_1}{2}\,|\,v\,|^2+\frac{2}{\nu\lambda_1}e^{-2\beta\omega(r)}\,|\,f(r)\,|^2\,. \tag{9}$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Từ (9) và bất đẳng thức Poincaré ta suy ra

$$\frac{d}{dr}\left(e^{\nu\lambda_1 r}\,|\,v\,|^2\right)+\frac{\nu}{2}e^{\nu\lambda_1 r}\,\|\,v\,\|^2\leq\frac{2}{\nu\lambda_1}e^{-2\beta\omega(r)}e^{\nu\lambda_1 r}\,|\,f(r)\,|^2\,. \tag{10}$$

Lấy tích phân (10) trên $[\tau-t,\tau]$ ta được

$$\begin{aligned}&|\,v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\,|^2+\frac{\nu}{2}\int_{\tau-t}^{\tau}e^{\nu\lambda_1(r-\tau)-2\beta\omega(r)}\,\|\,v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\,\|^2\,dr\\&\leq e^{-\nu\lambda t}\,|\,v_{\tau-t}\,|^2+\frac{2}{\nu\lambda_1}\int_{\tau-t}^{\tau}e^{\nu\lambda_1(r-\tau)-2\beta\omega(r)}\,|\,f(r)\,|^2\,dr.\end{aligned} \tag{11}$$

Sau khi biến đổi tích phân, (11) tương đương với

$$\begin{aligned}&|\,v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\,|^2+\frac{\nu}{2}\int_{-t}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,\|\,v(r+\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\,\|^2\,dr\\&\leq e^{-\nu\lambda t}\,|\,v_{\tau-t}\,|^2+\frac{2}{\nu\lambda_1}\int_{-t}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,|\,f(r+\tau)\,|^2\,dr.\end{aligned} \tag{12}$$

Từ (12) ta suy ra (7) và (8).

Kết quả tiếp theo chứng minh sự tồn tại tập $\mathfrak{D}$-hấp thu lùi trong H đối với đối chu trình Ψ liên kết với nghiệm của bài toán (1).

Bổ đề 4.2. *Đối chu trình Ψ có một tập $\mathfrak{D}$-hấp thu lùi $K=\{K(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}$ trong H cho bởi*

$$K(\tau,\omega)=\{u\in H:|\,u\,|^2\leq R(\tau,\omega)\}, \tag{13}$$

trong đó

$$R(\tau,\omega)=e^{2\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau)}\left[1+\frac{2}{\nu\lambda_1}\int_{-\infty}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,|\,f(r+\tau)\,|^2\,dr\right].$$

Chứng minh. Với mỗi $\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega$ và $t>0$, từ (5) ta có

$$u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})=e^{\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau)}v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}),\;\;u_{\tau-t}=e^{\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau-t)}v_{\tau-t}.$$

Thay biểu thức trên vào (7) ta được

$$\begin{aligned}|\,u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\,|^2&=e^{2\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau)}\,|\,v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\,|^2\\&\leq e^{2\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau)}\left[e^{-\nu\lambda_1 t}e^{-\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau-t)}\,|\,u_{\tau-t}\,|^2+\frac{2}{\nu\lambda_1}\int_{-\infty}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,|\,f(r+\tau)\,|^2\,dr\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Ta đánh giá các số hạng trong vế phải của (14). Bởi $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{\omega(t)}{t}=0$ nên $\frac{2\beta\omega(r+\tau)}{r}\to 0$ khi $r\to-\infty$. Suy ra tồn tại $r_0<0$ sao cho với mọi $r\leq r_0$ thì $-2\beta\omega(r+\tau)\leq-(\nu\lambda_1-\sigma)r$. Từ đó ta có $e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,|\,f(r+\tau)\,|^2\leq e^{\sigma r}\,|\,f(r+\tau)\,|^2$,

điều này cùng với giả thiết (G_1) suy ra $\int_{-\infty}^{0}e^{\nu\lambda_1 r-2\beta\omega(r+\tau)}\,|\,f(r+\tau)\,|^2\,dr<+\infty$ và do đó $R(\tau,\omega)<+\infty$. Mặt khác do $v_{\tau-t}\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$ kéo theo $u_{\tau-t}\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$, nên

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\limsup_{t\to+\infty} e^{-\nu\lambda_1 t} e^{-\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau-t)} \mid u_{\tau-t} \mid^2 \le \limsup_{t\to+\infty} e^{-\nu\lambda_1 t} e^{-\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau-t)} \mid D(\tau-t,\theta_{-t}\omega) \mid^2 = 0,$$

từ đó suy ra tồn tại $T = T(\tau,\omega,D) > 0$ sao cho với mọi $t \ge T$ thì

$$e^{-\nu\lambda_1 t} e^{-\beta\theta_{-\tau}\omega(\tau-t)} \mid u_{\tau-t} \mid^2 \le 1.$$

Kết hợp các đánh giá trên cùng với (13) và (14) ta có

$$\Psi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega, D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)) = u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega, D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)) \subset K(\tau,\omega).$$

Gọi γ là số dương bất kỳ, ta dễ thấy

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\gamma t} \mid K(\tau-t,\theta_{-t}\omega) \mid^2 = \lim_{t\to+\infty} e^{-\gamma t} R(\tau-t,\theta_{-t}\omega) \mid^2 = 0. \quad (15)$$

Vậy $K \in \mathfrak{D}$.

Bổ đề 4.3. *Với mỗi $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, D \in \mathfrak{D}$, tồn tại $T = T(\tau,\omega,D) > 0$ sao cho với mọi $t \ge T$ và $u_{\tau-t} \in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$ thì*

$$\| u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t}) \|^2 \le Ce^{C\xi(\omega)}. \quad (16)$$

Chứng minh. Nhân hai vế của phương trình (6) với Av, $v(r) = v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})$ ta được

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\| v \|^2 + \nu \mid Av \mid^2 = -e^{\beta\omega(r)}\alpha(\theta_{r-\tau}\omega) b(v,v,Av) + e^{-\beta\omega(r)}(f,Av). \quad (17)$$

Tiếp theo ta đánh giá các số hạng ở vế phải của (17) bằng cách sử dụng Bổ đề 3.2 và bất đẳng thức Young

$$\begin{aligned} \mid e^{\beta\omega(r)}\alpha(\theta_{r-\tau}\omega) b(v,v,Av) \mid &\le Ce^{\beta\omega(r)} \mid \alpha(\theta_{r-\tau}\omega) \mid \mid v \mid^{1/2} \| v \| \mid Av \mid^{3/2} \\ &\le \frac{\nu}{2} \mid Av \mid^2 + Ce^{4\beta\omega(r)}\alpha^4(\theta_{r-\tau}\omega) \mid v \mid^2 \| v \|^4, \end{aligned}$$

$$e^{-\beta\omega(r)} \mid (f,Av) \mid \le e^{-\beta\omega(r)} \mid f(r) \mid \mid Av \mid \le \frac{\nu}{4} \mid Av \mid^2 + Ce^{-2\beta\omega(r)} \mid f(r) \mid^2 .$$

Thay các đánh giá trên vào (17) ta suy ra

$$\frac{d}{dr}\| v \|^2 \le C\left(e^{4\beta\omega(r)}\alpha^4(\theta_{r-\tau}\omega) \mid v \mid^2 \| v \|^2\right) \| v \|^2 + Ce^{-2\beta\omega(r)} \mid f(r) \mid^2 . \quad (18)$$

Từ (18), áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều trên $[\tau - 1, \tau]$ ta nhận được

$$\| v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}) \|^2 \le (I_1 + I_2)e^{I_3}, \quad (19)$$

trong đó

$$\begin{aligned} I_1 &= C\int_{\tau-1}^{\tau} e^{-2\beta\omega(r)} \mid f(r) \mid^2 dr, \ I_2 = \int_{\tau-1}^{\tau} \| v(r) \|^2 dr, \\ I_3 &= C\int_{\tau-1}^{\tau} \left(e^{4\beta\omega(r)}\alpha^4(\theta_{r-s}\omega) \mid v(r) \mid^2 \| v(r) \|^2\right) dr. \end{aligned}$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Do tính liên tục của $r \to e^{-2\beta\omega(r)}$ và $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, H)$ nên $I_1 \le C\xi(\omega)\int_{\tau-1}^{\tau} |f(r)|^2\, dr \le C\xi(\omega)$. Mặt khác, do điều kiện (G_2), (7) và (8) ta cũng có $I_2 \le C\xi(\omega)$, $I_3 \le C\xi(\omega)$.

Kết hợp các đánh giá trên cùng với (19) ta thu được

$$\| v(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|^2 \le C\xi(\omega)e^{\xi(\omega)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $e^t > t,\ \forall t > 0,$ ta có

$$\| v(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) \|^2 \le Ce^{C\xi(\omega)}. \tag{20}$$

Sử dụng phép đổi biến (5) và (20) ta suy ra (16).

Cuối cùng ta đưa ra kết quả chính của mục này về sự tồn tại và duy nhất tập $\mathfrak{D}$-hút lùi đối với đối chu trình Ψ trong H.

Định lý 4.4. *Đối chu trình Ψ có duy nhất một tập $\mathfrak{D}$-hút lùi ngẫu nhiên $\mathcal{A}$ trong H*

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.2, đối chu trình Ψ có một tập $\mathfrak{D}$-hấp thu lùi K trong H. Mặt khác, theo Bổ đề 4.3, với mỗi $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, D \in \mathfrak{D},$ tồn tại $T = T(\tau, \omega, D) > 0$ sao cho với mọi $t \ge T$ thì

$$\| \bigcup_{t \ge T} \Psi(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, D(\tau - t, \theta_{-t}\omega)) \|^2 \le Ce^{C\xi(\omega)} < +\infty. \tag{21}$$

Từ (21), sử dụng Định lý 3.3 nhúng V vào H, ta có Ψ là $\mathfrak{D}$-compact tiệm cận lùi. Áp dụng [9] (Mệnh đề 2.10) ta suy ra Ψ có duy nhất một tập $\mathfrak{D}$-hút lùi ngẫu nhiên $\mathcal{A}$ trong H.

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của tập hút lùi ngẫu nhiên của hệ Navier-Stokes hai chiều với nhiễu nhân tính và mật độ ngẫu nhiên, đây là một tính chất quan trọng của nghiệm và nó có nhiều ý nghĩa trong việc nghiên cứu các lớp phương trình đạo hàm riêng nói chung trong đó có lớp hệ Navier-Stokes nói riêng. Hơn nữa, từ kết quả này ta có thể mở rộng hướng nghiên cứu sang các vấn đề liên quan như: số chiều Fractal của tập hút, tính liên tục của tập hút,...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. W. Bates, K. Lu, B. Wang (2009), *Random attractors for stochastic reaction-diffusion equations on unbounded domains*, J. Differential Equations, 246,845-869.

[2] Z. Brzezniak, T. Caraballo, J.A. Langa, Y. Li, G. Lukaszewicz, J. Real (2013), *Random attractors for stochastic 2D-Navier-Stokes equations in some unbounded domains*, J. Differential Equations, 255, 3897-3919.

[3] H. Crauel, F. Flandoli (1994), *Attractors for random dynamical systems*, Probab. Theory Relat. Fields, 100, 365-393.

[4] B. Gess, W. Liu, M. Rockner (2011), *Random attractors for a class of stochastic partial differential equations driven by general additive noise*, J. Differential Equations, 251, 1225-1253.

[5] A. Gu, K. Lu, B. Wang (2019), *Asymptotic behavior of random Navier-Stokes equations driven by Wong-Zakai approximations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 39(1), 185-218.

[6] J. C. Robinson (2001), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Series Number 28.

[7] R. Temam (1997), *Infnite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York.

[8] B. Wang (2014), *Random attractors for non-autonomous stochastic wave equations with multiplicative noise*, Discrete and Continuous Dynamical Systems 34(1), 269-300.

[9] B. Wang (2012), *Periodic random attractors for stochastic Navier-Stokes equations on unbounded domains*, Electronic Journal of Differential Equations, vol.2012, no.59, 1-18.

PULLBACK ATTRACTOR OF STOCHASTIC NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH MULTIPLICATIVE NOISE AND RANDOM DENSITY

Pham Chi Cong, Pham Tri Nguyen

ABSTRACT

In this paper, we consider the two dimensional Navier-Stokes equations with multiplicative noise and random density. Using appropriate transformation, we transform the stochastic system into a deterministic system with random parameters, from that we prove the existence and uniqueness of the pullback attractor of the system.

Keywords: *Pullback attractor, Stochastic Navier-Stokes equations, multiplicative noise, random density.*

** Ngày nộp bài: 15/02/2025; Ngày gửi phản biện: 20/02/2025; Ngày duyệt đăng: 10/3/2025*