



**Tạp chí Khoa học và Kinh tế Phát triển  
Trường Đại học Nam Cần Thơ**

Website: [jsde.nctu.edu.vn](http://jsde.nctu.edu.vn)



**Sự hội tụ nghiệm của bài toán tối ưu đa trị**

Lâm Văn Đây<sup>1</sup>, Trần Thị Tuyết Mai<sup>1</sup>, Nguyễn Chí Thắng<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Bộ môn Toán, Khoa Cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ

\*Người chịu trách nhiệm liên hệ: Nguyễn Chí Thắng (email: [ncthang@nctu.edu.vn](mailto:ncthang@nctu.edu.vn))

Ngày nhận bài: 30/12/2024

Ngày phản biện: 20/1/2025

Ngày duyệt bài: 3/2/2025

**Title:** *Convergence of solutions to set optimization problems*

**Keywords:** *domination property, generalized convexity, semicontinuity, set optimization*

**Từ khóa:** *Bài toán tối ưu đa trị, tính chất trội, tính đóng, tính lồi tổng quát, tính nửa liên tục*

**ABSTRACT**

*The aim of this study is to establish convergence conditions in the Painlevé-Kuratowski sense for a sequence of solution sets of set optimization problems perturbed by the constraint set to the solution set of the original problem in the decision space. By relaxing the assumption of continuity by cone-continuity, we provide upper convergence conditions for the weakly efficient solutions and the efficient solutions. Furthermore, we introduce the dominance property of set optimization problems and the above-relaxed continuities to study the lower convergence of such problems with a new approach.*

**TÓM TẮT**

*Mục đích chính của nghiên cứu này là thiết lập điều kiện hội tụ nghiệm theo kiểu Painlevé-Kuratowski của một dãy các tập nghiệm của các bài toán tối ưu đa trị nhiễu trên tập ràng buộc đến tập nghiệm của bài toán tối ưu đa trị ban đầu trên không gian quyết định. Bằng cách giảm nhẹ giả thiết nửa liên tục bằng nửa liên tục theo nón, chúng tôi đã đưa ra điều kiện hội tụ trên của tập nghiệm hữu hiệu yếu và tập nghiệm hữu hiệu. Hơn nữa, chúng tôi giới thiệu tính chất trội của bài toán tối ưu đa trị để xem xét sự hội tụ dưới của bài toán tối ưu đa trị, mô hình bài toán với cách tiếp cận mới.*

**1. GIỚI THIỆU**

Điều kiện hội tụ nghiệm là một chủ đề quan trọng của lý thuyết ổn định trong các mô hình tối ưu. Khi ta xét bài toán gốc, vì nhiều lí do khác nhau mà nó được nhiễu bởi dãy các bài toán có dữ liệu xấp xỉ với dữ liệu tương ứng của nó. Khi đó, điều kiện hội tụ được hiểu là các điều kiện

đảm bảo tính đủ gần của các nghiệm xấp xỉ đối với nghiệm chính xác của bài toán đang xét. Trong thực tế, các dữ liệu của các mô hình thường có được từ các phương pháp xấp xỉ như thống kê, đo đạc. Do đó, nghiệm chính xác của các mô hình cũng không phải là chủ đề trọng tâm mà các nhà

nghiên cứu xem xét, thay vào đó tính ổn định của các nghiệm xấp xỉ lại có nhiều ý nghĩa hơn.

Các vấn đề nêu trên đã đưa đến nhu cầu là chúng ta xem xét các mô hình bài toán tối ưu với hàm mục tiêu nhận giá trị tập hợp. Đối với lớp bài toán này, cho đến nay có hai hướng tiếp cận chính, mà cách tiếp cận dựa trên các mối quan hệ thứ tự giữa các tập là hướng tiếp cận tốt và được nhiều người quan tâm trong thời gian gần đây. Hướng tiếp cận này đã được khởi xướng từ công trình của Kuroiwa [1]; sau đó bằng cách kết hợp giữa hai hướng gồm tiếp cận véc-tơ và tiếp cận thứ tự tập, Jahn và Ha (2011) [2] đã đề xuất các quan hệ thứ tự mới nhằm gia tăng tính chặt chẽ khi so sánh thứ tự hơn kém giữa các tập, đây là quan hệ thứ tự khá phức tạp và chưa có công trình nào khảo sát về cấu trúc nghiệm cũng như các tính chất định tính của nghiệm cho các bài toán dựa trên thứ tự dạng này. Gần đây, Karaman và đồng sự [3] đã giới thiệu quan hệ dựa vào hiệu Minkowski (Pontryagin) giữa hai tập, đó là mối quan hệ thứ tự giữa các tập kết hợp với quan hệ bao hàm của chúng. Mối quan hệ này được xem là có nhiều ứng dụng thực tế khi cần so sánh các tập hợp dựa trên lực lượng của chúng. Do hạn chế về kỹ thuật và độ phức tạp của các công cụ dùng trong tính toán, nên đến nay các kết quả về điều kiện hội tụ cho các mô hình tối ưu tập còn khá khiêm tốn.

Trong nội dung của bài báo này, chúng tôi tập trung nghiên cứu và phát triển các kết quả, hướng tiếp cận về điều kiện hội tụ cho bài toán tối ưu tập dựa trên những kết quả ban đầu đã được công bố trong những năm gần đây. Cụ thể, Gutiérrez và các đồng sự (2016) [4] đã sử dụng các điều kiện liên quan đến tính liên tục và tính trội của hàm mục tiêu, tính compact của tập ràng buộc để khảo sát tính ổn định ngoài của tập nghiệm hữu hiệu

yếu theo nghĩa hội tụ Hausdorff, tính ổn định trong của tập nghiệm hữu hiệu theo nghĩa hội tụ Hausdorff và Painlevé–Kuratowski trên không gian ảnh cho trường hợp bài toán tối ưu tập có tập ràng buộc bị nhiễu. Karuna và Lalitha (2019) [5] đã áp dụng các điều kiện liên quan đến tính đóng, tính lồi, và tính compact theo dãy của tập ràng buộc, cũng như tính liên tục Hausdorff, giá trị compact, tính tựa lồi chặt theo nón và tính trội của hàm mục tiêu để nghiên cứu sự ổn định ngoài của tập nghiệm hữu hiệu theo nghĩa Hausdorff và Painlevé–Kuratowski, theo nghĩa Painlevé–Kuratowski cho tập nghiệm hữu hiệu yếu. Đồng thời, các tác giả đã sử dụng các công cụ trên để khảo sát sự ổn định trong theo nghĩa Hausdorff và Painlevé–Kuratowski cho tập nghiệm hữu hiệu và theo nghĩa Painlevé–Kuratowski cho tập nghiệm hữu hiệu yếu trên không gian ảnh của bài toán tối ưu bị nhiễu bởi tập ràng buộc. Với mô hình tương tự như các nhóm tác giả trên Anh et al. (2020) [6] nghiên cứu sự ổn định theo nghĩa Painlevé–Kuratowski của tập nghiệm hữu hiệu. Nhóm tác giả trong [6] đã sử dụng tính compact của tập ràng buộc, tính liên tục và giá trị compact, tính chất ngược của hàm mục tiêu để khảo sát sự ổn định ngoài của nghiệm hữu hiệu. Ngoài ra, nhóm tác giả trên đã sử dụng tính compact dưới theo nón, tính trội, tính liên tục và giá trị compact của hàm mục tiêu để nghiên cứu sự ổn định trong của tập nghiệm hữu hiệu.

Với các kỹ thuật và công cụ đã được đề xuất ở trên, bằng cách điều chỉnh phù hợp cho nhiều bài toán tối ưu tập có mối quan hệ thứ tự khác, chúng tôi xem xét mô hình bài toán tối ưu đa trị bị nhiễu bởi tập ràng buộc và xây dựng nghiệm hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu yếu dựa vào quan hệ kiểu  $u$  được đề cập trong [2], đồng thời, sử dụng các điều kiện liên tục Hausdorff theo nón và các giả thiết

compact giảm nhẹ để thiết lập điều kiện hội tụ của các tập nghiệm về tập nghiệm của bài toán gốc.

**2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU**

Nghiên cứu này thực hiện bằng phương pháp định tính, sử dụng tài liệu tham khảo và các kết quả đã đạt được trong những năm qua, áp dụng các phương pháp phân tích, tổng hợp, diễn giải để thực hiện.

**3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN**

Giả sử  $(X, \|\cdot\|_X)$  là không gian tuyến tính định chuẩn thực, ký hiệu  $B_\delta (\overline{B}_\delta)$  là quả cầu mở (đóng) tâm 0 trong  $X$  với bán kính  $\delta > 0$ . Ta kí hiệu tương ứng phần trong và bao đóng của tập  $A \subseteq X$  là  $\text{int } A$  và  $\text{cl } A$ . Giả sử  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  là không gian tuyến tính định chuẩn thực,  $\mathcal{P}(Y)$  tập hợp tất cả các tập con khác rỗng của  $Y$ , với  $K \subseteq Y$  là một nón lồi, đóng và có đỉnh, với phần trong khác rỗng ( $\text{in } A \neq \emptyset$ ).

Ta xét quan hệ thứ tự trên tập được giới thiệu bởi Kuroiwa [1] như sau: Với  $M, N \in \mathcal{P}(Y)$ ,

$$M \leq N \text{ khi và chỉ khi } M \subseteq N - K,$$

$$M < N \text{ khi và chỉ khi } M \subseteq N - \text{int } K.$$

Ta nói rằng,

$$M \sim N \text{ nếu và chỉ nếu } M \leq N \text{ and } N \leq M.$$

Xét ánh xạ đa trị  $F$  từ  $X$  đến  $Y$  và với mỗi  $x, y \in X$ , ta nói rằng:  $x \sim y$  nếu và chỉ nếu  $F(x) \sim F(y)$ .

Nhắc lại khái niệm hội tụ Kuratowski-Painlevé từ [7] như sau: “Một dãy  $\{A_n\}$  các tập con khác rỗng của  $X$  được gọi là hội tụ đến một tập con  $A$  khác rỗng của  $X$  theo nghĩa Kuratowski-Painlevé (Kí hiệu:  $A_n \xrightarrow{K} A$ ), nếu  $\text{Ls}(A_n) \subseteq A \subseteq \text{Li}(A_n)$ , trong đó:

$$\text{Ls}(A_n):$$

$$= \left\{ x \in X : x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, x_k \in A_{n_k}, \{n_k\} \text{ là một dãy con của } \{n\} \right\};$$

và

$$\text{Li}(A_n) := \left\{ x \in X : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_n \in A_n \text{ với giá trị } n \text{ đủ lớn} \right\}.$$

Nếu  $\text{Ls}(A_n) \subseteq A$  ta nói dãy  $\{A_n\}$  hội tụ trên Painlevé-Kuratowski về  $A$  (Kí hiệu:  $A_n \xrightarrow{K} A$ ). Nếu  $A \subseteq \text{Li}(A_n)$  ta nói dãy  $\{A_n\}$  hội tụ dưới Painlevé-Kuratowski về  $A$  (Kí hiệu:  $A_n \xrightarrow{K} A$ ). Bây giờ, ta nhắc lại một khái niệm hội tụ thường được sử dụng, đó là hội tụ Hausdorff.

Một dãy  $\{A_n\}$  các tập con khác rỗng của  $X$  được gọi là hội tụ đến một tập con  $A$  khác rỗng của  $X$  theo nghĩa Hausdorff (Kí hiệu:  $A_n \xrightarrow{H} A$ ) nếu

$$e(A_n, A) \rightarrow 0, e(A, A_n) \rightarrow 0$$

trong đó,  $e(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B) = \{\lambda \geq 0 | A \subseteq B + \overline{B}_\lambda\}$  và  $d(a, B) := \inf_{b \in B} \|b - a\|_X$ , với  $B$  là tập con khác rỗng của  $X$ . Ta nói dãy  $\{A_n\}$  hội tụ trên (dưới) Hausdorff về  $A$  khi  $e(A_n, A) \rightarrow 0$  ( $e(A, A_n) \rightarrow 0$ ) và được kí hiệu  $A_n \xrightarrow{H} A$  ( $A_n \xrightarrow{H} A$ ).

Nhận xét 1 (xem [6])

- a) Nếu  $A_n \xrightarrow{H} A$  và  $A$  là tập đóng thì  $A_n \xrightarrow{K} A$ .
- b) Nếu  $A_n \xrightarrow{H} A$  thì  $A_n \xrightarrow{K} A$ .

Mệnh đề 1. Cho  $A$  là tập compact. Khi đó,  $A_n \xrightarrow{K} A \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{H} A$ .

Chứng minh:

( $\Rightarrow$ ) Bằng phép chứng minh phản chứng. Giả sử ngược lại, tồn tại giá trị  $\delta > 0$  sao cho, với mọi giá trị  $n > 0$ , ta luôn tìm được giá trị  $k > n$  sao cho  $A \not\subseteq A_k + B_\delta$ . Tức là, ta luôn tìm được dãy con  $\{n_k\}$  sao cho  $A \not\subseteq A_{n_k} + B_\delta$  với mọi  $k$  (1).

Lấy tùy ý  $a \in A$ , ta tìm được dãy  $\{a_n\}$ , với  $a_n \in E_n$ , hội tụ về  $a$ , bởi vì  $A_n \xrightarrow{K} A$ . Suy ra  $a \in a_n + B_\delta$ , với  $n$  đủ lớn. Điều này mâu thuẫn với (1).

( $\Leftarrow$ ) Theo Nhận xét 1, ta có  $A_n \xrightarrow{H} A \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{K} A$ .

Định nghĩa 1. [7, Định nghĩa 3.1.16] Giả sử  $\bar{x} \in X$ , ánh xạ đa trị  $F: X \rightrightarrows Y$  được gọi là:

a) Nửa liên tục trên Hausdorff theo nón  $K$  tại  $\bar{x}$ , nếu với mỗi lân cận  $V$  của  $0_Y$ , tồn tại lân cận  $U$  của  $\bar{x}$  sao cho  $F(x) \subseteq F(\bar{x}) + V - K$ , với mọi  $x \in U$ ;

b) Nửa liên tục dưới Hausdorff theo nón  $K$  tại  $\bar{x}$ , nếu với mỗi lân cận  $V$  của  $0_Y$ , tồn tại lân cận  $U$  của  $\bar{x}$  sao cho  $F(\bar{x}) \subseteq F(x) + V - K$ , với mọi  $x \in U$ ;

c) Liên tục Hausdorff theo nón  $K$  tại  $\bar{x}$ , nếu  $F$  là nửa liên tục trên Hausdorff và nửa liên tục dưới Hausdorff theo nón  $K$  tại  $\bar{x}$ ;

d) Nửa liên tục trên theo nón  $K$  tại  $\bar{x}$ , nếu với mỗi tập mở  $V \subset Y$  và  $F(\bar{x}) \subset V$ , thì tồn tại lân cận  $U$  của  $\bar{x}$  sao cho  $F(x) \subseteq V - K$ , với mọi  $x \in U$ ;

e) Nửa liên tục dưới theo nón  $K$  tại  $\bar{x}$ , nếu với mỗi tập mở  $V \subset Y$  và  $F(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$ , thì tồn tại lân cận  $U$  của  $\bar{x}$  sao cho  $F(x) \cap [V + K] \neq \emptyset$ , với mọi  $x \in U$ .

Ánh xạ  $F$  được gọi là nửa liên tục trên Hausdorff (tương ứng nửa liên tục dưới Hausdorff, nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới) theo nón  $K$  trên  $X$ , nếu  $F$  là nửa liên tục trên Hausdorff (tương ứng nửa liên tục dưới Hausdorff, nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới) theo nón  $K$  tại mọi điểm  $x \in X$ .

Nhận xét 2. [7, Mệnh đề 3.1.20] Nếu  $F$  có giá trị compact tại  $\bar{x}$ , thì tính chất  $F$  nửa liên tục Hausdorff theo nón  $K$  và nửa liên tục theo nón  $K$  là tương đương nhau.

Bổ đề 1. (xem [8]) Giả sử  $A$  là tập compact và  $A_n \xrightarrow{H} A$ , với bất kỳ  $x_n \in A_n, \forall n$ . Khi đó, tồn tại một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  và  $x \in A$  sao cho  $x_{n_k} \rightarrow x$ .

Ta xem xét bài toán:

$$(SOP): \text{Min}_{x \in E} F(x), \quad \emptyset \neq E \subset \text{dom}(F).$$

Nhắc lại khái niệm tập nghiệm hữu hiệu và tập nghiệm hữu hiệu yếu như sau:

$$\begin{aligned} & \text{Eff}(F, E) \\ &= \{x_0 \in E \mid \forall x \in E: [F(x) \leq F(x_0)] \Rightarrow [F(x_0) \leq F(x)]\}; \\ & \text{WEff}(F, E) \\ &= \{x_0 \in E \mid \forall x \in E: [F(x) < F(x_0)] \Rightarrow [F(x_0) < F(x)]\}. \end{aligned}$$

Nghiên cứu này chỉ xem xét bài toán nhiều tập ràng buộc:

$$(SOP)^n: \text{Min}_{x \in E_n} F(x).$$

Tương tự, ta cũng có các tập nghiệm tương ứng:

$$\begin{aligned} & \text{Eff}(F, E_n) \\ &= \left\{ x_0 \in E_n \mid \forall x \in E_n: [F(x) \leq F(x_0)] \Rightarrow [F(x_0) \leq F(x)] \right\}; \\ & \text{WEff}(F, E_n) \\ &= \left\{ x_0 \in E_n \mid \forall x \in E_n: [F(x) < F(x_0)] \Rightarrow [F(x_0) < F(x)] \right\}. \end{aligned}$$

Nhận xét 3. (xem [4]) Nếu  $F$  có giá trị compact trong  $E$ , thì  $\text{Eff}(F, E) \subset \text{WEff}(F, E)$ .

Nhận xét 4. (xem [8]) Nếu  $E$  là tập đóng,  $cl[\cup_n E_n]$  là tập compact và  $E_n \xrightarrow{K} E$ , thì  $E$  là tập compact.

Định nghĩa 2. [9, Định nghĩa 2.6] Giả sử  $E$  là tập con lồi khác rỗng của  $X$ . Ánh xạ  $F$  được gọi là *tựa lồi chặt theo nón  $K$*  tại  $\bar{x} \in E$ . Nếu với mỗi  $x \in E, x \neq \bar{x}$  và  $\forall \lambda \in (0,1)$ , thì

$$F(x) \leq F(\bar{x}) \Rightarrow F(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) < F(\bar{x}).$$

Bổ đề 2. (xem [5]) Nếu  $E$  là một tập con lồi của  $X$  và ánh xạ  $F$  là tựa lồi chặt theo nón  $K$  trong  $E$ , thì ta có  $\text{WEff}(F, E) = \text{Eff}(F, E)$ .

Bổ đề 3. Giả sử  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ , ánh xạ  $F$  là nửa liên tục dưới Hausdorff theo nón  $K$  tại  $x_0$ , nửa liên tục trên Hausdorff theo nón  $K$  tại  $y_0$  và có giá trị đóng theo nón  $K$  tại  $y_0$ . Khi đó, ta có:

$$F(x_n) \leq F(y_n) \Rightarrow F(x_0) \leq F(y_0).$$

Chúng minh:

Vì  $x_n \rightarrow x_0$  và ánh xạ  $F$  nửa liên dưới Hausdorff theo nón  $K$  tại  $x_0$ , nên với giá trị dương  $\epsilon$  tùy ý, ta có:

$$F(x_0) \subset F(x_n) + B_\epsilon - K, \text{ với } n \text{ đủ lớn (1).}$$

Trong đó,  $B_\epsilon$  là quả cầu mở tâm  $O_Y$ , bán kính  $\epsilon$ .

Mặt khác, do  $y_n \rightarrow y_0$  và  $F$  nửa liên tục trên Hausdorff theo nón  $K$  tại  $y_0$ , nên:

$$F(y_n) \subset F(y_0) + B_\epsilon - K \text{ với } n \text{ đủ lớn (2).}$$

Kết hợp (1), (2) và  $F(x_n) \leq F(y_n)$ , thu được:

$$\begin{aligned} &F(x_0) \subset F(x_n) + B_\epsilon - \\ &\subset F(y_n) - K + B_\epsilon - K \\ &\subset F(y_0) + B_\epsilon - K - K + B_\epsilon - K \\ &\subset F(y_0) + B_{2\epsilon} - K. \end{aligned}$$

Vì  $\epsilon$  là giá trị dương tùy ý và ánh xạ  $F$  có giá trị đóng theo nón tại  $y_0$ , ta có:

$$F(x_0) \subset F(y_0) - K.$$

Bổ đề 4. Giả sử  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ , ánh xạ  $F$  là nửa liên dưới Hausdorff theo nón  $K$  tại  $x_0$ , nửa liên tục trên Hausdorff theo nón  $K$  tại  $y_0$  và có giá trị compact tại  $x_0$ . Khi đó, nếu  $F(x_0) < F(y_0)$ , thì tồn tại giá trị  $n_0$  đủ lớn sao cho  $F(x_n) < F(y_n), \forall n > n_0$ .

Chứng minh:

Lấy bất kỳ  $z_n \in F(x_n)$ , với mọi  $n$ . Vì  $x_n \rightarrow x_0$  và ánh xạ  $F$  là nửa liên tục trên Hausdorff theo nón  $K$  tại  $x_0$ , nên với giá trị dương  $\epsilon$  tùy ý, ta có:

$$F(x_n) \subset F(x_0) + B_\epsilon - K, \text{ với } n \text{ đủ lớn (3).}$$

Khi đó, với  $n$  đủ lớn, tồn tại  $v_n \in F(x_0), k_n \in K$  sao cho  $z_n - v_n + k_n \in B_\epsilon$  (4).

Do  $F$  có giá trị compact tại  $x_0$  và với  $v_n \in F(x_0)$ , nên tồn tại một dãy con của  $v_n$  không mất, tổng quát ta vẫn kí hiệu là  $v_n$ , hội tụ về  $v_0 \in F(x_0)$ . Kết hợp điều này cùng với (4), thu được:

$$z_n - v_0 + k_n \in B_{2\epsilon}, \text{ với } n \text{ đủ lớn (5).}$$

Mặt khác, do  $F(x_0) < F(y_0)$  và  $v_0 \in F(x_0)$ , nên tồn tại  $w_0 \in F(y_0)$  sao cho:  $v_0 - w_0 \in -intK$  (6).

Vì  $y_n \rightarrow y_0$  và ánh xạ  $F$  là nửa liên tục dưới Hausdorff theo nón  $K$  tại  $y_0$ , ta có:

$$F(y_0) \subset F(y_n) + B_\epsilon - K, \text{ với } n \text{ đủ lớn (7).}$$

Từ (7) và  $w_0 \in F(y_0)$ , ta có thể tìm được  $w_n \in F(y_n), k'_n \in K$  sao cho:

$$w_0 - w_n + k'_n \in B_\epsilon, \text{ với } n \text{ đủ lớn (8).}$$

Kết hợp (5), (6) và (8), ta thu được:

$$\begin{aligned} &z_n - w_n + k_n + k'_n \\ &\in z_n - v_0 + k_n + v_0 - w_0 + w_0 - w_n + k'_n \\ &\in B_\epsilon - intK + B_\epsilon \subset B_{2\epsilon} - intK, \text{ với } n \text{ đủ} \\ &\text{lớn.} \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (5) và (8), suy ra:

$$z_n - w_n + k_n + k'_n \in -intK, \text{ với } n \text{ đủ lớn.}$$

Do đó,  $z_n - w_n \in -intK - k_n - k'_n \in -intK$ , với  $n$  đủ lớn.

Sự hội tụ trên cho tập nghiệm của bài toán (SOP):

Định lí 1. Giả sử ta có các giả thiết:

- a)  $E$  là tập compact và  $E_n \xrightarrow{K} E$ ;
- b)  $F$  liên tục Hausdorff theo nón  $K$ ;
- c)  $F$  có giá trị compact trong  $E$ .

Khi đó, Với  $x_n \in WEff(F, E_n)$ , với mọi  $n$ , tồn tại một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  sao cho  $\{x_{n_k}\}$  hội tụ về  $x_0 \in WEff(F, E)$ .

Chứng minh:

Vì  $x_n \in WEff(F, E_n), E_n \xrightarrow{K} E$  và  $E$  là tập compact, nên ta có thể tìm được một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  sao cho  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in E$ .

Bây giờ chứng minh  $x_0 \in WEff(F, E)$ . Thật vậy, bằng phương pháp chứng minh phản chứng, giả sử ngược lại, khi đó tồn tại  $y_0 \in E$  sao cho  $F(y_0) < F(x_0)$ .

Do  $E_n \xrightarrow{K} E$  và  $y_0 \in E$ , nên tồn tại dãy  $\{y_n\}$ , với  $y_n \in E_n$ , hội tụ về  $y_0$ . Ta có  $x_{n_k} \rightarrow x_0, y_{n_k} \rightarrow y_0$  và  $F(y_0) < F(x_0)$ , sử dụng kết quả Bổ đề 2 ta thu được  $F(y_{n_k}) < F(x_{n_k})$ , với giá trị  $k$  đủ lớn.

Điều này mâu thuẫn với  $x_n \in WEff(F, E_n)$ . Do đó ta có  $x_0 \in WEff(F, E)$ .

Sau đây, ta xem một số ví dụ minh họa cho tính cốt yếu của các giả thiết trong Định lí 1.

Ví dụ 1. Cho  $X = R, Y = R^2, K = R_+^2, E = [0,1], E_n = [0,1 + n^{-1})$  và xét ánh xạ đa trị  $F: R \rightrightarrows R^2$  được xác định như sau:

$$F(x) = \begin{cases} \{x\} \times [0,1] & \text{nếu } x < 1, \\ \{(1,1)\} & \text{nếu } x = 1, \\ \{x\} \times [0, x] & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Rõ ràng tất cả các giả thiết của Định lí 1 được thỏa mãn nên ta có được kết luận như Định lí 1. Bằng tính toán trực tiếp ta có  $WEff(F, E_n) = [0,1]$  và  $WEff(F, E) = [0,1]$ . Thấy rằng, khi chọn bất kì dãy nào trong  $WEff(F, E_n)$  thì luôn tồn tại một dãy con hội tụ về  $x_0 \in WEff(F, E)$ , vì tính compact của  $[0,1]$ .

Ví dụ 2. Cho  $X = R, Y = R^2, K = R_+^2, E = [0,1], E_n = [0,1 + n^{-1}]$  và xét ánh xạ đa trị  $F: R \rightrightarrows R^2$  được xác định như sau:

$$F(x) = \begin{cases} \{x\} \times (-\infty, 1) & \text{nếu } x < 1, \\ \{(1,1)\} & \text{nếu } x = 1, \\ \{x\} \times (-\infty, 2 - x) & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Rõ ràng các giả thiết của Định lí 1 được thỏa mãn ngoại trừ c), nên Định lí 1 không thể áp dụng. Bằng tính toán trực tiếp ta có  $WEff(F, E_n) = \{0,1 + n^{-1}\}$  và  $WEff(F, E) = \{0\}$ . Thấy rằng, khi chọn dãy  $x_n = 1 + n^{-1}, x_n \rightarrow 1 \notin WEff(F, E)$ .

Ví dụ 3. Cho  $X = R, Y = R^2, K = R_+^2, E = [0,1], E_n = [0,1 + n^{-1}]$  và xét ánh xạ đa trị  $F: R \rightrightarrows R^2$  được xác định như sau:

$$F(x) = \begin{cases} \{x\} \times [0, x] & \text{nếu } x \leq 1, \\ (x, 0) & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Rõ ràng các giả thiết của Định lí 1 được thỏa mãn ngoại trừ b), nên Định lí 1 không thể áp dụng. Thật vậy, bằng tính toán trực tiếp ta có

$WEff(F, E_n) = \{0\} \cup (1, 1 + n^{-1}]$  và  $WEff(F, E) = \{0\}$ . Thấy rằng, khi chọn dãy  $x_n = 1 + n^{-1}, x_n \rightarrow 1 \notin WEff(F, E)$ .

Định lí 2. Giả sử ta có các giả thiết:

- a)  $E$  là tập compact và  $E_n \xrightarrow{K} E$ ;
- b)  $F$  liên tục Hausdorff theo nón  $K$ ;
- c)  $F$  là tựa lồi chặt theo nón  $K$  trong  $E$ ;
- d)  $F$  có giá trị compact trong  $E$  và  $E_n$ .

Khi đó, với  $x_n \in Eff(F, E_n)$ , với mọi  $n$ , tồn tại một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  sao cho  $\{x_{n_k}\}$  hội tụ về  $x_0 \in Eff(F, E)$ .

Chúng minh:

Vì  $x_n \in Eff(F, E_n)$ , kết hợp với giả thiết d) và theo Nhận xét 3, ta có  $x_n \in WEff(F, E_n)$ . Từ kết quả của Định lí 1, tồn tại dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  hội tụ về phần tử  $x_0 \in WEff(F, E)$ . Do  $F$  là tựa lồi chặt theo nón  $K$ , nên theo Bổ đề 2, ta có  $WEff(F, E) = Eff(F, E)$  do đó,  $x_0 \in Eff(F, E)$ .

Ví dụ 4. Cho  $X = R, Y = R^2, K = R_+^2, E = [0,1], E_n = [0,1 + n^{-1}]$  và xét ánh xạ đa trị  $F: R \rightrightarrows R^2$  được xác định như sau:

$$F(x) = \{x\} \times [0, x], \text{ với mọi } x \in R.$$

Rõ ràng, các giả thiết của Định lí 1 được thỏa mãn, nên Định lí 1 có thể áp dụng. Bằng tính toán trực tiếp, ta có  $Eff(F, E_n) = \{0\}$  và  $Eff(F, E) = \{0\}$  và hiển nhiên, kết quả của Định lí 1 đúng trong trường hợp này.

Ví dụ 5. Cho  $X = R, Y = R^2, K = R_+^2, E = [0,1], E_n = [0,1 + n^{-1}]$  và xét ánh xạ đa trị  $F: R \rightrightarrows R^2$  được xác định như sau:

$$F(x) = \begin{cases} \{x\} \times [0,1] & \text{nếu } x \leq 1, \\ \{x\} \times [0, 2 - x] & \text{nếu } 1 < x \leq 2, \\ \{x\} \times [2 - x, 0] & \text{nếu } 2 < x. \end{cases}$$

Rõ ràng, các giả thiết của Định lí 1 được thỏa mãn ngoại trừ c), nên Định lí 1 không thể áp dụng. Bằng tính toán trực tiếp ta có  $Eff(F, E_n) =$

$\{0\} \cup (1, 1 + n^{-1}]$  và  $Eff(F, E) = \{0\}$ . Ta thấy, khi chọn dãy  $x_n = 1 + n^{-1}$ ,  $x_n \rightarrow 1 \notin WEff(F, E)$ .

Kết hợp Định lý 1, Định lý 2 và Nhận xét 4, thu được các hệ quả như sau:

Hệ quả 1. Giả sử ta có các giả thiết:

- a)  $E$  là tập đóng và  $cl[\cup_n E_n]$  là tập compact;
- b)  $E_n \xrightarrow{H} E$  và  $E_n \xrightarrow{K} E$ ;
- c)  $F$  liên tục Hausdorff theo nón  $K$ ;
- d)  $F$  có giá trị compact trong  $E$ .

Khi đó, với  $x_n \in WEff(F, E_n)$ , với mọi  $n$ , tồn tại một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  sao cho  $\{x_{n_k}\}$  hội tụ về  $x_0 \in WEff(F, E_n)$ .

Hệ quả 2. Giả sử ta có các giả thiết:

- a)  $E$  là tập đóng và  $cl[\cup_n E_n]$  là tập compact;
- b)  $E_n \xrightarrow{H} E$  và  $E_n \xrightarrow{K} E$ ;
- c)  $F$  liên tục Hausdorff theo nón  $K$ ;
- d)  $F$  có tựa lồi theo nón  $K$  trong  $E$ ;
- e)  $F$  có giá trị compact trong  $E$  và  $E_n$ .

Khi đó, với  $x_n \in Eff(F, E_n)$ , với mọi  $n$ , tồn tại một dãy con  $\{x_{n_k}\}$  của  $\{x_n\}$  sao cho  $\{x_{n_k}\}$  hội tụ về  $x_0 \in Eff(F, E_n)$ .

Sự hội tụ dưới cho tập nghiệm của bài toán (SOP):

Dựa vào Định nghĩa 3.1 trong [11], ta định nghĩa tính trội của bài toán (SOP) như sau:

Định nghĩa 3. Bài toán (SOP) được gọi là có tính chất trội, nếu với mỗi dãy tùy ý  $\{x_n\}$ , với  $x_n \in E_n$ , thì tồn tại một dãy  $\{u_n\}$ ,  $u_n \in E_n$ , có một dãy con  $\{u_{n_k}\}$ , với  $u_{n_k} \in Eff(F, E_{n_k})$  sao cho  $F(u_{n_k}) \leq F(x_{n_k})$ .

Định lý 3. Giả sử ta có các giả thiết:

- a)  $E$  là tập compact và  $E_n \xrightarrow{K} E$ ;
- b)  $F$  liên tục Hausdorff theo nón  $K$  và có giá trị compact trong  $E$ ;
- c) Bài toán (SOP) có tính chất trội.

Khi đó, với  $x_0 \in Eff(F, E)$ , với mọi  $n$ , tồn tại một dãy con  $\{y_{n_k}\}$  của  $\{y_n\}$  hội tụ về  $y_0 \in Eff(F, E)$  và  $y_0 \sim x_0$ .

Chúng minh:

Do  $x_0 \in E$  và  $E_n \xrightarrow{K} E$ , nên tồn tại một dãy  $\{x_n\}$ , với  $x_n \in E_n$  sao cho  $x_n \rightarrow x_0$ . Bây giờ, ta chứng minh  $x_n \in Eff(F, E_n)$ .

Do bài toán (SOP) có tính chất trội, nên tồn tại một dãy  $\{y_n\}$ ,  $y_n \in E_n$ , có một dãy con  $\{y_{n_k}\}$  với  $y_{n_k} \in Eff(F, E_{n_k})$  sao cho  $F(y_{n_k}) \leq F(x_{n_k})$ . Do  $E_{n_k} \xrightarrow{H} E$ ,  $E$  là tập compact và  $y_{n_k} \in E_{n_k}$ , nên tồn tại một dãy con  $\{y_{n_{k_j}}\}$  của dãy  $\{y_{n_k}\}$  hội tụ về  $y_0 \in E$ .

Vì  $x_{n_{k_j}} \rightarrow x_0$ ,  $y_{n_{k_j}} \rightarrow y_0$ , nên ta sử dụng kết quả của Bổ đề 1 ta thu được  $F(y_0) \leq F(x_0)$ , điều này suy ra được  $F(x_0) \leq F(y_0)$ , vì  $x_0 \in Eff(F, E)$ . Tức là  $y_0 \sim x_0$ .

Tương tự, kết hợp Định lý 3 và Nhận xét 4, ta thu được hệ quả sau:

Hệ quả 3. Giả sử ta có các giả thiết sau đây:

- a)  $E$  là tập đóng và  $cl[\cup_n E_n]$  là tập compact;
- b)  $E_n \xrightarrow{H} E$  và  $E_n \xrightarrow{K} E$ ;
- c)  $F$  liên tục Hausdorff theo nón  $K$  và có giá trị compact trong  $E$ ;
- d) Bài toán (SOP) có tính chất trội.

Khi đó, với  $x_0 \in Eff(F, E)$ , với mọi  $n$ , tồn tại một dãy con  $\{y_{n_k}\}$  của  $\{y_n\}$  hội tụ về  $y_0 \in Eff(F, E)$  và  $y_0 \sim x_0$ .

#### 4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này sử dụng sự hội tụ kiểu Painlavé-Kuratowski để khảo sát sự hội tụ của dãy tập nghiệm hữu hiệu và tập nghiệm hữu hiệu yếu của bài tối ưu đa trị bị nhiễu bởi hàm mục tiêu. Bằng cách giảm nhẹ các giả thiết nửa liên tục bằng nửa liên tục theo nón, tính chất liên quan đến compact, chúng tôi đã thu được kết quả về sự

hội tụ trên của bài toán tối ưu đa trị. Ngoài ra, tính chất trội và kết hợp tính chất này với các tính chất giảm nhẹ ở trên có thể được sử dụng để khảo sát sự hội tụ dưới của tập nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa trị nêu trên.

### **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] Kuroiwa, D. (1998). The natural criteria in set-valued optimization. *RIMS Kokyuroku Kyoto Univ* (1031), 85–90 (1998).
- [2] Jahn, J., and Ha, T. X. D. (2011). New order relations in set optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 148(2), 209-236.
- [3] Karaman, E., Soyertem, M., Atasever Güvenç, İ., Tozkan, D., Küçük, M., and Küçük, Y. (2018). Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization. *Positivity*, 22, 783-802.
- [4] Gutiérrez, C., Miglierina, E., Molho, E., & Novo, V. (2016). Convergence of solutions of a set optimization problem in the image space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 170, 358-371.
- [5] Karuna and Lalitha, C. S. (2019). External and internal stability in set optimization. *Optimization*, 68(4), 833-852.
- [6] Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Hien, D. V. (2020). Stability of efficient solutions to set optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 78, 563-580.
- [7] Khan, A. A., Tammer, C., & Zălinescu, C. (2016). *Set-valued optimization*. Springer-Verlag Berlin An.
- [8] Anh, L. Q., Duy, T. Q., Hien, D. V., Kuroiwa, D., & Petrot, N. (2020). Convergence of solutions to set optimization problems with the set less order relation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 185, 416-432.
- [9] Karuna, L. C. (2018). Continuity of approximate weak efficient solution set map in parametric set optimization. *J. Nonlinear Convex Anal*, 19, 1247-1262.