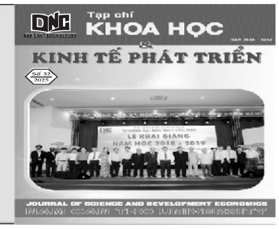
Tạp chí Khoa học và Kinh tế Phát triển Trường Đại học Nam Cần Thơ

Website: jsde.nctu.edu.vn



Sự đặt chỉnh nghiệm cho bài toán tối ưu tập

Trần Thị Tuyết Mai*

Bộ môn Toán, Khoa Cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ

**Người chịu trách nhiệm bài viết: Trần Thị Tuyết Mai (email: tttmai@nctu.edu.vn)*

Ngày nhận bài: 24/12/2024

Ngày phản biện: 22/1/2025

Ngày duyệt bài: 3/2/2025

***Title:** Well-posedness for set optimization problems*

***Keywords:** gerstewitz function, set optimization problem, set ordered relation, well-posedness*

***Từ khóa:** bài toán tối ưu tập, đặt chỉnh, hàm Gerstewitz, quan hệ thứ tự tập*

ABSTRACT

In this study, we examine the pointwise and global well-posedness of set optimization problems using the upper type set ordered relation. We focus on generalized Gerstewitz functions for sets in relation to the reference set ordered relation, and analyze various properties of these functions. By utilizing these functions, we explore the connections between pointwise and global well-posedness concepts in set optimization problems and their corresponding scalarization optimization problems.

TÓM TẮT

Trong nghiên cứu này, chúng tôi khảo sát tính đặt chỉnh toàn cục và đặt chỉnh tại điểm cho các bài toán tối ưu tập liên quan đến quan hệ thứ tự tập hợp loại trên. Chúng tôi xem xét các hàm Gerstewitz tổng quát cho các tập hợp liên quan đến quan hệ thứ tự tập và nghiên cứu một số tính chất của chúng. Sử dụng các hàm này, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ giữa các khái niệm đặt chỉnh toàn cục và đặt chỉnh tại điểm của các bài toán tối ưu tập và các bài toán tối ưu vô hướng tương ứng.

1. GIỚI THIỆU

Bài toán tối ưu tập gần đây đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học ở cả trong và ngoài nước, bởi vì chúng có ứng dụng hữu ích trong nhiều lĩnh vực như tài chính, lý thuyết trò chơi, kỹ thuật hoặc lý thuyết điều khiển (Khan et al., 2016; Mordukhovich, 2018) và các tài liệu tham khảo [10],[14]. Nhiều bài báo đã chọn phương pháp tiếp cận vectơ, việc xác định các điểm tối ưu trong sự hợp nhất của tất cả các giá trị, để giảm một bài toán tối ưu tập thành bài toán tối ưu vectơ. Bằng cách đó, chúng ta tìm các phần tử tối ưu của tập ảnh của ánh xạ mục tiêu có giá trị tập hợp. Một phương pháp tiếp cận khác, chẳng hạn như phương pháp tiếp cận tập hợp, do (Kuroiwa, 1998) giới thiệu, dựa trên sự so sánh giữa các giá trị của hàm mục tiêu bằng cách sử dụng các mối quan hệ giữa các tập hợp bằng cách sử dụng các mối quan hệ thứ tự của không gian mục tiêu [11]. Các nghiên cứu toàn diện về phương pháp tiếp cận vectơ và tập hợp có thể được tìm thấy trong (Anh et al., 2020; Gutie´rrez, 2015; Han, 2019; Jahn và Ha, 2011; Jime´nez et al., 2020) [1],[3],[5],[8],[9].

Trong tối ưu hóa, sự đặt chỉnh đóng vai trò quan trọng trong cả lý thuyết và thuật toán. Tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu kiểm soát phương hướng của các biến khi giá trị của hàm mục tiêu tương ứng gần với giá trị tối ưu. Nó có mối liên hệ mật thiết với việc nghiên cứu độ nhạy và tính ổn định của bài toán tối ưu. Lý thuyết đặt chỉnh đã trở thành một vấn đề thú vị đối với các bài toán tối ưu vectơ cũng như các bài toán tối ưu tập. Nỗ lực đầu tiên nhằm mở rộng các khái niệm đặt chỉnh đối với bài toán tối ưu tập xuất phát từ (Zhang et al., 2009) [15]. Sau đó, nhiều khái niệm đặt chỉnh khác nhau đã được giới thiệu và nghiên cứu cho bài toán tối ưu tập. Bằng cách sử dụng sơ đồ vô hướng hóa theo các giả thiết về tính phù hợp của hình nón, (Gutierrez et al., 2012) đã tổng quát hóa các kết quả của (Zhang et al., 2009) về đặt chỉnh tại điểm cho các bài toán tối ưu tập mà các giá trị mục tiêu có thể không phải là các tập bị chặn theo nón [4],[15]. (Long và Peng, 2013) [12] đã cung cấp các tính chất và điều kiện đủ của đặt chỉnh toàn cục theo nghĩa của Bednarczuk (được gọi là B-đặt chỉnh) cho các bài toán tối ưu tập bằng cách sử dụng các giả thiết yêu cầu thông tin về các tập nghiệm hữu hiệu của các bài toán liên quan. Sau đó, (Han và Huang, 2017) đã thiết lập các điều kiện đủ của B-đặt chỉnh toàn cục cho các bài toán tối ưu tập lồi chặt có các nghiệm hữu hiệu Pareto và các nghiệm hữu hiệu yếu trùng nhau [6]. Nhiều tính chất và mối quan hệ của các khái niệm về đặt chỉnh tại điểm và toàn cục cho các bài toán tối ưu tập đã được trình bày gần đây trong (Crespi et al., 2018) [2]. Họ cũng đã đưa ra các điều kiện đủ cho đặt chỉnh toàn cục bằng cách sử dụng các giả thiết về tính compact cho các tập nghiệm hữu hiệu. Hầu hết các các kết quả liên quan đến sự đặt chỉnh của các bài toán tối ưu tập đều áp đặt tính không rỗng cho các tập nghiệm hữu hiệu. Do đó, cần có một phương pháp tiếp cận thay thế không sử dụng các giả thiết như vậy. Mục đích chính của nghiên cứu này là sự đặt chỉnh cho các bài toán tối ưu tập với giả thiết được nới lỏng hơn.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu này sử dụng phương pháp định tính qua tổng hợp, phân loại và phân tích tài liệu. Áp dụng phương pháp tiếp cận trực tiếp thông qua các công cụ của Giải tích đa trị, Lý thuyết tối ưu để xây dựng các dạng nghiệm xấp xỉ đồng thời khảo sát các tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến tính dạng Gerstewitz và áp dụng phương pháp tiếp cận gián tiếp để khảo sát tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập thông qua phép vô hướng hóa phi tuyến.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1 Cơ sở lý thuyết

Trong nghiên cứu này, ta xét Y là một không gian tô pô tuyến tính thực.

Định nghĩa 3.1: Tập $C \subset Y$ được gọi là tập lồi nếu với mỗi $x, y \in C$ và $\alpha \in [0,1]$ ta có $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$.

Định nghĩa 3.2: Tập $C \subset Y$ được gọi là nón nếu với mọi $x \in C$ và mọi $\alpha > 0$ ta luôn có $\alpha x \in C$. Nón C được gọi là nón có đỉnh nếu $C \cap (-C) = \{0\}$. Nón C được gọi là nón lồi nếu C là nón và là tập lồi.

Ví dụ 3.1: Trong $\mathbb{R}$, ta chỉ có các nón $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \{0\}$. Trong khi đó, đối với $\mathbb{R}^2$ ta có vô số các nón thứ tự, trong đó nón $\mathbb{R}^2_+$ là nón được nhiều người quan tâm bởi ý nghĩa thực tế của nó.

Định nghĩa 3.3: Một tập khác rỗng $A \subset Y$ được gọi là:

(a) $(-C)$-đóng nếu $A - C$ là một tập đóng;

(b) $(-C)$-bị chặn nếu với mỗi lân cận V của 0_Y tồn tại số $t > 0$ sao cho $A \subset tV - C$;

(c) $(-C)$-chính thường nếu $A - C \neq Y$.

Ta ký hiệu $\wp(Y)$ là một họ các tập con không rỗng của Y và $\wp_{\text{pro}(-C)}(Y)$, $\wp_{\text{cl}(-C)}(Y)$, $\wp_{\text{bd}(-C)}(Y)$ là họ các tập $(-C)$-chính thường, $(-C)$-đóng, $(-C)$-bị chặn tương ứng.

Ví dụ 3.2: Trong $\mathbb{R}$, ta có tập $A = [-2, -1]$ là $(-\mathbb{R}_+)$-đóng vì $A - \mathbb{R}_+ = [-2, -1] - [0, \infty) = (-\infty, -1]$ là một tập đóng và tập $A = \{-x^2 : x \in \mathbb{R}\}$ là $(-\mathbb{R}_+)$-bị chặn.

Với mỗi $A, B \in \wp(Y)$, xét quan hệ so sánh giữa các tập, ký hiệu bởi $\preccurlyeq$, như sau:

$A \preccurlyeq B$ nếu và chỉ nếu $A \subset B - C$,

$A \prec B$ nếu và chỉ nếu $A \subset B - \text{int}C$.

Ví dụ 3.3: Giả sử ta có 2 tập hợp như sau: $A = \{-3, -1\}$ và $B = \{-3, -1, 2, 4\}$, có thể nói rằng $A \preccurlyeq B$ vì $A \subset B - \mathbb{R}_+$.

Định nghĩa 3.4 Trong $\wp(Y)$ ta xét quan hệ $\sim$ giữa các tập được xác định như sau $A \sim B \Leftrightarrow A \preccurlyeq B$ và $B \preccurlyeq A$ (Hernández, E. và Rodríguez-Marín, L., 2007) [7].

Khi đó, quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\wp(Y)$. Lớp tương đương của tập $A \in \wp(Y)$ được ký hiệu bởi $[A]$. Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta có:

$$B \in [A] \Leftrightarrow A - C = B - C.$$

Định nghĩa 3.5: Cho $a \in Y$ và $e \in \text{int}C$ (Hernández, E. và Rodríguez-Marín, L., 2007) [7]. Hàm Gerstewitz $\varphi_{e,a} : Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ được định nghĩa như sau:

$$\varphi_{e,a}(y) = \min\{ t \in \mathbb{R} : y \in te + a - C\}, \ \forall y \in Y.$$

Ví dụ 3.4: Trong $\mathbb{R}^2$, chọn $a = (0; 0) \in \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+, e = (1; 1) \in \text{int}\mathbb{R}^2_+$. Khi đó, với $y = (-2; 3)$, ta có:

$$\begin{aligned}
\varphi_{e,a}(-2; 3) &= \min\{ t \in \mathbb{R} : (-2; 3) \in t(1; 1) + (0; 0) - \mathbb{R}^2_+\} \\
&= \min\{ t \in \mathbb{R} : (-2; 3) \in (t; t) - \mathbb{R}^2_+\} \\
&= \min\{ t \in \mathbb{R} : (-2 - t; 3 - t) \in -\mathbb{R}^2_+\} \\
&= \min\{t \in \mathbb{R} : -2 - t \leq 0 \text{ và } 2 + t \leq 0\} \\
&= \min\{t \in \mathbb{R} : t \geq -2 \text{ và } t \geq 3\} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Bổ đề 3.1: Cho $t \in \mathbb{R}, e \in \text{int}C$ *và* $y \in Y$ (Han, Y., 2019) [5]. Khi đó,

(a) $\varphi_{e,a}(y) < t \Leftrightarrow y \in te + a - \text{int}C$;

(b) $\varphi_{e,a}(y) \leq t \Leftrightarrow y \in te + a - C$;

(c) $\varphi_{e,a}(y) > t \Leftrightarrow y \notin te + a - C$.

Nếu thay thế a bằng một tập con không rỗng $A \subset Y$, ta sẽ được hàm $\varphi_{e,A} : Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ như sau:

$$\varphi_{e,A}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : y \in te + A - C\}, \ \forall y \in Y.$$

Một cách tương đương, $\varphi_{e,A}(y) = \inf_{a \in A} \varphi_{e,a}(y)$ với mỗi $y \in Y$.

Tiếp theo, mở rộng hàm Gerstewitz như sau:

$$G_e(\cdot,\cdot) \wp_{\text{pro}(-C)}(Y) \times \wp_{\text{pro}(-C)}(Y) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$(A, B) \quad \mapsto G_e(A, B) = \sup_{b \in B}\{\varphi_{e,A}(b)\}, \quad \text{với}$$

mọi $A, B \in \wp_{\text{pro}(-C)}(Y)$.

Bổ đề 3.2: Giả sử $\text{A}, \text{B} \in \wp_{\text{cl}(-C)}(Y) \cap \wp_{\text{pro}(-C)}(Y) \cap \wp_{\text{bd}(-C)}$ và $\text{t} \in \mathbb{R}$ (Han, Y., 2019) [5]. Khi đó:

(a) $\text{G}_\text{e}(\text{A}, \text{B}) \leq \text{t}$ khi và chỉ khi $\text{A} \subset \text{te} + \text{B} - \text{C}$;

(b) $\text{G}_\text{e}(\text{A}, \text{B}) < \text{t}$ khi và chỉ khi $\text{A} \subset \text{te} + \text{B} - \text{intC}$.

Trong trường hợp đặc biệt $t = 0$, ta có $G_e(A, B) \leq 0$ khi và chỉ khi $A \subset B - C$ và

$G_e(A,B) < 0$ khi và chỉ khi $A \subset B - \text{int}C$, tức là ta có $A \preccurlyeq B$ và $A \prec B$ tương ứng.

Tiếp theo, xét một quan hệ tương đương trên $\wp_{\text{pro}(-C)}(Y)$ được định nghĩa như sau

Định nghĩa 3.6: Giả sử $\text{A}, \text{B} \in \wp_{\text{pro}(-\text{C})}(\text{Y})$, $\text{A} \sim_C \text{B}$ nếu và chỉ nếu $\text{A} \preccurlyeq \text{B}$ và $\text{B} \preccurlyeq A$.

Cho $F: M \to \mathcal{P}(Y)$ là một ánh xạ đa trị, chúng ta xét bài toán tối ưu tập hợp

(SOP) minimize $F(x)$ s.t. $x \in M$), trong đó M là một tập con đóng, không rỗng của X.

Định nghĩa 3.7: Một nghiệm hữu hiệu $\bar{x} \in M$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (SOP) nếu và chỉ nếu với mọi $x \in M, F(x) \preceq_C F(\bar{x})$ suy ra $F(\bar{x}) \preceq_C F(x)$. Tập hợp tất cả các giải pháp hiệu quả Pareto được ký hiệu là P-Eff.

3.2 Vô hướng hóa và sự đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập

Cho M và F như trong Mục 3.1. Với mỗi $e \in \text{int}\, C$, chúng tôi đề xuất hai loại dãy cực tiểu ứng với vectơ e như sau:

Định nghĩa 3.8: Một dãy $\{x_n\} \subset M$ được gọi là

(a) Một dãy e-cực tiểu tương ứng với một vectơ v thuộc P-Eff của bài toán (SOP) nếu tồn tại một dãy các số thực không âm $\{\varepsilon_n\}$ hội tụ về 0 sao cho $F(x_n) \preceq_C F(v) + \varepsilon_n e$;

(b) Một dãy e-cực tiểu tổng quát của bài toán (SOP) nếu tồn tại một dãy các số thực không âm $\{\varepsilon_n\}$ hội tụ về 0 và dãy $\{v_n\} \subset$ P-Eff sao cho $F(x_n) \preceq_C F(v_n) + \varepsilon_n e$.

Kết quả sau đây cho thấy, các khái niệm được định nghĩa trong Định nghĩa 3.1 không phụ thuộc vào sự lựa chọn của e.

Mệnh đề 3.1: Giả sử $e \in \text{int C}$ được cố định, csác phát biểu sau đây là đúng.

(a) Một dãy $\{x_n\} \subset M$ được gọi là dãy e-cực tiểu tương ứng với một vectơ v thuộc P-Eff của bài toán (SOP) nếu tồn tại một dãy $\{c_n\} \subset C$ hội tụ về 0 sao cho $F(x_n) \preceq_C F(v) + c_n$;

(b) Một dãy $\{x_n\} \subset M$ được gọi là dãy e-cực tiểu tổng quát của bài toán (SOP) nếu tồn tại một dãy $\{c_n\} \subset C$ hội tụ về 0 và dãy $\{v_n\} \subset$ P-Eff sao cho $F(x_n) \preceq_C F(v_n) + c_n$.

Ta chỉ cần chứng minh (b), vì (a) được lập luận tương tự. Nếu $\{x_n\}$ là một dãy e-cực tiểu tổng quát tương ứng với vectơ v của bài toán (SOP), rõ ràng ta có các kết quả trên với $c_n = \varepsilon_n e$. Ngược lại, cho $\{c_n\} \subset C$ hội tụ về 0_Y, $\{x_n\} \subset M, \{v_n\} \subset$ P-Eff thỏa mãn $F(x_n) \preceq_C F(v) + c_n$, khi đó ta có:

$$F(x_n) \subset F(v) + c_n - C,\ \forall n \qquad (1)$$

Vì $(e - \text{int}\, C)$ là một lân cận của gốc tọa độ trong Y, nên tồn tại một $\delta > 0$ sao cho $\delta B(0_Y, 1) \subset (e - \text{int}\, C)$, trong đó $B(0_Y, 1)$ là hình cầu đơn vị đóng.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $c_n \in \|c_n\| B(0_Y, 1) \subset \|c_n\| \delta^{-1}(e - K) = \|c_n\| \delta^{-1} e - C$. Bằng cách lấy $\varepsilon_n = \|c_n\| \delta^{-1}$, thì $\{\varepsilon_n\}$ hội tụ về 0 và $c_n \in \varepsilon_n e - C$. Từ (1) suy ra $F(x_n) \subset F(v) + \varepsilon_n e - C$, tức là, $F(x_n) \preceq_C F(v) + \varepsilon_n e$. Vì vậy, $\{x_n\}$ là một dãy e-minimizing tổng quát tương ứng với v của bài toán (SOP).

Sau đây, cho $e \in \text{int C}$ cố định. Sau đó, theo Mệnh đề 3.1, ta chỉ cần viết dãy cực tiểu (tổng quát) thay vì dãy e-cực tiểu (tổng quát).

Định nghĩa 3.9: Bài toán (SOP) được gọi là

(a) Đặt chỉnh tại một nghiệm hữu hiệu Pareto v, nếu với mỗi dãy cực tiểu $\{x_n\}$ tương ứng với v đối với bài toán (SOP), ta có $x_n \to v$;

(b) Đặt chỉnh tổng quát tại một nghiệm hữu hiệu Pareto v nếu mọi dãy cực tiểu tương ứng với v đối với bài toán (SOP) có một dãy con hội tụ đến một số nghiệm hữu hiệu Pareto x^* sao cho $x^* \sim_C v$ theo nghĩa là $F(x^*) \sim_C F(v)$;

(c) Đặt chỉnh toàn cục nếu mọi dãy cực tiểu tổng quát đối với bài toán (SOP) có một dãy con hội tụ đến một số nghiệm hữu hiệu Pareto x^*.

Sau đây, ta nhắc lại các khái niệm về đặt chỉnh Tykhonov đối với một bài toán tối ưu vô hướng.

Định nghĩa 3.10: Cho $\phi: X \to \mathbb{R}$ là một hàm có giá trị thực (Dontchev, A.L., Zolezzi, T., 1993). Xem xét bài toán tối ưu vô hướng sau:

$$\mathrm{OP}(M,\phi) \ \text{minimize}\ \phi(x) \quad \text{s.t. } x \in M$$

(a) $\mathrm{OP}(M,\phi)$ được gọi là đặt chỉnh Tykhonov nếu và chỉ nếu ϕ có một điểm tối tiểu duy nhất $\bar{x}$ trên M và mọi dãy $\{x_n\} \subset M$ sao cho $\phi(x_n) \to \inf\phi(M)$ (được gọi là dãy cực tiểu) hội tụ đến $\bar{x}$;

(b) $\mathrm{OP}(M,\phi)$ được gọi là đặt chỉnh Tykhonov tổng quát nếu và chỉ nếu tập hợp tất cả các điểm tối tiểu của $\mathrm{OP}(M,\phi)$ không rỗng và mọi dãy cực tiểu $\{x_n\} \subset M$ đều có một số dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến một điểm tối tiểu của $\mathrm{OP}(M,\phi)$.

Bổ đề 3.3: Cho M là một tập compact và ϕ là giả liên tục dưới trên M (Morgan, J., Scalzo, V., 2006) [13]. Khi đó, bài toán $\mathrm{OP}(M,\phi)$ được gọi là đặt chỉnh Tykhonov tổng quát. Hơn nữa, nếu ϕ có một điểm tối tiểu duy nhất $\bar{x}$ trên M, thì $\mathrm{OP}(M,\phi)$ được gọi là đặt chỉnh Tykhonov.

Sau đây, chúng tôi trình bày một số đặc trưng cho nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (SOP) thông qua hàm Gerstewitz tổng quát.

Bổ đề 3.4: Giả sử $F: M \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}(-C)}(Y) \cap \mathcal{P}_{\mathrm{bd}(-C)}(Y)$. Nếu v là một nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (SOP), thì các phát biểu sau đây là đúng:

(a) $G_e(F(x),F(v)) \geq 0$ với mọi $x \in M$;

(b) Với mọi $x \in M, G_e\big(F(x),F(v)\big) = 0$ khi và chỉ khi $x \sim_C v$.

Chứng minh (a) Giả sử ngược lại rằng tồn tại một vectơ $x \in M$ và một số thực $r < 0$ sao cho $G_e(F(x),F(v)) < r$. Từ Bổ đề 3.2, ta có:

$F(x) \subset re + F(v) - \mathrm{int}C \subset F(v) - \mathrm{int}C.$

Vì v là một nghiệm hữu hiệu Pareto của (SOP), $F(v) \subset F(x) - C$. Do đ:

$F(x) - C \subset F(x) - \mathrm{int}C.$ (2)

Vì $F: M \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}(-C)}(Y) \cap \mathcal{P}_{\mathrm{bd}(-C)}(Y), F(x) - C$ là đóng và khác với Y.

Điều này cùng với (2) dẫn đến mâu thuẫn vì $F(x) - \mathrm{int}C$ là tập mở.

(b) Giả sử $G_e(F(x),F(v)) = 0$. Khi đó, theo Bổ đề 3.2 (a), ta thu được $F(x) \subset F(v) - C$.

Vì $v \in$ P-Eff, ta có $F(v) \subset F(x) - C$.

Ngược lại, giả sử $F(x) \subset F(v) - C$và $F(v) \subset F(x) - C$. Từ $F(x) \subset F(v) - C$suy ra $G_e(F(x),F(v)) \leq 0$. Do (i), $G_e(F(x),F(v)) = 0$.

Bây giờ, sử dụng hàm Gerstewitz tổng quát để vô hướng hóa sự đặt chỉnh của bài toán (SOP).

Định lý 3.1: Giả sử $v \in$ P-Eff và $F: M \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}(-C)}(Y) \cap \mathcal{P}_{\mathrm{bd}(-C)}(Y)$. Khi đó, bài toán (SOP) là:

(a) Đặt chỉnh tổng quát tại v nếu và chỉ nếu bài toán $\mathrm{OP}(M, G_e(F(\cdot),F(v)))$ đặt chỉnh tổng quát Tykhonov;

(b) Đặt chỉnh tại v nếu và chỉ nếu bài toán $\mathrm{OP}(M, G_e(F(\cdot),F(v)))$ đặt chỉnh Tykhonov tại.

Chứng minh (a) Cho $\{x_n\}$ là một dãy thỏa mãn: $G_e(F(x_n),F(v)) \to \min_{x \in M} G_e(F(x),F(v)) = 0.$

Sau đó, theo Bổ đề 3.4 (a), tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ về 0 sao cho $G_e(F(x_n),F(v)) = \varepsilon_n$. Điều này có nghĩa là $F(x_n) \subset \varepsilon_n e + F(v) - C$, và do đó $\{x_n\}$ là một dãy cực tiểu tương ứng với v. Vì (SOP) đặt chỉnh tổng quát tại $v, \{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về một số nghiệm hữu hiệu Pareto $\bar{x}$, $\bar{x} \sim_C v$.

Theo Bổ đề 3.4, $\bar{x}$ là một điểm cực tiểu của bài toán $\mathrm{OP}(M, G_e(F(\cdot), F(v)))$.

Ngược lại, cho $\{x_n\}$ là một dãy tối thiểu tương ứng với v, khi đó có một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ về 0 sao cho $F(x_n) \subset \varepsilon_n e + F(v) - C$. Khi đó,

$$0 = \min_{x \in M} G_e(F(x), F(v)) \leq G_e(F(x_n), F(v)) \leq G_e(F(v) + \varepsilon_n e, F(v)) = \varepsilon_n.$$

Vì bài toán $\mathrm{OP}(M, G_e(F(\cdot), F(v)))$ đặt chỉnh tổng quát Tykhonov, nên $\{x_n\}$ có một dãy con hội tụ về một điểm tối tiểu x^* của $\mathrm{OP}(M, G_e(F(\cdot), F(v)))$. Do đó, theo Bổ đề 3.4 (b) ta có $F(x^*) \subset F(v) - C$ và $F(v) \subset F(x^*) - C$, hay tương đương $x^* \sim_C v$. Ta được điều cần chứng minh.

Tương tự, ta cũng chứng minh được cho phát biểu (b). Kết quả sau đây đóng vai trò quan trọng như một cầu nối giữa tính đặt chỉnh toàn cục của bài toán tối ưu tập và bài toán tối ưu vô hướng. Cho $A \subset M$,

$$\gamma_A : M \to \mathbb{R}, \gamma_A(x) = \inf_{a \in A} G_e(F(x), F(a)) \text{ với mọi } x \in M.$$

Định lý 3.2: Giả sử $F: M \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}(-C)}(Y) \cap \mathcal{P}_{\mathrm{bd}(-C)}(Y)$. Khi đó, bài toán (SOP) đặt chỉnh toàn cục nếu và chỉ nếu bài toán $\mathrm{OP}(M, \gamma_{\mathrm{P-Eff}})$ đặt chỉnh Tykhonov tổng quát.

Chứng minh: cho $\{x_n\}$ là một dãy số sao cho:

$$\gamma_{\mathrm{P-Eff}}(x_n) \to \inf_{x \in M} \gamma_{\mathrm{P-Eff}}(x) = 0.$$

Khi đó, tồn các dãy số $\{\delta_n\} \subset \mathbb{R}_+$hội tụ về 0, và $\{v_n\} \subset \gamma_{\text{P-Eff}}$ sao cho:

$$0 \leq G_e\big(F(x_n), F(v_n)\big) < \delta_n.$$

Bằng cách đặt $G_e\big(F(x_n), F(v_n)\big) = \varepsilon_n$, thì $\varepsilon_n \in [0, \delta_n)$ và $F(x_n) \subset F(v_n) + \varepsilon_n e - C$. Do đó, $\{x_n\}$ là một dãy cực tiểu tổng quát của bài toán (SOP), và do đó nó có một dãy con hội tụ đến một điểm $\bar{x} \in$ P-Eff, vì bài toán (SOP) đặt chỉnh toàn cục. Do đó, $\mathrm{OP}(M, \gamma_{\mathrm{P-Eff}})$ đặt chỉnh Tykhonov tổng quát, vì vectơ $\bar{x}$ cũng là một điểm cực tiểu của $\mathrm{OP}(M, \gamma_{\mathrm{P-Eff}})$.

Ngược lại, cho $\{x_n\}$ là một dãy cực tiểu tổng quát của (SOP). Khi đó, có một dãy số thực không âm $\{\varepsilon_n\}$ hội tụ về 0, và một dãy $\{v_n\} \subset$ P-Eff sao cho $F(x_n) \subset F(v_n) + \varepsilon_n e - C$. Khi đó,

$$\begin{aligned} 0 = \min_{x \in M} \gamma_{\text{P-Eff}}(x) &\leq \gamma_{\text{P-Eff}}(x_n) \\ &\leq G_e\big(F(x_n), F(v_n)\big) \\ &\leq G_e\big(F(v_n) + \varepsilon_n e, F(v_n)\big) \\ &= \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Do đó, $\{x_n\}$ là một dãy cực tiểu của $\mathrm{OP}(M, \gamma_{\mathrm{P-Eff}})$. Vì bài toán $\mathrm{OP}(M, \gamma_{\mathrm{P-Eff}})$ đặt chỉnh Tykhonov tổng quát, nên dãy $\{x_n\}$ có một dãy con hội tụ về một số điểm cực tiểu $\bar{x}$ của $\mathrm{OP}(M, \gamma_{\mathrm{P-Eff}})$. Do đó, tồn tại $\bar{v} \in$ P-Eff sao cho

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathrm{P-Eff}}(\bar{x}) &= \inf_{v \in \mathrm{P-Eff}} G_e(F(\bar{x}), F(v)) \\ &= G_e(F(\bar{x}), F(\bar{v})) = 0. \end{aligned}$$

Điều này kết hợp với Bổ đề 3.4 (b) suy ra rằng $\bar{x}$ cũng là một nghiệm hữu hiệu Pareto của (SOP), và do đó bài toán (SOP) đặt chỉnh toàn cục.

4. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, chúng tôi tập trung vào nghiên cứu tính chất đặt chỉnh cho các bài toán tối ưu tập liên quan đến quan hệ thứ tự tập hợp loại trên. Hàm Gerstewitz tổng quát cho các tập hợp liên quan đến quan hệ thứ tự tập và nghiên cứu một số tính chất của chúng. Mối liên hệ giữa các loại khái niệm đặt chỉnh cho một bài toán tối ưu tập với các khái niệm đặt chỉnh Tykhonov cho bài toán tối ưu vô hướng tương ứng đã được thiết lập trong một số điều kiện nhẹ nhàng. Cách tiếp cận và các kết quả đạt được là mới và khác với các kết quả đã có.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Anh, L., Duy, T., & Hien, D. (2020).

Stability of efficient solutions to set

optimization problems. *Journal of Global Optimization, 78*(3), 563–580.

[2] Crespi, G.P., Dhingra, M., & Lalitha, C.S. (2018). Pointwise and global well-posedness in set optimization: a direct approach. *Annals of Operations Research* 269(1-2), 149-166.

[3] Gutierrez, C., Jiménez, B., Miglierina, E., & Molho, E. (2015). Scalarization in set optimization with solid and nonsolid ordering cones. *Journal of Global Optimization 61*(3),525-552.

[4] Gutie´rrez, C., Miglierina, E., Molho, & E., Novo, V. (2012). Pointwise well-posedness in set optimization with cone proper sets. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75*(4), 1822–1833.

[5] Han, Y. (2019). Nonlinear scalarizing functions in set optimization problems. *Optimization,* 1-34.

[6] Han, Y., & Huang, N. J. (2017). Well-posedness and stability of solutions for set optimization problems. *Optimization 66*(1), 17-33.

[7] Hernández, E., & Rodríguez-Marín, L. (2007). Existence theorems for set optimization problems. *Nonlinear Anal, 67,* 1276-1736.

[8] Jahn, J., & Ha, T. X. D. (2011). New order relations in set optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications 148*(2), 209–236.

[9] Jime´nez, B., Novo, V., & V´ılchez, A. (2020). Six set scalarizations based on the oriented distance: properties and application to set optimization. *Optimization, 69*(3), 437-470.

[10] Khan, A. A., Tammer, C., & Zalinescu, C. (2016). *Set-valued optimization*. Springer-Verlag Berlin An, pp.765.

[11] Kuroiwa, D. (1998). The natural criteria in set-valued optimization. *RIMS Kokyuroku Kyoto Univ*, *1031*, 85-90.

[12] Long, X.J., & Peng, J. W. (2013). Generalized b-well-posedness for set optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications 157*(3), 612-623.

[13] Morgan, J., & Scalzo, V. (2006). Discontinuous but well-posed optimization problems. *SIAM Journal on Optimization 17*(3), 861–870.

[14] Mordukhovich, B. S. (2018). *Variational analysis and applications* (Vol. 30). Cham: Springer.

[15] Zhang, W. Y., Li, S. J., & Teo, K. L. (2009). Well-posedness for set optimization problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *71*(9), 3769-3778.