MỘT CHÚ Ý LIÊN QUAN TỚI PHIÊN BẢN NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI CỦA PHRAGMÉN-LINDELÖF

Bùi Lê Hương Thảo[1], *Hồ Duy Nguyên*[1], *Tạ Tiểu Mi*[1],
Trần Mạnh Tân[1], *Phan Huy Phúc*[1], *Phạm Văn Dược*[2]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh một kết quả về so sánh hàm điều hoà dưới với một hàm nửa liên tục trên. Sau đó, sử dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh một kết quả cải tiến về phiên bản nguyên lý cực đại của hàm điều hoà dưới của Phragmén-Lindelöf.

Từ khoá: *Hàm nửa liên tục trên, hàm điều hoà dưới, nguyên lý cực đại, tập cực, khả tích địa phương.*

1. Giới thiệu

Hàm điều hoà dưới là đối tượng nghiên cứu chính của lý thuyết thế vị. Đây là lớp hàm với yêu cầu tất yếu là nửa liên tục trên và khả tích địa phương nên có phạm vi rộng và có nhiều ứng dụng trong toán học và trong hệ động lực. Trong [2, 5], các tác giả đã thiết lập các kết quả kinh điển về nguyên lý cực đại của hàm điều hoà dưới. Đây là những tính chất quan trọng của lớp hàm điều hoà dưới, tương tự tính chất cùng tên của các lớp hàm tốt hơn là lớp hàm lồi và hàm chỉnh hình.

Trong bài báo này, chúng tôi tiếp tục tìm hiểu một số tính chất của hàm điều hoà dưới. Đầu tiên, trong Định lý 3.1, chúng tôi chứng minh kết quả về so sánh hàm điều hoà dưới với hàm nửa liên tục trên trội hơn. Hơn nữa, trong chứng minh định lý đó, chúng tôi cũng chỉ ra kết quả cải tiến là limsup của hàm điều hoà dưới đạt được ngoài một tập có độ đo Lebesgue bằng không. Tiếp đến, sử dụng kết quả của Định lý 3.1, chúng tôi đưa ra kết quả cải tiến về phiên bản nguyên lý cực đại của hàm điều hoà dưới của Phragmén-Lindelöf khi giảm nhẹ yêu cầu của hàm v trong phiên bản gốc từ nhận giá trị hữu hạn sang không đồng nhất với dương vô cùng (Định lý 3.2).

2. Kiến thức chuẩn bị

Trong mục này, chúng tôi sẽ nhắc lại một số khái niệm và kết quả để chuẩn bị cho việc trình bày các kết quả chính ở mục sau. Liên quan chi tiết hơn tới các khái niệm này có thể xem thêm trong các tài liệu [1, 2, 3, 5].

2.1. Một số ký hiệu

Ta gọi $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức hoặc mặt phẳng phức, $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ là mặt phẳng phức mở rộng. Ta chú ý rằng $\mathbb{C}_\infty$ đồng phôi với mặt cầu Riemann (là mặt cầu tâm $I(0,0,\frac{1}{2})$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$) trong không gian $\mathbb{R}^3$. Mà mặt cầu trong không gian $\mathbb{R}^3$ là một tập compact nên $\mathbb{C}_\infty$ cũng là một tập compact. Cho $A \subset \mathbb{C}_\infty$, ta ký hiệu ∂A là biên thông thường của A trong $\mathbb{C}$ và $\partial_\infty A$ là biên trong $\mathbb{C}_\infty$. Như vậy, nếu A là tập bị chặn thì $\partial A = \partial_\infty A$, còn nếu A là tập không bị chặn thì $\partial_\infty A = \partial A \cup \{\infty\}$.

2.2. Miền

Một miền trong $\mathbb{C}$ hoặc trong $\mathbb{C}_\infty$ là một tập con khác rỗng, mở và liên thông.

2.3. Hàm nửa liên tục trên

Cho X là một không gian tô pô. Hàm $u: X \to [-\infty, \infty)$ được gọi là hàm nửa liên tục trên nếu tập $\{x \in X: u(x) < a\}$ là tập mở trong X với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Hàm $v: X \to (-\infty, \infty]$ được gọi là hàm nửa liên tục dưới nếu hàm $-v$ là hàm nửa liên tục trên.

2.4. Nhận xét

(a) Nếu $\{u_i: i \in I\}$ là họ các hàm nửa liên tục trên thì hàm $u = \inf\{u_i: i \in I\}$ cũng là hàm nửa liên tục trên. Thật vậy, lấy $a \in \mathbb{R}$, theo định nghĩa của inf, ta có:

$$\{x \in X: u(x) < a\} = \cup_{i\in I} \{x \in X: u_i(x) < a\}.$$

Do $\{x \in X: u_i(x) < a\}$ là các tập mở nên suy ra tập $\{x \in X: u(x) < a\}$ cũng là tập mở, tức là u là hàm nửa liên tục trên.

(b) Cho X là một không gian mêtric. Khi đó, u là hàm nửa liên tục trên trên X nếu và chỉ nếu với mọi $x \in X$, ta có:

$$\limsup_{y\to x} u(y) \le u(x). \quad (*)$$

Thật vậy:

- Giả sử u là hàm nửa liên tục trên. Lấy $x \in X$ và $\varepsilon > 0$. Ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $u(x) = -\infty$: Theo giả thiết, với mọi $n \ge 1$ ta có tập

$$A_n = \{y \in X: u(y) < -n\}$$

là tập mở trong X và hiển nhiên $x \in A_n$ với mọi $n \ge 1$. Vậy với mỗi $n \ge 1$ tồn tại $r_n > 0$ sao cho hình cầu $B(x, r_n) \subset A_n$. Điều này suy ra

$$\limsup_{y\to x} u(y) = -\infty = u(x).$$

+ Trường hợp 2: $u(x) \in \mathbb{R}$. Khi đó, chọn $a = u(x) + \varepsilon$. Theo giả thiết tập

$$A = \{y \in X: u(y) < a\}$$

là tập mở trong X và hiển nhiên $x \in A$. Do đó, tồn tại $r > 0$ sao cho hình cầu $B(x, r) \subset A$, tức là

$$u(y) < u(x) + \varepsilon, \quad \big(\forall y \in B(x, r)\big).$$

Điều này tương đương với

$$\limsup_{y\to x} u(y) \le u(x).$$

- Giả sử hàm u thoả mãn $(*)$. Lấy $a \in \mathbb{R}$. Ta cần chứng minh tập

$$A = \{y \in X: u(y) < a\}$$

là tập mở trong X. Thật vậy: Lấy $x \in A$. Suy ra $u(x) < a$. Đặt $\varepsilon = a - u(x) > 0$. Theo giả thiết, tồn tại $r > 0$ sao cho

$$u(y) < u(x) + \varepsilon, \big(\forall y \in B(x, r)\big).$$

Điều này tương đương với $u(y) < a$ với mọi $y \in B(x, r)$, tức là $B(x, r) \subset A$.

Vậy A là tập mở trong X.

2.5. Hàm điều hoà dưới

Cho U là một tập con mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u: U \to [-\infty, \infty)$ được gọi là hàm điều hoà dưới nếu u là hàm nửa liên tục trên và thoả mãn với mọi $\bar{\Delta}(\omega, r) = \{z \in U: |z - \omega| \leq r\} \subset U$, ta có:

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\omega + \rho e^{it}\big)dt. \quad (0 \leq \rho < r) \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) được gọi là bất đẳng thức trung bình dưới. Hàm $v: X \to (-\infty, \infty]$ được gọi là hàm điều hoà trên nếu hàm $-v$ là hàm điều hoà dưới.

2.6. Nhận xét

(a) Nếu $\{u_k: k \in I\}$ là họ các hàm điều hoà dưới thì hàm $u = \inf\{u_k: k \in I\}$ cũng là hàm điều hoà dưới. Thật vậy, theo Nhận xét 2.2 thì u là hàm nửa liên tục trên. Ta sẽ chỉ ra u thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới. Lấy $\bar{\Delta}(\omega, r) \subset U$, với mọi $k \in I$ ta có:

$$\begin{aligned} u_k(\omega) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_k\big(\omega + re^{it}\big)dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\omega + re^{it}\big)dt. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\omega + re^{it}\big)dt.$$

Vậy u là hàm điều hoà dưới.

(b) Ta sẽ biến đổi một dạng khác của bất đẳng thức trung bình dưới (1) như sau: Nhân ρ vào hai vế của (1) và lấy tích phân theo ρ từ 0 đến r ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^r \rho u(w)d\rho \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} u(w + \rho e^{it})\rho dt d\rho$$

$$\Leftrightarrow u(w) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \int_0^{2\pi} u\big(w + \rho e^{it}\big)\rho dt d\rho = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\Delta(w,r)} u(z)dA(z).$$

Vậy ta có dạng khác của bất đẳng thức trung bình dưới là

$$u(w) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(w,r)} u(z) dA(z). \qquad (2)$$

Sau đây ta nhắc lại nguyên lý cực đại của hàm điều hoà dưới.

Định lý 2.1 (Nguyên lý cực đại) [2]: Cho u là một hàm điều hoà dưới trên miền D trong $\mathbb{C}$.

i. Nếu u đạt cực đại toàn cục trên D thì u là hàm hằng trên D.

ii. Nếu $\limsup_{z \to w} u(z) \leq 0$ với mọi $w \in \partial_\infty D$ thì $u \leq 0$ trên D.

Trong phiên bản nguyên lý cực đại ở trên, ở mệnh đề (ii), ta xét limsup chung cho cả điểm biên hữu hạn và điểm biên vô hạn (trong trường hợp miền D không bị chặn). Phiên bản nguyên lý cực đại sau đây của Phragmén-Lindelöf sẽ tách điểm biên vô hạn xét riêng khi hàm u không tăng quá nhanh tại điểm biên vô cực.

Định lý 2.2 (Nguyên lý cực đại phiên bản Phragmén-Lindelöf) [2]: Cho u là hàm điều hoà dưới trên miền không bị chặn D trong $\mathbb{C}$ thoả mãn:

$$\limsup_{z \to w} u(z) \leq 0 \qquad (w \in \partial D).$$

Giả sử tồn tại một hàm điều hoà trên giá trị hữu hạn v trên D sao cho

$$\liminf_{z \to \infty} v(z) \geq \infty \qquad v\text{à} \qquad \limsup_{z \to \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0.$$

Khi đó, $u \leq 0$ trên D.

3. Kết quả chính

Kết quả sau đây là một tính chất của hàm điều hoà dưới khi so sánh với hàm nửa liên tục trên trội hơn. Kết quả chứng minh cho thấy limsup của hàm điều hoà dưới đạt được ngoài một tập có độ đo Lebesgue bằng không.

Định lý 3.1: *Cho u là hàm điều hoà dưới trên tập mở U trong $\mathbb{C}$ và v là hàm nửa liên tục trên trên U và thoả mãn $u \leq v$ hầu khắp nơi. Khi đó $u \leq v$ trên U.*

Chứng minh: Đặt

$$M = \{z \in U : u(z) \leq v(z)\}.$$

Theo giả thiết ta có $dA(U \setminus M) = 0$, ở đây dA là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{C}$.

Trước hết, ta sẽ chứng minh với mọi $x \in U$ ta có:

$$u(x) = \limsup_{M \ni z \to x} u(z). \qquad (3)$$

Thật vậy: Bởi định nghĩa limsup và hàm u là hàm nửa liên tục trên nên ta có

$$\limsup_{M \ni z \to x} u(z) \leq \limsup_{z \to x} u(z) \leq u(x). \qquad (4)$$

Mặt khác, xét đĩa đóng $\bar{\Delta}(x,r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - x| \leq r\} \subset U$ với $r > 0$, theo bất đẳng thức trung bình dưới (2) ta có:

$$\begin{aligned} u(x) \quad &\leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(x,r)} u(z) dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(x,r)\cap M} u(z) dA(z) + \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(x,r)\cap(U\setminus M)} u(z) dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(x,r)\cap M} u(z) dA(z) \leq \sup_{z\in\Delta(x,r)\cap M} u(z). \end{aligned}$$

Cho $r \to 0^+$ ta có

$$u(x) \leq \lim_{r\to 0} \left[\sup_{z\in\Delta(x,r)\cap M} u(z) \right] \leq \limsup_{M\ni z\to x} u(z). \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra

$$u(x) = \limsup_{M\ni z\to x} u(z).$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $u \leq v$ trên U. Thật vậy: Lấy $x_0 \in U$, theo chứng minh trên và giả thiết của định lý ta có:

$$u(x_0) = \limsup_{M\ni z\to x_0} u(z) \leq \limsup_{M\ni z\to x_0} v(z) \leq v(x_0).$$

Vậy định lý được chứng minh.

Trong phiên bản nguyên lý cực đại của Phragmén-Lindelöf cho miền không bị chặn, điều kiện hội tụ tới điểm biên vô hạn được so sánh với tốc độ hội tụ của một hàm điều hoà trên v với giá trị hữu hạn trên miền D. Kết quả sau đây của chúng tôi sẽ mở rộng một chút với giả thiết của hàm v là không đồng nhất với $+\infty$.

Định lý 3.2: *Cho u là hàm điều hoà dưới trên miền không bị chặn D trong $\mathbb{C}$ thoả mãn:*

$$\mathit{limsup}_{z\to w}\, u(z) \leq 0 \quad (w \in \partial D) \quad (a).$$

Giả sử tồn tại một hàm điều hoà trên v trên D, v $\not\equiv +\infty$ sao cho

$$\mathit{liminf}_{z\to\infty}\, v(z) \geq \infty \quad (b) \qquad v\text{à} \qquad \mathit{limsup}_{z\to\infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0. \quad (c)$$

Khi đó, u ≤ 0 trên D.

Chứng minh:

- Trước hết ta xét trường hợp $v > 0$ trên D:

Lấy $\varepsilon > 0$ tuỳ ý. Từ điều kiện (c) ta suy ra tồn tại $R > 0$ sao cho

$$\frac{u(z)}{v(z)} \leq \varepsilon \quad (z \in D \; v\text{à} \; |z| > R). \quad (d)$$

Đặt

$$u_\varepsilon = u - \varepsilon v$$
$$= \{z \in D: v(z) < +\infty\}.$$

Khi đó, ta có u_ε là hàm điều hoà dưới trên D và với mọi $\xi \in \partial_\infty D$ ta có:

$$\limsup_{z\to\xi} u_\varepsilon(z) = \begin{cases} \leq 0 \quad n\acute{ế}u \;\; \xi \in \partial D \quad (do \; (a) \; v\text{à} \; v > 0) \\ \leq 0 \quad n\acute{ế}u \; \xi = \infty \quad \big(do \; (d)\big). \end{cases}$$

Theo Định lý 2.1 (ii) ta suy ra $u_\varepsilon \leq 0$ trên D. Cho $\varepsilon \downarrow 0$ ta suy ra $u \leq 0$ trên M.

Theo Mệnh đề 1.1.5 trong [1] ta suy ra $dA(D \setminus M) = 0$. Theo công thức (3) trong chứng minh Định lý 3.1, với mọi $z \in D$ ta có:

$$u(z) = \limsup_{M\ni w\to z} u(w) \leq 0 \quad (do \; u \leq 0 \; trên \; M).$$

Vậy $u \leq 0$ trên D.

- Bây giờ ta xét trường hợp hàm v như trong định lý:

Lấy $\tau > 0$. Đặt $F_\tau = \{z \in D: u(z) \geq \tau\}$. Do u là hàm nửa liên tục trên nên F_τ là một tập đóng trong D. Vì v là hàm nửa liên tục dưới và thoả mãn (b) nên suy ra v bị chặn dưới trên F_τ. Do đó, nếu cần có thể cộng thêm một hằng số, ta có thể giả sử rằng $v > 0$ trên F_τ.

Đặt $V = \{z \in D: v(z) > 0\}$. Do v là hàm nửa liên tục dưới nên V là một tập mở trong D. Khi đó, với $\xi \in \partial V$ ta có:

$$\limsup_{z\to\xi}(u(z) - \tau) \leq \begin{Bmatrix} \limsup\limits_{z\to\xi} u(z), n\acute{ế}u \; \xi \in \partial D \\ u(\,\xi) - \tau, n\acute{ế}u \; \xi \in D \cap \partial V \end{Bmatrix} \leq 0.$$

Áp dụng trường hợp trên cho hàm $u - \tau$ trên tập mở V ta suy ra $u - \tau \leq 0$ trên V. Vì $F_\tau \subset V$ nên suy ra $u = \tau$ trên F_τ. Và hiển nhiên $u \leq \tau$ trên $D \setminus F_\tau$. Tóm lại, ta có $u \leq \tau$ trên D. Cho $\tau \downarrow 0$ ta sẽ nhận được $u \leq 0$ trên D.

Vậy định lý được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. [Hie] P. H. Hiep, *Singularities of plurisubharmonic functions*, Pub. Hou. Sci. and Tec. 2016.

[2]. [Ran] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex plane*, Cambridge University Press, 1995.

[3]. [Kli] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[4]. [Nam] L. Q. Nam, *Analysis of Monge-Ampère Equations*, American Mathematical Society, 2024.

[5]. [Arm] D. H. Armitage, Stephen J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer-Verlag London Limited, 2001.

A NOTE ON THE PHRAGMÉN-LINDELÖF'S MAXIMUM PRINCIPLE VERSION

Bui Le Huong Thao[1], Ho Duy Nguyen[1], Ta Tieu Mi[1],
Tran Manh Tan[1], Phan Huy Phuc[1], Pham Van Duoc[2]

ABSTRACT

The aim of this paper is to prove the result of the comparison of the subharmonic functions with the semi-continuous functions. Using this result, we improve the Phragmén-Lindelöf version of maximum principle of subharmonic functions.

Key words: *Semi-continous functions, subharmonic functions, maximum principle, polar set, local integration.*

[1]Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng; [2]Trường Đại học Duy Tân;

Email: huongthaost1@gmail.com