

VỀ TÍNH LỖI CHẶT CỦA MỘT SỐ KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

Nguyễn Tấn Sự¹ Nguyễn Gia Vương²

TÓM TẮT

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số tính chất lỗi chặt của không gian tuyến tính định chuẩn. Một số ví dụ minh họa về tính chất lỗi chặt được trình bày trong bài báo này.

Từ khóa: Lỗi chặt (strictly convex), không gian định chuẩn (normed spaces).

1. Đặt vấn đề

Trong không gian \mathbb{R}^2 với chuẩn Euclide thì hình cầu đơn vị, đóng, được biểu diễn hình học là hình tròn tâm $O(0,0)$, bán kính bằng $R = 1$. Khi đó, với hai điểm A, B nằm trên biên của hình tròn thì trung điểm M của đoạn thẳng AB không nằm trên biên. Tuy nhiên, điều này không còn đúng đối với chuẩn max trên \mathbb{R}^2 . Có thể giải thích được: về ý nghĩa hình học thì biên của “hình cầu đơn vị” trong \mathbb{R}^2 là đường viền của hình vuông với các đỉnh là $A(1,1), B(1,-1), C(-1,1), D(-1,-1)$. Do đó cả 4 đoạn thẳng này đều nằm trên biên của “hình cầu”.

Để khái quát kết quả trên, người ta giới thiệu một khái niệm về không gian định chuẩn lỗi chặt.

2. Nội dung

2.1. Không gian định chuẩn lỗi chặt

2.1.1. Định nghĩa

Cho một không gian vector thực (hoặc phức) X với chuẩn $\|\cdot\|$. Ta nói rằng $(X, \|\cdot\|)$ là không gian lỗi chặt (strictly convex) nếu thỏa mãn điều kiện sau:

Với mọi $x, y \in X$ sao cho $\|x\| = \|y\| = 1$ và $x \neq y$, thì

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Nói cách khác, trung điểm của hai điểm phân biệt thuộc biên của hình cầu đơn vị luôn nằm bên trong hình cầu đơn vị. Điều này tương đương với việc biên của hình cầu đơn vị không chứa đoạn thẳng nào.

2.1.2. Các đặc trưng tương đương của không gian lỗi chặt

Một không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$ là lỗi chặt nếu và chỉ nếu thỏa mãn một trong bốn điều kiện sau:

i) **Điều kiện hình học:** Với mọi $x, y \in X$ sao cho $\|x\| = \|y\| = 1$ và $x \neq y$, ta có

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

ii) **Bất đẳng thức Minkowski nghiêm ngặt:** Với mọi $x, y \in X$, ta có

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Điều này có nghĩa là chuẩn $\|\cdot\|$ thỏa mãn bất đẳng thức Minkowski một cách nghiêm ngặt.

iii) **Điều kiện hàm lồi chặt:** Chuẩn $\|\cdot\|$ là hàm lồi chặt,

nghĩa là với mọi $x, y \in X$, thì $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|$ với $\lambda \in (0, 1)$.

iv) **Biên hình cầu đơn vị không chứa đoạn thẳng:** Biên của hình cầu đơn vị (kí hiệu $B_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$) không chứa bất kỳ đoạn thẳng nào.

Nhận xét rằng: *Bốn đặc trưng trên là tương đương, nghĩa là nếu một trong các điều kiện trên thỏa mãn thì tất cả các điều kiện đều thỏa mãn.*

2.2. Một số ví dụ về không gian lồi chặt

Ví dụ 2.2.1: Không gian Euclide \mathbb{R}^n với chuẩn Euclide

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

có biên của hình cầu đơn vị trong \mathbb{R}^n không chứa đoạn thẳng nào. Vì vậy không gian này là lồi chặt.

Ví dụ 2.2.2: Không gian ℓ^p (các chuỗi có chuẩn p , trong đó $1 < p < \infty$) có chuẩn:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

là không gian lồi chặt. Điều này có thể chứng minh từ tính chất lồi chặt của chuẩn p -norm.

Ví dụ 2.2.3: Không gian $L^p[a, b]$ (trong đó $1 < p < \infty$) với chuẩn

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

là không gian lồi chặt. Điều này là một hệ quả của bất đẳng thức Minkowski và tính chất lồi chặt của hàm $t \mapsto |t|^p$ với $p > 1$.

Sau đây chúng tôi xem xét một số không gian không lồi chặt.

Mệnh đề 2.2.4: Không gian ℓ^1 không lồi chặt.

Không gian ℓ^1 là không gian các dãy $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ với chuẩn được định nghĩa bởi

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|, \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

với điều kiện $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$, tức là $x \in \ell^1$.

Chứng minh:

Trong ℓ^1 ta chọn: $x = (1, 0, 0, \dots)$, $y = (0, 1, 0, \dots)$.

Khi đó $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, vì:

$$\|x\|_1 = |1| + |0| + |0| + \dots = 1, \quad \|y\|_1 = |0| + |1| + |0| + \dots = 1.$$

Hơn nữa trung điểm của x và y :

$$\frac{x+y}{2} = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, 0, 0, \dots \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right).$$

Do đó:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_1 = \left| \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} \right| + |0| + |0| + \dots = 1.$$

Như vậy trung điểm $\frac{x+y}{2}$ nằm trên biên của hình cầu đơn vị B_1 , tức là $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_1 = 1$, và nó là một điểm trên đoạn thẳng nối giữa x và y . Vì vậy, ℓ^1 không lồi chặt.

Câu hỏi đặt ra ở đây là: Có thể trang bị cho ℓ^1 một chuẩn $\|\cdot\|$ sao cho $(\ell^1, \|\cdot\|)$ là lồi chặt. Mệnh đề sau cho chúng ta kết quả này.

Mệnh đề 2.2.5: Trên không gian ℓ^1 xét chuẩn

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Khi đó $(\ell^1, \|\cdot\|)$ là lồi chặt.

Chứng minh:

Trong không gian ℓ^1 ta lấy bất kỳ $x, y \in \ell^1$ sao cho $x \neq y$ và $\|x\| = \|y\| = 1$. Khi đó

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = 1,$$

$$\|y\| = \|y\|_1 + \|y\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} = 1.$$

Do đó:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_1 + \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n+y_n}{2} \right| + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n+y_n}{2} \right|^2}.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Minkowski:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n+y_n}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \right) = \frac{1}{2} (\|x\|_1 + \|y\|_1).$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n+y_n}{2} \right|^2} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} \right) = \frac{1}{2} (\|x\|_2 + \|y\|_2).$$

Vi vậy

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} (\|x\|_1 + \|y\|_1). \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $x = \lambda y$. Mà $x \neq y$ và $\|x\| = \|y\| = 1$ nên $x = -y$. Thay vào (1), ta được

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \left\| \frac{-y+y}{2} \right\| = 0.$$

$$\frac{1}{2} (\|x\| + \|y\|) = \frac{1}{2} (\| -y \| + \|y\|) = \|y\| = 1.$$

Hiển nhiên dấu đẳng thức không thể xảy ra, hay nói một cách khác

với mọi $x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1$ thì $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$.

Vậy ℓ^1 với chuẩn đã cho là một không gian lồi chặt.

Mệnh đề trên cho thấy ta đã trang bị một chuẩn phù hợp để không gian ℓ^1 trở thành không gian lồi chặt.

Mệnh đề 2.2.6: Không gian c_∞ không là không gian lồi chặt.

Chứng minh:

Không gian c_∞ là không gian các dãy số có hữu hạn phần tử khác 0 được xác định bởi chuẩn

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Bây giờ trong c_∞ ta chọn:

$$x = (1, 1, 0, \dots), \quad y = (0, 1, 0, \dots).$$

Khi đó $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, vì:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|1|, |1|, |0|, \dots\} = 1, \quad \|y\|_\infty = \sup\{|0|, |1|, |0|, \dots\} = 1.$$

Hơn nữa trung điểm của x và y :

$$\frac{x+y}{2} = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{1+1}{2}, 0, 0, \dots\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, \dots\right).$$

Do đó:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \sup\left\{\left|\frac{1}{2}\right|, |1|, |0|, |0|, \dots\right\} = 1.$$

Vậy c_∞ không là không gian lồi chặt. Tuy nhiên c_∞ sẽ là không gian định chuẩn lồi chặt nếu ta trang bị chuẩn:

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Mệnh đề 2.2.7: Không gian $L^1[0; 1]$ không lồi chặt.

Chứng minh :

Không gian $L^1[0; 1]$ là không gian các hàm số xác định trên $[0; 1]$ và được định nghĩa bởi chuẩn

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx,$$

với điều kiện $\int_0^1 |f(x)| dx < +\infty$.

Xét hai hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Hiển nhiên $f \neq g$, ngoài ra:

$$\|f\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |2| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |0| dx = 1, \quad \|g\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |0| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |2| dx = 1.$$

Mặt khác trung điểm của f và g là hàm số:

$$\frac{f+g}{2} = \frac{f(x)+g(x)}{2} = \begin{cases} \frac{2+0}{2}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{0+2}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Hay $\frac{f(x)+g(x)}{2} \equiv 1$, với mọi $x \in [0; 1]$.

Do đó:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_1 = \int_0^1 |1| dx = 1.$$

Như vậy trung điểm của f và g nằm trên biên của hình cầu $B(0,1)$. Tương tự kết quả của không gian ℓ^1 . Từ đó ta cũng có thể trang bị một chuẩn sao cho không gian $L^1[0; 1]$ là không gian lồi chặt.

Mệnh đề 2.2.8: Trên không gian $L^1[0; 1]$ xét chuẩn

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)| dx + \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

Khi đó không gian $L^1[0; 1]$ là lồi chặt.

Chứng minh:

Chọn hai hàm số $f, g \in L^1[0; 1]$ sao cho $f \neq g$ và $\|f\| = \|g\| = 1$, nghĩa là

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)| dx + \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} = 1,$$

$$\|g\| = \|g\|_1 + \|g\|_2 = \int_0^1 |g(x)| dx + \sqrt{\int_0^1 |g(x)|^2 dx} = 1.$$

Do đó trung điểm của f và g có chuẩn

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f+g}{2} \right\| &= \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_1 + \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_2 \\ &= \int_0^1 \left| \frac{f(x)+g(x)}{2} \right| dx + \sqrt{\int_0^1 \left| \frac{f(x)+g(x)}{2} \right|^2 dx}. \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_1 &= \int_0^1 \left| \frac{f(x)+g(x)}{2} \right| dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (\|f\|_1 + \|g\|_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 \left| \frac{f(x)+g(x)}{2} \right|^2 dx} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 |g(x)|^2 dx} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\|f\|_2 + \|g\|_2). \end{aligned}$$

Vì vậy:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) + \frac{1}{2} (\|f\|_1 + \|g\|_2) = 1. \quad (2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $f = \lambda g$, mà $f \neq g$ và $\|f\| = \|g\| = 1$ nên $f = -g$. Thay vào (2), ta thấy rằng dấu đẳng thức không thể xảy ra.

Vì vậy với mọi $f \neq g$, $\|f\| = \|g\| = 1$ thì

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\| < 1.$$

Do đó không gian $L^1[0; 1]$ với chuẩn đã cho là không gian lồi chặt.

Mệnh đề 2.2.9: Không gian $C_{[0;1]}$ (Không gian các hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$) với chuẩn max

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0;1]} |f(x)|$$

không là không gian lồi chặt.

Chứng minh:

Xét hai hàm số thuộc $C_{[0;1]}$

$$f(x) \equiv 1, \quad g(x) = 2x - 1$$

Hiển nhiên $f \neq g$ và $\|f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty} = 1$ vì

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0;1]} |1| = 1, \quad \|g\|_{\infty} = \max_{x \in [0;1]} |2x - 1| = 1.$$

Do đó trung điểm của f và g là hàm số

$$\frac{f+g}{2} = \frac{1+2x-1}{1} = x.$$

Khi đó

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{\infty} = \max_{x \in [0;1]} |x| = 1.$$

Vậy $C_{[0;1]}$ không là không gian lồi chặt. Do đó để không gian $C_{[0;1]}$ trở thành không gian định chuẩn lồi chặt, ta có thể trang bị chuẩn

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)| dx + \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã mở rộng tính lồi chặt cho các không gian không lồi chặt bằng cách trang bị cho những không gian này những chuẩn phù hợp. Kết quả này góp phần làm phong phú thêm công cụ nghiên cứu trong giải tích và lý thuyết không gian định chuẩn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. M. M. Day, *Strict convexity and smoothness of normed spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 78, No. 2 (Mar., 1955), pp. 516-528.
- [2]. J. Lindenstrauss, *On the extension of operators with a finite-dimensional range*, Illinois Journal of Mathematics, Vol. 8, No. 1 (Mar., 1964), pp. 48-60.
- [3]. R. C. James, *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 66, No. 1 (Jul., 1957), pp. 159-178.
- [4]. K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [5]. I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 171, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [6]. N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, London Mathematical Society Student Texts 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [7]. Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Vol. 1, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [8]. G. Birkhoff, *Orthogonality in metric spaces*, Duke Mathematical Journal, Vol. 1, No. 2 (Jun., 1935), pp. 169-172.

ON THE STRICTLY CONVEX PROPERTY OF SOME NORMED LINEAR SPACES

Nguyen Tan Su¹, Nguyen Gia Vuong²

ABSTRACT

In this paper, we present some properties of strictly convex normed linear spaces. Several illustrative examples of strict convexity are also provided in this article.

Keywords: *strictly convex, normed spaces.*



¹Khoa Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Email: ntsu@pdu.edu.vn

²Sinh viên lớp ĐHSP Toán K21, Trường Đại học Phạm Văn Đồng.