MỘT SỐ KẾT QUẢ TRÊN LỚP HÀM LỒI LÔGARIT

Ngô Thị Thu Ba[1], Võ Thị Thanh Giang[1], Ngô Thị Như Ý[1], Phan Huy Phúc[1], Nguyễn Trông[1], Vi Thế Hận[2]*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất cơ bản của lớp hàm lồi lôgarit, bao gồm các tiêu chuẩn đặc trưng, bất đẳng thức Jensen và cấu trúc nón lồi của tập các hàm lồi lôgarit. Trên cơ sở đó, bài báo thiết lập một số kết quả về tính lồi của các đại lượng trung bình luỹ thừa có trọng và trình bày một số ứng dụng trong hình học phẳng, đặc biệt liên quan đến các đa giác nội tiếp đường tròn. Các kết quả thu được cho thấy vai trò quan trọng của hàm lồi lôgarit trong việc mở rộng nhiều bất đẳng thức quen thuộc.

Từ khoá: *Hàm lồi, hàm lồi lôgarit, giải tích lồi, bất đẳng thức Jensen, trung bình luỹ thừa.*

1. Giới thiệu

Hàm lồi và các mở rộng của nó là một trong những đối tượng nghiên cứu quan trọng của giải tích hiện đại, có nhiều ứng dụng trong tối ưu hoá, bất đẳng thức, xác suất và hình học lồi. Trong số đó, lớp **hàm lồi lôgarit** và **hàm lõm lôgarit** đóng vai trò đặc biệt do vừa kế thừa được nhiều tính chất của hàm lồi, vừa cho phép xây dựng và khai thác hiệu quả các bất đẳng thức dạng tích. Các lớp hàm này đã được nghiên cứu trong nhiều công trình kinh điển của giải tích lồi và hình học lồi [1-3].

Một trong những công cụ cơ bản khi nghiên cứu hàm lồi lôgarit là bất đẳng thức Jensen, vốn cho phép chuyển các tính chất lồi của hàm số thành các bất đẳng thức hữu ích. Bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi lôgarit và lõm lôgarit không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn được áp dụng rộng rãi trong lý thuyết trung bình và các bài toán bất đẳng thức hình học [4, 5]. Ngoài ra, việc mô tả cấu trúc đại số và hình học của tập các hàm lồi lôgarit cũng là một vấn đề quan trọng trong giải tích lồi, liên quan chặt chẽ đến lý thuyết nón lồi [7].

Xuất phát từ những đánh giá trên, bài báo này nhằm trình bày một số kết quả liên quan đến lớp hàm lồi lôgarit theo hướng cơ bản và ứng dụng. Trước hết, chúng tôi hệ thống hóa một số kiến thức chuẩn bị cần thiết, bao gồm các tiêu chuẩn đặc trưng của hàm lồi lôgarit, bất đẳng thức Jensen tương ứng và chứng minh rằng họ các hàm lồi lôgarit trên một khoảng là một nón lồi. Trên cơ sở đó, bài báo nghiên cứu tính lồi của một số đại lượng trung bình có trọng và áp dụng các kết quả thu được để giải quyết một số bài toán hình học phẳng liên quan đến đa giác nội tiếp đường tròn và các bất đẳng thức hình học cổ điển.

Các kết quả trong bài báo góp phần làm rõ vai trò của hàm lồi lôgarit trong việc thống nhất cách tiếp cận đối với nhiều bài toán bất đẳng thức và hình học, đồng thời cung cấp thêm các ví dụ và ứng dụng minh họa cho lý thuyết này.

2. Kiến thức chuẩn bị

2.1. Hàm lồi lôgarit

Định nghĩa 2.1. Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ và hàm số $f: I \to (0, +\infty)$. Khi đó, ta có các định nghĩa sau đây:

- Hàm f được gọi là hàm lồi lôgarit (log-convex) nếu $\ln f$ là một hàm lồi trên I;

- Hàm f được gọi là hàm lõm lôgarit (log-concave) nếu $-\ln f$ là một hàm lồi trên I.

Sau đây ta sẽ đưa ra các điều kiện trực tiếp của các hàm lồi lôgarit và lõm lôgarit.

Nhận xét 2.2. Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ và hàm số $f: I \to (0, +\infty)$. Khi đó, ta có

a) Hàm f là hàm lồi lôgarit nếu và chỉ nếu với mọi $x, y \in I$ và với mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y)] \le [f(x)]^{1-\lambda}[f(y)]^{\lambda}.$$

b) Hàm f là hàm lõm lôgarit nếu và chỉ nếu với mọi $x, y \in I$ và với mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y)] \ge [f(x)]^{1-\lambda}[f(y)]^{\lambda}.$$

Chứng minh: a) Hàm f là hàm lồi lôgarit nếu và chỉ nếu hàm $\ln f$ là hàm lồi. Điều này tương đương với mọi $x, y \in I$ và với mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$\ln f[(1-\lambda)x + \lambda y] \le (1-\lambda)\ln f(x) + \lambda \ln f(y)$$

$$\Leftrightarrow \ln f[(1-\lambda)x + \lambda y] \le \ln[(f(x))^{1-\lambda}(f(y))^{\lambda}]$$

$$\Leftrightarrow f[(1-\lambda)x + \lambda y] \le [f(x)]^{1-\lambda}[f(y)]^{\lambda}.$$

b) Hàm f là hàm lõm lôgarit nếu và chỉ nếu hàm $-\ln f$ là hàm lồi. Điều này tương đương với mọi $x, y \in I$ và với mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$-\ln f[(1-\lambda)x + \lambda y] \le (1-\lambda)(-\ln f(x)) + \lambda(-\ln f(y))$$

$$\Leftrightarrow -\ln f[(1-\lambda)x + \lambda y] \le -\ln[(f(x))^{1-\lambda}(f(y))^{\lambda}]$$

$$\Leftrightarrow f[(1-\lambda)x + \lambda y] \ge [f(x)]^{1-\lambda}[f(y)]^{\lambda}.$$

2.2. Bất đẳng thức Jensen đối với hàm lồi lôgarit

Định lý 2.3. Giả sử $f:(a,b) \to (0, +\infty)$ là một hàm lồi lôgarit. Cho $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$ và các trọng số $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \ge 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\lambda_i}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \ldots = x_n$ hoặc $\ln f$ là hàm affine.

Chứng minh: Vì f là lồi lôgarit nên hàm $\varphi = \ln f$ là hàm lồi trên (a,b). Áp dụng bất đẳng thức Jensen cổ điển cho hàm lồi φ, ta có

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \varphi(x_i).$$

Thay lại $\varphi = \ln f$, suy ra

$$\Leftrightarrow \ln f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\lambda_i}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\lambda_i}.$$

Theo bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi ta suy ra dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \ldots = x_n$ hoặc $\ln f$ là hàm affine.

2.3. Tiêu chuẩn lồi lôgarit của hàm khả vi lớp C^2

Định lý 2.4. Cho $f : I \to (0,+\infty)$ là một hàm khả vi hai lần trên khoảng I. Khi đó, f là hàm lồi lôgarit nếu và chỉ nếu

$$f(x)f''(x) \ge (f'(x))^2, \forall x \in I.$$

Chứng minh: $(\Rightarrow)$ Giả sử f là hàm lồi lôgarit. Khi đó, $g = \ln f$ là hàm lồi. Hơn nữa, g là hàm khả vi hai lần. Từ đây ta suy ra $g''(x) \ge 0, \forall x \in I.$

Hay

$$\frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f(x)^2} \ge 0, \forall x \in I.$$

Vì $f(x)^2 > 0$ ta suy ra $f(x)f''(x) \ge (f'(x))^2.$

$(\Leftarrow)$ Ngược lại, giả sử $f(x)f''(x) \ge (f'(x))^2, \forall x \in I.$

Khi đó ta có

$$g''(x) = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{f(x)^2} \ge 0, \forall x \in I.$$

Suy ra $g = \ln f$ là hàm lồi trên I, và do đó f là hàm lồi lôgarit.

Sau đây ta sẽ chỉ ra rằng họ các hàm lồi lôgarit trên khoảng I là một nón lồi. Trước hết ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 2.5. Cho $a, b, c, d > 0$ và $\alpha, \beta \geq 0$ sao cho $\alpha + \beta = 1$. Khi đó, ta có

$$a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta \leq (a+c)^\alpha (b+d)^\beta.$$

Chứng minh: Ta có

$$a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta \leq (a+c)^\alpha (b+d)^\beta$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{c}{a}\right)^\alpha \left(\frac{d}{b}\right)^\beta \leq \left(1 + \frac{c}{a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{d}{b}\right)^\beta.$$

Đặt $x = \frac{c}{a}, y = \frac{d}{b}$. Ta có $x, y > 0$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha (1+y)^\beta - x^\alpha y^\beta \geq 1.$$

Xét hàm số

$$f(x, y) = (1+x)^\alpha (1+y)^\beta - x^\alpha y^\beta,$$

trên miền $D = \{(x, y): x > 0, y > 0\}$. Có thể kiểm tra rằng hàm số $f(x, y)$ đạt cực tiểu toàn cục tại các điểm $(x, x), x > 0$ và giá trị cực tiểu là $f(x, x) = 1$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Định lý 2.6. Cho $I \subset \mathbb{R}$ là một khoảng. Ta kí hiệu $LC(I)$ là họ tất cả các hàm lồi lôgarit xác định trên I. Khi đó, tập $LC(I)$ là một nón lồi, tức là $\forall f, g \in LC(I), \forall a, b \geq 0$ ta có

$$af + bg \in LC(I).$$

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh $af \in LC(I)$. Thật vậy, $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$ ta có

$$af[(1-t)x + ty] \leq af(x)^{1-t} f(y)^t = [af(x)]^{1-t} [af(y)]^t.$$

Vậy $af \in LC(I)$.

Bây giờ ta chứng minh $f + g \in LC(I)$. Từ tính lồi lôgarit của các hàm f, g và áp dụng Bổ đề 2.5 ta có

$$\begin{aligned} (f+g)[(1-t)x + ty] &= f[(1-t)x + ty] + g[(1-t)x + ty] \\ &\leq [f(x)]^{1-t} [f(y)]^t + [g(x)]^{1-t} [g(y)]^t \\ &\leq [f(x) + g(x)]^{1-t} [f(y) + g(y)]^t. \end{aligned}$$

Kết hợp các kết quả ở trên ta suy ra tập $LC(I)$ là một nón lồi.

3. Kết quả chính

3.1. Tính lồi của các đại lượng trung bình có trọng

Định lý 3.2. Cho $x = (x_1, \ldots, x_n)$ với $x_k > 0, k = 1, \ldots, n$ và $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ với $\lambda_k > 0, k = 1, \ldots, n$ và $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Khi đó, ta có các hàm $t \mapsto t \ln M_t(x; \lambda)$ lồi trên $\mathbb{R}$,

Chứng minh: Xét hàm số sau

$$f(t) = t \ln M_t(x;\lambda) = \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^t\right), (t \in \mathbb{R}).$$

Do các hàm x_k^t là hàm lồi lôgarit nên theo Định lý 2.6. ta suy ra hàm $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^t$ cũng là hàm lồi lôgarit. Từ đây suy ra hàm $f(t)$ cũng là hàm lồi trên ℝ.

Sau đây là một số ứng dụng trong hình học của hàm lồi lôgarit.

3.2. Một số ứng dụng trong hình học

Bài toán 3.2. a. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn đơn vị. Giả sử các cạnh của nó thoả mãn

$AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \geq 4.$

Chứng minh rằng $ABCD$ là một hình vuông.

b. Giả sử A, B, C là các góc của một tam giác (tính theo radian). Chứng minh rằng

$$\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Chứng minh: a. Gọi O là tâm của đường tròn đơn vị. Kí hiệu các góc ở tâm tương ứng với các cạnh của tứ giác:

$$\angle AOB = \alpha, \quad \angle BOC = \beta, \quad \angle COD = \gamma, \quad \angle DOA = \delta,$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi.$

Vì mỗi cạnh của tứ giác là một dây cung của đường tròn bán kính 1, nên ta có

$$AB = 2\sin\frac{\alpha}{2}, \quad BC = 2\sin\frac{\beta}{2}, \quad CD = 2\sin\frac{\gamma}{2}, \quad DA = 2\sin\frac{\delta}{2}.$$

Do đó

$$AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = 16\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2}.$$

Hàm $\sin x$ là hàm lõm lôgarit trên khoảng $(0, \pi)$ (theo Ví dụ 2.1.1). Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm lôgarit, ta được

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2} \leq \left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{8}\right)^4 = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^4 = \frac{1}{4}.$$

Suy ra

$$AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \leq 16 \cdot \frac{1}{4} = 4.$$

Kết hợp với giả thiết $AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\geq 4$, suy ra phải xảy ra dấu bằng trong các bất đẳng thức trên. Do đó

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{\pi}{2}.$$

Suy ra tứ giác $ABCD$ là một hình vuông.

b. Giả sử A, B, C là các góc (số đo bằng radian) của một tam giác, khi đó $A+B+C=\pi.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{A+B+C}{3}\geq\sqrt[3]{ABC}\Leftrightarrow ABC\leq\left(\frac{\pi}{3}\right)^3\Leftrightarrow\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC\leq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Áp dụng Định lý 2.4 ta có thể kiểm tra hàm sau

$$f(x)=\frac{x}{\sin x},$$

là hàm lồi lôgarit trên $(0,\pi)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi lôgarit, ta được

$$\frac{A}{\sin A}\frac{B}{\sin B}\frac{C}{\sin C}\geq\left(\frac{A+B+C}{3\sin\frac{A+B+C}{3}}\right)^3=\left(\frac{\pi}{3\sin(\pi/3)}\right)^3=\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^3.$$

Lấy nghịch đảo hai vế, suy ra

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{ABC}\leq\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3,$$

hay tương đương

$$\sin A\sin B\sin C\leq\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\sin A\sin B\sin C\leq\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 ABC\leq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

Sau đây ta sẽ tổng quát hoá Bài toán 3.2a cho trường hợp n-giác nội tiếp đường tròn đơn vị.

Bài toán 3.3. Cho đa giác lồi $A_1A_2\cdots A_n$ nội tiếp đường tròn đơn vị. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n} A_i A_{i+1} \le \left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^n,$$

với quy ước $A_{n+1} = A_1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi đa giác là đều.

Chứng minh: Gọi O là tâm của đường tròn đơn vị. Kí hiệu các góc ở tâm tương ứng với các cạnh của đa giác:

$$\angle A_i O A_{i+1} = \alpha_i \quad (i = 1,\ldots,n),$$

trong đó

$$\alpha_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi.$$

Vì mỗi cạnh của đa giác là một dây cung của đường tròn bán kính 1, nên ta có

$$A_i A_{i+1} = 2\sin\frac{\alpha_i}{2}.$$

Do đó,

$$\prod_{i=1}^{n} A_i A_{i+1} \le 2^n \prod_{i=1}^{n} \sin\frac{\alpha_i}{2}.(1)$$

1)

Xét hàm $f(x) = \sin x$, là hàm lõm lôgarit trên khoảng $(0,\pi)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm lôgarit với các số

$$x_i = \frac{\alpha_i}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi,$$

ta được

$$\prod_{i=1}^{n} \sin\frac{\alpha_i}{2} \le \left(\sin\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^n = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n.(2)$$

2)

Kết hợp (1) và (2), suy ra $\prod_{i=1}^{n} A_i A_{i+1} \le 2^n \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n = \left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$.

Dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức Jensen khi và chỉ khi

$$\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_2}{2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{2},$$

tức là

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Điều này tương đương với đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ là một đa giác đều.

Bài toán 3.4. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Chứng minh rằng

$$S_{\nabla ABC} \le \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2,$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.

Chứng minh: Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh đối diện với các góc A, B, C của tam giác.

Theo công thức diện tích theo bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có

$$S_{\nabla ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

Mặt khác, theo định lý sin, $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Thay vào công thức diện tích, suy ra

$$S_{\nabla ABC} = \frac{(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C)}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C \cdot \quad (1)$$

Xét hàm $f(x) = \sin x$, là hàm lõm lôgarit trên khoảng $(0,\pi)$. Vì $A + B + C = \pi$, áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm lôgarit, ta được

$$\sin A\sin B\sin C \le \left(\sin\frac{A+B+C}{3}\right)^3 = \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.(2) \cdot$$

Thay (2) vào (1), suy ra

$$S_{\nabla ABC} \le 2R^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$, tức là tam giác đều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Borwein J. M., Lewis A. S., (2010), *Convex analysis and nonlinear optumization. Theory and examples*, Springer Science and Business Media.

[2]. Ball K., (1988), *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in R*, Studia Math. 88, 69-84.

[3]. Lars Homander, (1994), *Notions of Convexity*, Birkhauser Boston.

[4]. Aczél, (1947), *The notion of mean values*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem 19, 83-86.

[5] Lin T. P., (1974), *The power mean and the logarithmic mean*, Amer. Math. Monthly 81, 879 - 883.

[6]. Fenchel W., (1951), *Convex cones, sets and functions (mimeographed lecture notes)*, Princeton University Press, Princeton.

[7]. David H. Armitage, Stephen J. Gardiner, (2001), *Classical Potential Theory*, Springer – Verlag London Ltd.

[8]. Hoàng Tụy, (2003), *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

SEVERAL RESULTS ON LOGARITHMIC CONVEX FUNCTIONS

Ngo Thi Thu Ba[1], Vo Thi Thanh Giang[1], Ngo Thi Nhu Y[1], Phan Huy Phuc[1], Nguyen Trong[1], Vi The Han[2]*

ABSTRACT

This paper investigates several fundamental properties of the logarithmic convex functions, including characteristic criteria, Jensen's inequality, and the convex cone structure of the set of logarithmic convex functions. On the basis of this investigation, the paper establishes some results on the convexity of weighted power mean quantities. At the same time, the study presents some applications in planar geometry, particularly those in polygons inscribed in circles. Results of the study demonstrate the important role of logarithmic convex functions in extending many familiar inequalities.

Keywords: *Convex function, logarithmic convex function, convex analysis, Jensen's inequality, power mean.*

[1]Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng;[2]Trường THCS-THPT Ngô Mây;

[*]Tác giả liên hệ: Ngô Thị Thu Ba, email: ngothithuba20052023@gmail.com.