Tạp chí điện tử
Khoa học và Công nghệ Giao thông
Trang website: https://jstt.vn/index.php/vn

Survey of the common conic beast of 2 pairs of conjunct virtual points - Part 1

Nguyen Van Tien
University of Transport Technology, 54 Trieu Khuc, Thanh Xuan, Ha Noi, Vietnam

Article info
Type of article:
Original research paper

DOI:
https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.4.56-66

*Corresponding author:
Email address:
bknguyenvantien@gmail.com

Received: 5/6/2024
Revised: 12/12/2024
Accepted: 20/12/2024

Abstract: Plane conic beams have 3 types: beams with 4 real points, beams with 2 real points and 2 imaginary points, conic beams with 2 pairs of conjugated virtual points. The article “Two flat conic beams share at least 2 real points in common, by the same author, has published in the journal of architectural science, number 47, 2023. As for the common cluster of 4 virtual points, surveyed in this article, the investigation also uses the synthesis method, algebraic and analytic implementations, done on the computer, and in my argument, it is done in the following way: cutting projections, projective transformations, but do not use analytical algebra. The drawings are also drawn using autolisp programming, written by themselves. The content of surveying plane conic beams with 2 pairs of virtual points is divided into parts. Part 1: apply the previous results of projective projection, and use part of the results of the oblique antipodal intersection transformation to establish the conics of the beam. Part 2 investigates the nominal transformation of the perpendicular antipodal intersection. special cases of plane conic beams with 2 pairs of conjugated virtual points.

Keywords: straight line-plane; conjugate virtual common point; common antipodal point; common antipodal line; co.2tp = conic to identify 2 tangent points.

Tạp chí điện tử
Khoa học và Công nghệ Giao thông
Trang website: https://jstt.vn/index.php/vn

Khảo sát chùm conic chung 2 cặp điểm ảo liên hợp - Phần 1

Nguyễn Văn Tiến
Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, 54 Triều Khúc, Thanh Xuân, Hà Nội

Thông tin bài viết
Dạng bài viết:
Bài báo nghiên cứu

DOI:
https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.4.56-66

***Tác giả liên hệ:**
Địa chỉ Email:
bknguyenvantien@gmail.com

Ngày nộp bài: 5/6/2024
Ngày nộp bài sửa: 12/12/2024
Ngày chấp nhận: 20/12/2024

Tóm tắt: Các chùm conic phẳng có 3 loại: chùm chung 4 điểm thực, chùm chung 2 điểm thực và 2 điểm ảo, chùm conic chung 2 cặp điểm ảo liên hợp. Hai chùm conic phẳng có chung ít nhất 2 điểm thực, đã được tác giả khảo sát và đăng tải trên tạp chí khoa học kiến trúc năm 2023, số 47. Còn chùm chung 4 điểm ảo, được khảo sát trong bài này Cách khảo sát cũng dùng phương pháp tổng hợp, các thực hiện đại số và giải tích, khi vẽ được thực hện trên máy tính, còn trong lập luận chứng minh, tôi theo cách chiếu cắt, biến đổi xạ ảnh, nhưng không dùng đại số giải tích, Các hình vẽ cũng vẽ theo lập trình autolisp, tự viết ra. Nội dung khảo sát chùm conic phẳng chung 2 cặp điểm ảo, được chia làm 2 phần. Phần 1: áp dụng những kết quả đã có từ trước của xạ ảnh, và sử dụng 1 phần kết quả biến đổi giao đối cực xiên để lập những conic của chùm. Phần 2 khảo sát theo danh nghĩa biến đổi giao đối cực vuông góc, và các trường hợp đặc biệt của chùm conic phẳng chung 2 cặp điểm ảo liên hợp.

Sự nghiên cứu này là cần thiết, vì nó mở ra khả năng dựng conic qua 3 điểm thực và 2 điểm ảo liên có nhiều áp dụng trong hình học, cuối bài có thể lấy 1 ví dụ khi lập mặt bậc hai qua 9 điểm độc lập.

Từ khóa: đường thẳng; mặt phẳng; điểm chung ảo liên hợp; điểm đối cực chung; đường thẳng đối cực chung – (conic. 2 điểm tiếp xúc) kí hiệu là co.2tp.

Phần 1. Dựng conic mới của chùm conic chung 4 điểm ảo.

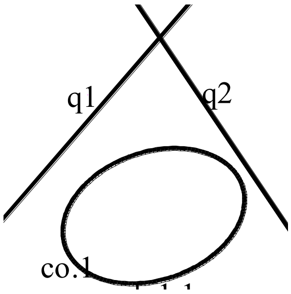
Mở đầu-Những phần nói sau đây, phải dùng nhiều lập luận trên hình vẽ chính xác, mỗi hình vẽ có hàng chục kí hiệu điểm đường thẳng, mong người đọc chú ý để hiểu hình vẽ.

Cho trên mặt phẳng pi, 1 elip co.1, và 2 đường thẳng q1-q2, cắt nhau ở K, mỗi đường thẳng nối 1 cặp điểm ảo liên hợp chung. Trong phần này, xét trường hợp điểm K là hữu hạn, do đó các cặp điểm ảo chung cũng là điểm hữu hạn.

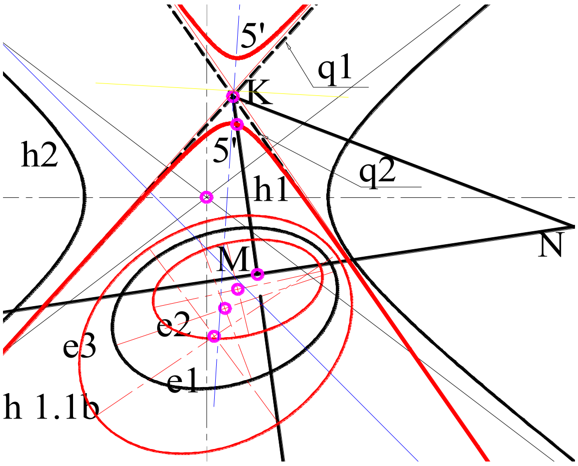
1. Khảo sát chùm conic có 2 cặp điểm ảo liên hợp, thuộc q1,q2 hữu hạn, cắt nhau

1.1. Tìm các cực chung, các đường thẳng đối cực chung

Ta gọi chùm cho bởi conic co.1 và 2 đường thẳng, q1,q2 không cắt co.1 theo điểm thực, là chùm 0, cần tìm 3 điểm đối cực chung K,M,N và 3 đường thẳng đối cực chung k,m,n… Theo tài liệu tham khảo [1], [2], từ conic co.1, và 2 đường thẳng q1, q2 hình 1.1a, Ta tìm trên hình 1.1b: giao điểm K= đường thẳng q1 x q2 là cực chung của chùm 0, Dĩ nhiên điểm K nằm ngoài co.1 (1.1a). Ta dựng được 2 tiếp tuyến với co.1, và tìm được đường thẳng đối cực k, cắt co.1, và 2 đường thẳng q1,q2 theo 2 cặp điểm không chia rẽ, và 2 hàng điểm đối hợp trên k có 2 điểm kép M,N.là 2 điểm đối cực chung , và cho 2 đường thẳng đối cực chung của chùm conic là đường thẳng m(KN), đường thẳng n(KM). Ta thấy rằng, mỗi đường thẳng bất kì cắt chùm 0, theo hai hàng điểm đối hợp, không chia rẽ. (1.1b)



Hình 1.1a. Cho chùm conic bởi 2 đường thẳng và co.1



Hình 1.1b. Vẽ được elip và hypecbol mới …

1.2. Lập conic mới…

Với chùm conic chung 4 điểm thực ABCD, thì cứ lấy 1 điểm thực thứ 5, là 1 điểm E của mặt phẳng pi(ABCD),thì xác định 1 conic của chùm ABCD. Với chùm 4 điểm ảo ABCD, thì phải xác định 5 điểm thực…

Theo tài liệu tham khảo [2] Course in projection geometry, trang 173, trong mặt phẳng, nếu có chùm conic ABCD, thì mọi đường thẳng l đi qua 1 điểm X, cắt chùm conic này theo hai hàng điểm đối hợp, trên mỗi dường thẳng đó, điểm X có 1 điểm tương ứng X’, thì tập hợp các điểm X,X’ làm thành 1 conic đi qua ABCD. (1.2a). Ta có hệ quả: mọi đường thẳng qua X, có điểm tương ứng Desargue X’, và đương thẳng đi qua X’, có điểm tương ứng X’’, thì tập hợp các điểm X,X’,X’’… cùng thuộc 1 conic của chùm (ABCD). (1.2b)

Hệ quả: khi một đường thẳng đi qua X, và 1 điểm đối cực chung ví dụ M, cắt đường thẳng đối cực m, ở M’, thì điểm Desargue X’ thoả mãn M M’ X X’=-1 (1.2c).

1.3. Lập trình để tìm nhanh kết quả trên hình vẽ

Tìm X’ chia điều hòa cùng X với A B.lsp; thì có tỉ số kép (ABXX’)=-1

(setq A (getpoint"cho 1 diem A cua duong conic:"))
(setq B (getpoint"cho 1 diem B cua duong conic:"))
(setq X (getpoint"cho diem C thang hang AB:"))
(setq E (polar C (+(angle A B)(/ pi 2)) -50))
(setq F (polar C (+(angle A B)(/ pi 2)) 25)) (setq P (inters A E B F nil))
(setq Q (inters A F B E nil)) (setq X’ (inters P Q A B nil))
(command "circle" X’ 4) (command "erase" "all" "" "redraw" "oops")
(close file) Theo lập trình này, ta có kết quả (1.3a)

Tìm điểm desargue lsp.

(setq A1 (getpoint"cho 1 diem A1 cua hang diem:"))
(setq A2 (getpoint"cho 1diem A2 cua hang diem:"))
(setq B1 (getpoint"cho 1 diem B1 cua hang diem:"))
(setq B2 (getpoint"cho 1diem B2 cua hang diem:"))
(setq X1 (getpoint"cho 1 diem X1 cua hang diem:"))
(setq TP (polar A1 0 20)) (setq T (polar TP (/ pi 2.) 20)) ;(command "circle" T 15) (setq A1P (polar T (+(angle T1 A1) (/ pi 2.)) 20))
(setq A1G (inters T A1P T1 A1 nil))
(setq A1c (polar T1 (angle T1 A1G) (* 2 (distance T1 A1G))))
;(command "circle" A1c 1)
(setq A2P (polar T (+(angle T1 A2) (/ pi 2.)) 20)) (setq A2G (inters T A2P T1 A2 nil)) (setq A2c (polar T1 (angle T1 A2G) (* 2 (distance T1 A2G))))
;(command "circle" A2c 1)
(setq B1P (polar T (+(angle T1 B1) (/ pi 2.)) 20)) (setq B1G (inters T B1P T1 B1 nil)) (setq B1c (polar T1 (angle T1 B1G) (*2 (distance T1 B1G))))
;(command "circle" B1c 1)
(setq B2P (polar T (+(angle T1 B2) (/ pi 2.)) 20))
(setq B2G (inters T B2P T1 B2 nil))
(setq B2c (polar T1 (angle T1 B2G) (* 2 (distance T1 B2G)))) ;(command "circle" B2c 1) (setq Fe (inters A1c A2c B1c B2c nil)); (command "circle" Fe

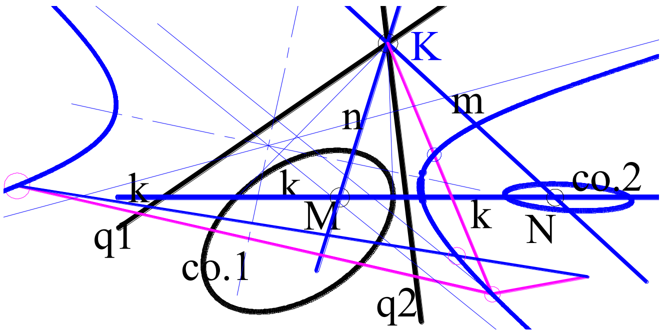
2)
```
(setq X1P (polar T (+(angle T1 X1) (/ pi 2.)) 20))
(setq X1G (inters T X1P T1 X1 nil))
(setq Y1c (polar T1 (angle T1 X1G) (* 2 (distance T1 X1G))))
;(command "circle" Y1c 1)
(setq Y1cP (polar T (+(angle Fe Y1c) (/ pi 2.)) 20))
(setq Y1cG (inters T Y1cP Fe Y1c nil))
(setq d3 (distance Y1CG Y1C))
(setq X1C (polar Y1CG (angle Fe Y1CG) d3)) Ư
(setq X2 (inters T1 X1C A1 A2 nil))
(command "circle" X2 10)
(command "erase" "all" "" "redraw" "oops")
(close file)
```

Theo lập trình này, từ 2 cặp điểm tương ứng, và 1 điểm X, trên đường thẳng Ω, trên hình vẽ cho ngay điểm tương ứng X'. (1.3b) Cũng lập trình cho trường hợp 1 đường thẳng Ω, cắt chùm conic theo hai hàng điểm đối hợp, thì từ điểm vô tận Ω* trên Ω, ta tìm được điểm tương ứng hữu hạn ΩI.(1.3c)

Từ đó suy ra nếu lấy 1 điểm E thuộc mặt phẳng chùm (4 điểm ảo ABCD),thì trên đường thẳng KE tìm được điểm E2, để KE cắt đường thẳng k ở điểm K', và (K K' E E2)=-1, tương tự đường thẳng M E cắt đường thẳng đối cực m ở M', và điểm E3 thoả mãn M M' E E3=-1, đường thẳng N E cắt đường thẳng n ở N', và điểm E4 sao cho (E-E4, N N')= -1, lấy thêm 1 điểm trên 1 đường thẳng l5 (E), cắt conic co.1, và 2 đường thẳng q1,q2 , theo 2 cặp điểm của 1 liên hệ đối hợp, ta tìm được điểm tương ứng của E là E5 . Theo tính chất (1.2a), 5 điểm này xác định 1 conic đi qua 4 điểm chung ảo ABCD của chùm conic đã cho: co.1 và 2 đường thẳng q1,q2. Trên hình 1.1c. Ta vẽ được conic co.2 đi qua E,E1,E2,E3,E5. Ví 4 điểm chung ABCD là ảo, trên 2 đường thẳng q1, q2, nên không trông thấy co.2 đi qua 4 điểm ảo này.

Có thể kiểm tra, như sau: Từ 1 điểm F1 bất kì trên đường thẳng q1 nối 2 điểm chung ảo A,B, dựng được 2 tiếp tuyến với co.1 là t11, t12; và 2 tiếp tuyến với co.2 là t21, t22, với 4 tiếp điểm là U11,U12; và U21, U22. Rõ ràng hai đường thẳng đối cực của F là đường thẳng U11-U12 và U21-U22 phải cắt nhau ở 1 điểm F2 trên đường thẳng q1. vì F1-F2 là 2 điểm chia điều hoà đoạn A-B (dù 2 điểm chung A,B là thực hay ảo). Trên hình 1.1c, điểm E lấy ở trong elip co.1, nên conic tìm được, chắc chắn là elip, ở trong elip co.1. Nhưng nếu lấy điểm E ở ngoài co.1, thì conic tìm được có thể là hypecbol, hay parabol, hoặc elip, không có gì khẳng định.

Còn khi lấy 1 điểm xa vô tận thuộc mặt phẳng (KMN), thì nói chung sẽ tìm được conic của chùm, là 1 hypecbol, có điểm xa vô tận thứ hai, chưa biết trước,chỉ vẽ xong hypecbol, mới xác định được…như trên hình 1.1c: bắt đầu vẽ 1 đường thẳng có phương E*, cắt co.1 và 2 đường thẳng q1,q2 theo 2 cặp điểm xác định 1 liên hệ đối hợp, tìm điểm tương ứng của điểm vô tận E*, là 1 điểm hữu hạn E2-Dựng 3 đường thẳng qua điểm E2 ,trên mỗi đường thẳng này, tìm được 1 điểm theo định lí Desargue 2,tức là có thêm 3 điểm hữu hạn E3.E4,E5 , ta dựng được conic qua 5 điểm E*,E2, E3,E4,E5 và trên conic này, có 1 điểm vô tận nữa là điểm F*, đó là 1 hypecbol. Dĩ nhiên trong số những điểm xa vô tận, sẽ có trường hợp cho parabol của chùm, nhưng không mò ra được điểm vô tận đó…



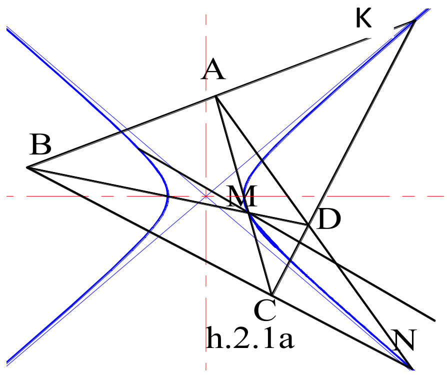
Hình 1.1c. Vẽ được elip, hypecbol của chùm

Dĩ nhiên, khi đã có tương đương 5 điểm thực xác định 1 conic phẳng, thì phải dùng lập trình, vẽ chính xác ra conic đó. Khi vẽ xong conic, ta cũng có luôn 2 trục, tâm, và 2 tiệm cận của hypecbol, ta cần nối, và làm 1 vài chỉnh sửa, nếu conic cần tìm là hypecbol, hay parabol, thì trong máy tính không có phần mềm để vẽ thay, và phải dùng đường đã vẽ để tìm tiếp kết quả khác, hay viết biểu thức giải tích…Vì thế, với hypecbol, cần vẽ với ít nhất 5000 điểm, để đạt chính xác, còn nếu là elip, thì có thể áp dụng vẽ lại theo tâm, trục, …

2. Áp dụng biến đổi giao đối cực

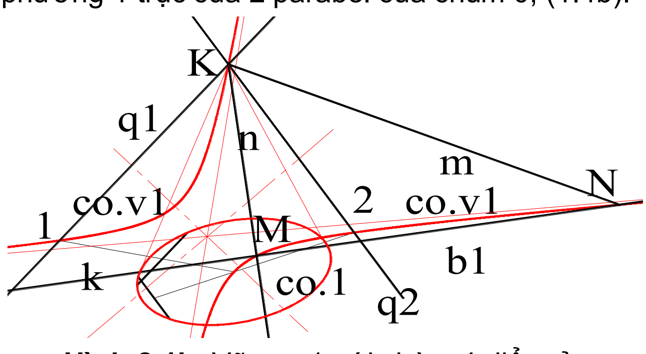
2.1. Áp dụng biến đổi giao đối cực, tìm co.v1

Cần áp dụng biến đổi giao đối cực , nếu chùm conic có chung 4 điểm thực ABCD- 3 cực chung K,M,N như trên hình 2.1a, ta vẽ được đường nối tâm là 1 hypecbol đi qua M,N,P và các trung điểm của 6 cạnh tứ giác toàn phần ABCD…nhánh nối tâm các hypecbol, nối 3 cực M,N,P và 3 trung điểm 3 cạnh AD, CD, AC và tâm các hypecbol của chùm; nhánh nối tâm các elip đi qua trung điểm 3 cạnh AB, BC, BD, và tâm các elip của chùm, (1.4a)



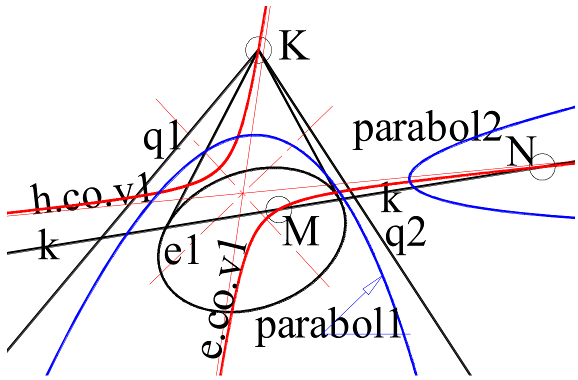
Hình 2.1a. Vẽ co.v1 của chùm 4 điểm thực

Với chùm conic chung 4 điểm ảo, và 3 cực chung M,N,P; với cơ sở biến đổi là chùm 0 gồm co.1 và 2 đường thẳng q1,q2 hình 2.1b, biến đổi đường thẳng xa vô tận trong mặt phẳng này, thành 1 conic co.v1, theo kết quả biến đổi giao đối cực, co.v1 là 1 hypecbol, nối tâm các conic của chùm conic: 1 nhánh nối tâm các elip của chùm 0, 1 nhánh nối tâm các hypecbol của chùm 0, hai tiệm cận của co.v1,kí hiệu là tc1,tc2, mỗi tiệm cận chỉ phương 1 trục của 2 parabol của chùm 0, (1.4b).



Hình 2.1b. Vẽ co.v1 với chùm 4 điểm ảo

Từ mỗi điểm vô tận theo phương 1 tiệm cận, ta tìm được 1 parabol của chùm 0, trên hình 2.1c, ta dựng được parabol 1, parabol 2; tương ứng phương tiệm cận 1, tiệm cận 2 của conic nối tâm. Để dựng được mỗi parabol này: ta làm tương tự như bài toán trên hình 2.1c: dựng 1 đường thẳng // với điểm xa vô tận “tc1”, đường thẳng này cắt chùm 0, cho hai hàng điểm đối hợp, điểm tương ứng với điểm vô tận “tc1” là E2. Qua E2, dựng 3 đường thẳng có vị trí bất kì, tìm được 3 điểm tương ứng là E3, E4, E5 và ta dựng được 1 conic đi qua 5 điểm: E2, E3, E4, E5 và điểm vô tận “tc1”, là 1 parabol của chùm 0. Làm tương tự với điểm vô tận “tc2”, ta dựng được parabol thứ hai của chùm 0, như trên hình 2.1c. Rút ra qui tắc sau: qua 1 điểm hữu hạn bất kì thuộc 1 trong 2 parabol, hay 1 trong 2 điểm vô tận “tc1”, “tc2”, thì dựng được 1 đường parabol của chùm 0. (1.5a)



Hình 2.1c. Vẽ được 2 parabol của chùm

Qua 1 điểm hữu hạn ở trong 1 parabol, thì dựng được 1 elip của chùm. (1.5b)

Qua 1 điểm hữu hạn trên mặt phẳng chùm 0, và ở ngoài parabol, thì dựng được 1 hypecbol của chùm. (1.5c).

Ta nhận thấy cũng có 2 nhóm hypecbol. Nếu 2 đường thẳng q1, q2 không vuông góc nhau, thì 4 nửa đường thẳng q11, q12, q21, q22 tạo ra 2 cặp góc đối đỉnh. Một cặp góc nhọn, chứa vô số hypecbol nhọn, ở trong là 1 parabol 1, trong cùng là 1 nhóm elip. (1.5d).

Một cặp góc tù, ví dụ q11-P-q22 và q21 P q12, chứa 1 nhóm “hypecbol tù” và hypecbol vuông, trong là parabol 2, trong cùng là 1 nhóm elip 2. (1.5e).

Nhận xét: Việc lập được 2 parabol đã giúp cho có thể lấy điểm hữu hạn ở đâu, trên mặt phẳng chùm 0, thì cho elip, cho parabol, cho hypecbol. (1.5f)

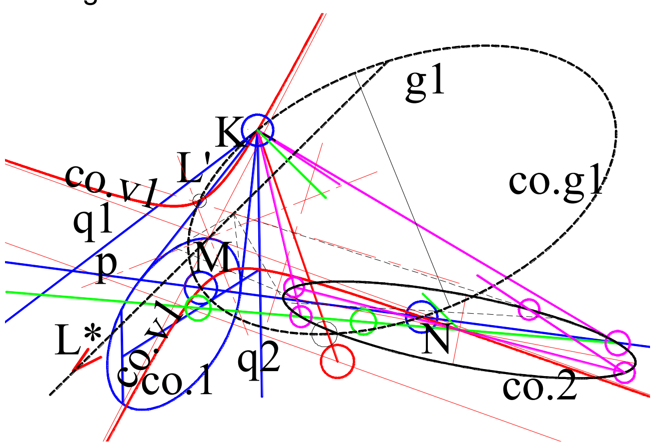
Giúp cho khi lấy 1 điểm vô tận J* nếu qua K, vẽ đường thẳng K J*, thì đường thẳng K J* này nằm trong góc đối đỉnh nào trong kết quả 1.5d, hay 1.5e thì tương ứng cho loại hypecbol đó.

2.2. Trường hợp chỉ cho 2 conic không cắt nhau theo điểm thực

2.2.1.Tìm 3 cực chung của chùm; Chùm cho 2 elip co.1, co.2 chưa có 1 cực chung nào, và 2 cặp điểm ảo cũng chưa xác định được đường thẳng thực q1,q2…như trên hình 2.2a.Nếu dùng đại số và giải tích, cần lập phương trình 2 conic, rồi giải phương trình, tìm 2 cặp điểm chung ảo, từ đó viết phương trình đường thẳng nối mỗi cặp điểm ảo liên hợp đó, Nhưng ở đây, tôi dùng biến đổi giao đối cực, thay cho việc dùng đại số, như sau. Ta lập 1 biến đổi giao đối cực: với chùm conic cơ sở là 2 elip đã cho. Đầu tiên lấy đường thẳng vô tận v, tìm ảnh giao đối cực của v với 2 conic cơ sở, được conic co.v1. Rồi lấy 1 đường thẳng g1 (nên lấy g1 không cắt co.v1), đường thẳng g1 có điểm vô tận J*, J* có ảnh là điểm hữu hạn J thuộc co.v1.

Hình 2.2a. 2 conic chỉ có điểm chung ảo

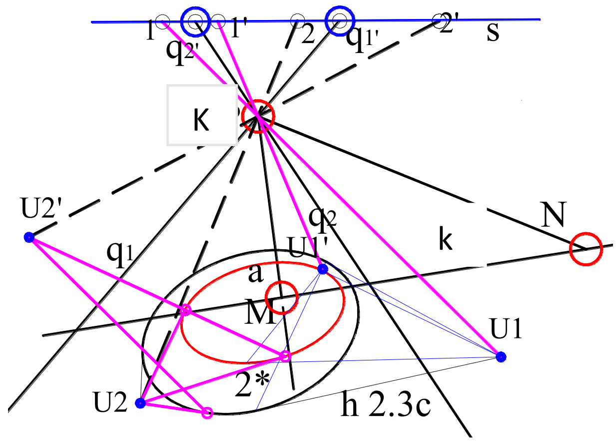
Tìm ảnh 4 điểm nữa thuộc g1, vẽ co.g1 đi qua K và 4 điểm đó, như trên hình 2.2b. Hai conic co.v1, và co.g1 cùng đi qua 3 cực chung của chùm 0, và có điểm chung L', ta kí hiệu 3 điểm chung là K-ở ngoài co.1, co.2; và điểm M ở trong co.1, điểm N trong co.2…



Hình 2.2b. Tìm 3 cực chung, và 2 đường thẳng q1,q2

Kiểm tra sự chính xác của kết quả: Từ điểm K ở ngoài 2 conic co.1, co.2, ta vẽ được 4 tiếp tuyến có 4 tiếp điểm, thì 4 tiếp điểm này, và 2 điểm M,N là 6 điểm phải thẳng hàng. (2.3a) Cũng tương tự, có thể kiểm tra sự thẳng hàng của 6 điểm trên đường thẳng KM từ điểm N…(2.3b)

Trên co.v1, nhánh nối tâm các elip của chùm thì đi qua tâm elip co.1,elip co.2. Vì vậy, 2 đường thẳng nối 2 cặp điểm ảo chung, phải đi qua K.(2.3c)Theo kết quả biến đổi giao đối cực, trong tài liệu [3], một đường thẳng đi qua cực chung K, thì có ảnh giao đối cực là 2 đường thẳng: 1 đường thẳng cũng đi qua K, và 1 đường thẳng là đường thẳng đối cực k. Nếu chỉ lấy đường thẳng đi qua K, thì mỗi đường thẳng đi qua K, có ảnh là 1 đường thẳng đi qua K, tạo thành hai chùm đường thẳng đối hợp, (tâm K), có 2 tia kép là 2 đường thẳng , mỗi đường thẳng chứa 1 cặp điểm chung của chùm: tức là K-q1,K-q2.



Hình 2.2c. Tìm 2 tia kép K q1, K q2, của chùm K(U1-U1', U2-U2')

Trên hình 2.2c, ta lấy điểm U1,U2… tìm ảnh giao đối cực với chùm 0 là điểm U1', U2'; và ta có 2 chùm đường thẳng đối hợp K (U1-U1', U2-U2'). Vẽ 1 đường s tuỳ ý, cắt chùm theo hai hàng điểm 1-1', 2-2'…Trên đường thẳng s, tìm được 2 điểm kép q1', q2'. Nối đường thẳng K-q1', K-q2' ta được hai đường thẳng chứa 2 cặp điểm chung ảo của chùm 0: q1, q2. Khi đã tìm được 2 đường thẳng q1, q2, mỗi đường chứa 1 cặp điểm chung ảo của 2 conic. Ta cũng có thể kiểm nghiệm xem có đúng là mỗi đường, nối 2 điểm chung ảo liên hợp của chùm 0, như đã làm ở mục trên. Trường hợp nếu cho 2 conic co.1, co.2 ở ngoài nhau, và không cắt nhau theo điểm thực, ta cũng tìm được tương tự, Khi đó điểm K ở ngoài cả 2 conic, điểm M, điểm N mỗi điểm ở trong 1 conic, nếu 2 conic ở ngoài nhau.

Theo kết quả biến đổi giao đối cực tham khảo [4], ảnh mỗi đường thẳng là 1 conic đi qua 3 cực chung K,M,N, của chùm 0, và ảnh điểm chung E là điểm E'.

Kiểm nghiệm cực K: chọn trong 3 cực, 1 cực K ở ngoài cả 2 conic co.a1, co.a2. Vẽ qua K, 4 tiếp tuyến với 2 elip, thì 4 tiếp điểm, và 2 điểm M,N là 6 điểm phải cùng thuộc 1 đường thẳng là k, .(2.3)

Kiểm nghiệm đường thẳng chứa cặp điểm chung ảo của 2 conic co.1, co.2:

Một đường thẳng nối 2 điểm chung là 2 điểm thực, thì trông thấy rõ ràng, không cần kiểm tra gì nữa. Nhưng 1 đường thẳng nối 2 điểm chung ảo, không trông thấy, thì có cách kiểm tra, để xác nhận đúng là 2 conic có chung 2 điểm ảo trên 1 đường thẳng đó.

Một đường thẳng nối 2 điểm chung khác nhau của 2 conic, thì mỗi điểm bất kì thuộc đường thẳng với cả 2 conic, chỉ có 1 điểm liên hợp chung. Nên có thể lấy 1 điểm W bất kì thuộc q1, vẽ 2 đường thẳng đối cực của W với co.1, co.2, 2 đường thẳng này, đã cắt nhau ở 1 điểm thuộc đường thẳng q1. Dĩ nhiên 1 đường thẳng nối 2 điểm chung là điểm thực khác nhau, thì cũng có tính chất này. Khi 2 conic co.1, co.2 đã tìm được 2 cặp điểm chung ảo, thì làm như hình 1.1a.

Việc tìm ra vị trí chính xác của 2 parabol, của chùm, đúng với tất cả hai chùm conic có chung 1 cặp điểm thực, hay cả 2 cặp điểm thực.

Khi lấy 1 điểm hữu hạn, tìm được thêm 4 điểm thực nữa, từ 5 điểm có thể định dạng được conic này, không cần vẽ ra: lấy 3 điểm hữu hạn trong 5 điểm đó, lập 1 cơ sở biến đổi vuông góc xem tài liệu [5], khi đó tìm ảnh 2 điểm còn lại ta có thể tìm góc định dạng, phương của trục, và tâm của conic…Nhưng nội dung vừa nêu, là tìm được các thông số 1 conic đã có 5 điểm thực, không phải là chọn. Ví dụ Cho chùm conic như hình 1.1a, hãy tìm 1 elip có góc đồng dạng max?

Trong khi, với một chùm conic có chung 4 điểm thực, thì áp dụng được biến đổi giao đối cực vuông góc, có thể chọn 1 conic của chùm theo 1 số yêu cầu, như: tâm, phương trục, góc định dạng… Vậy có cách nào để 1 chùm conic chung 2 cặp điểm ảo, cũng thực hiện chọn ngay từ đầu, để xác định 1 conic theo các yêu cầu có thể như các chùm conic dùng biến đổi giao đối cực vuông góc.

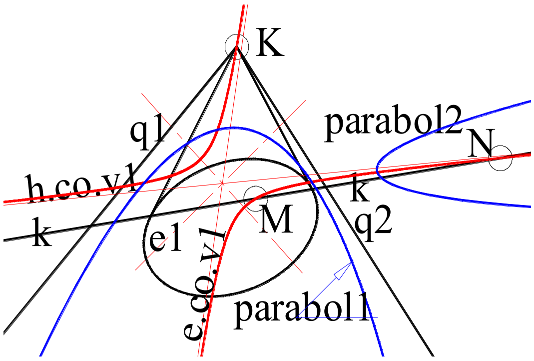
2.3. Vẽ conic mới theo tâm conic

a/Ở mục 2.1, ta đã vẽ được đường nối tâm các conic trong chùm 1. Các điểm thuộc nhánh nối tâm các hypecbol của chùm, trong đó chỉ có 1 cặp 2 đường thẳng thực b1, b2, nó cũng xác định 1 hypecbol của chùm.

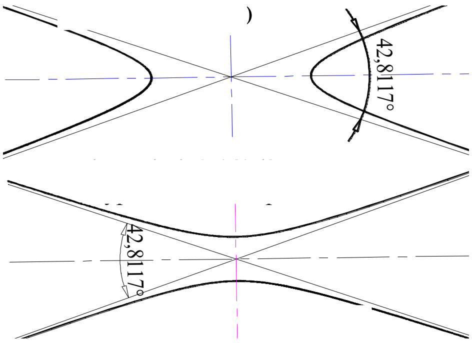
b/ Một đường thẳng bất kì cắt chùm conic 0, bao giờ cũng cho các cặp điểm không chia rẽ nhau, vì các conic trong chùm 0, chỉ chứa nhau, hay ở ngoài nhau. Do đó liên hệ đối hợp này, bao giờ cũng có 2 điểm kép thực. Mỗi đường thẳng Ω đi qua 1 điểm là tâm Ci của 1 conic của chùm 0, thì tạo ra các cặp điểm của 1 liên hệ đối hợp, nhận tâm Ci và điểm vô tận Ω* là 2 điểm kép, mà trong đó có 2 mút của đường kính trên Ω, là 1 cặp điểm của liên hệ đối hợp này. Ta chứng minh được 1 số kết quả sau.

c/ Mỗi điểm thuộc nhánh tâm hypecbol, là tâm 1 hypecbol thực. xem hình 2.3a.

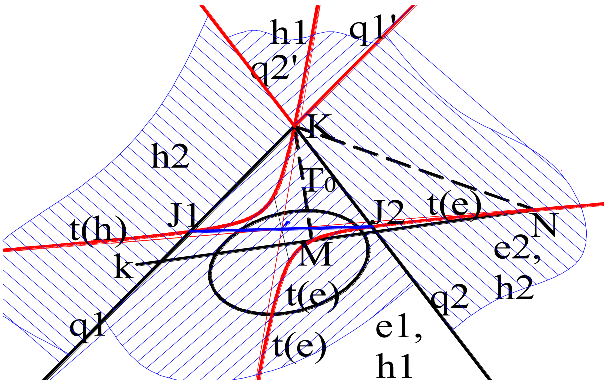
Với hypecbol, theo sơ đồ điểm và parabol: mỗi điểm của 1 hypecbol, bao giờ cũng ở ngoài parabol, từ 1 tâm hypecbol, H1, bao giờ cũng ở ngoài parabol 2 (ở bên phải). Ta vẽ được tiếp tuyến H1-21, điểm 21 là tiếp xúc parabol 2. Đường tiếp tuyến này cắt 2 đường thẳng q1,q2 , ta xác định được điểm tiếp xúc thứ 2 là điểm 22 , trên đường thẳng H1-21. Liên hệ đối hợp 1 có 2 điểm kép là 21-22. Hai đầu mút đường kính của hypecbol 1, thì chia điều hoà hai điểm kép H1 và điểm vô tận trên H1-21, là của 1 liên hệ đối hợp thứ hai. Theo định lí hình học xạ ảnh: Hai liên hệ đối hợp trên cùng 1 đường thẳng giá, nếu có 2 cặp điểm kép không chia rẽ nhau, thì có cặp điểm chung, tức là đường kính của hypecbol trên đường thẳng H1-21 là có 2 đầu mút thực, tức là hypecbol tâm H1 là 1 hypecbol thực. Suy ra: mục nhỏ 2.3.c, đã được chứng minh. Trên nhánh nối tâm đi qua cực K ở ngoài cả hai parabol của chùm, còn có điểm K, là giao điểm hai đường thẳng thực của chùm cũng được coi là 1 hypecbol suy biến, vì có 2 điểm vô tận thực.



Hình 2.3a. Vẽ được 2 parabol của chùm



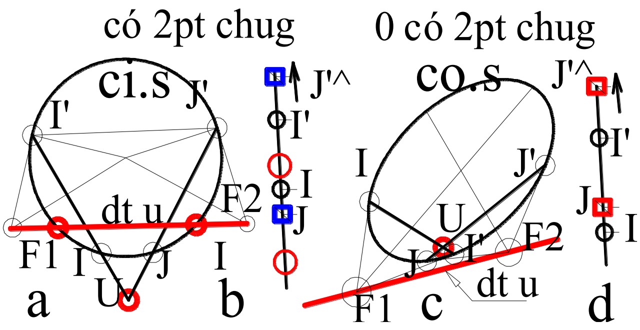
Hình 2.3b. Hai hypecbol liên hợp



Hình 2.3c. Trong góc nhọn, các hypecbol (nhọn) h1 trong góc tù, các hypecbol h2 là hypecbol tù

Khi chạy lập trình vẽ đường conic co.v1, ngay cả "máy tính" cũng nối giao điểm 2 đường thẳng q1. q2 vào nhánh tâm các hypecbol, thừa nhận giao điểm K là "tâm" của conic là cặp đường thẳng "q1 và q2". Nếu xác định hai đường thẳng tiệm cận chỉ ở ngoài các điểm của hypecbol, thì có hypecbol nhọn, và hypecbol tù như trên hình 2.3b, được phân loại theo hình giải tích: gọi là hai hypecbol liên hợp, cùng có góc 2 tiệm cận là góc nhọn hay =90° (không có góc tù). Theo hình 2.3c, trong góc nhọn q1-K-q2, là các hypecbol nhọn, vì ở trong góc nhọn): còn trong góc tù q2'-K-q1', là các hypecbol tù, tức là các hypecbol liên hợp, dĩ nhiên hypecbol vuông cũng nằm trong góc tù này. Nhưng tới đây, ta chưa thể tìm được hypecbol vuông trong chùm này.

d/ Trên nhánh nối tâm các elip của chùm 0:



Hình 2.3d. Hai liên hệ đối hợp không chia rẽ cùng trên 1 đường thẳng, có hay 0 có 2 điểm chung

Phải nói chính xác là nhánh nối tâm các conic có điểm vô tận ảo của chùm conic 0. Lấy bất kì điểm Ei nào thuộc nhánh này, và không thuộc cung [M N], thì điểm đó là tâm 1 elip thực, tức là mỗi đường thẳng bất kì qua Ei, đều cắt conic tâm Ei, ở 2 điểm thực. Ví dụ điểm E1 là tâm co.1, thì ở ngoài parabol 2. Ta cũng lập luận như điểm c, thì chứng minh được đường thẳng tiếp tuyến với parabol 2, có 2 liên hệ đối hợp cùng giá, và 2 cặp điểm kép, không chia rẽ nhau, nên có 1 cặp điểm chung thực, tức là 1 đường kính của 1 elip thực, tâm E1. Xem hình 2.3d.

e/ Nếu lấy M, thì rõ ràng M là giao điểm của 2 đường thẳng ảo liên hợp của chùm 0, không phải là tâm 1 elip không suy biến, mà coi là tâm cặp đường thẳng ảo liên hợp của chùm 0. Điểm N cũng có vai trò tương tự.

f/ Các điểm thuộc cung cong (MN), nếu lấy mỗi điểm thực Ei thuộc cung cong (MN) trên co.v1, bao giờ từ Ei cũng ở ngoài ít nhất 1 trong 2 parabol,nên ta vẽ được qua Ei, tiếp tuyến với 1 parabol… Có 2 liên hệ đối hợp, trên 1 đường thẳng tiếp tuyến đó, Nhưng 2 cặp điểm kép của 2 liên hệ đối hợp, thì chia rẽ nhau, vì điểm Ei ở trong đoạn 21-22 là 2 điểm kép của liên hệ đối hợp 1, nên 2 điểm Ei và điểm vô tận trên E không có cặp điểm chung , là 2 điểm thực, tức là mỗi elip này, chỉ là 1 elip ảo.

d/Với 1 elip thực: thì bao giờ 1 đường thẳng qua tâm cũng cắt elip theo 2 điểm thực phân biệt, nhận tâm là trung điểm. Cơ sở để chứng minh, là tìm cặp điểm chung của 2 liên hệ đối hợp, đã được rút ra theo kết quả xạ ảnh: Hai liên hệ đối hợp trên 1 đường thẳng giá s. Nếu có 1 liên hệ đối hợp eliptic, thì luôn có 1 cặp điểm chung, nếu cả hai cùng là hypecbolic, thì hai cặp điểm kép không chia nhau, sẽ có 1 cặp điểm chung, hai cặp điểm kép chia rẽ nhau, thì không có cặp điểm chung (xem hình 2.3d).

Ta chứng minh được các điểm của cung (M N) đều là tâm mỗi elip ảo, Riêng điểm M, hay N, là giao điểm của 2 đường thẳng ảo liên hợp, cũng là tâm của conic suy biến thành 2 đường thẳng. Mỗi điểm ở trong cung MN, đều: thỏa mãn mọi đường thẳng đi qua điểm Ei đó, tạo ra 2 liên hệ đối hợp cùng giá, có 2 cặp điểm kép chia rẽ nhau, nên không có cặp điểm chung là 2 điểm thực. Nên mỗi conic đó, là 1 elip ảo.

Mỗi điểm còn lại trên nhánh nối tâm các elip (chứa MN) cua đường nối tâm co.v1 và không thuộc cung nhỏ MN nói trên, đều là tâm 1 elip thực của chùm conic chung 4 điểm ảo đã cho . Vì một đường thẳng Ω bất kì đi qua tâm Ei của 1 elip i của chùm, cắt elip theo 2 điểm thực có Ei là trung điểm, xác định 1 liên hệ đối hợp trên Ω, có 2 điểm kép là Ei và điểm vô tận Ω* trên Ω. Đường thẳng Ω, cắt chùm 0 (q1,q2 và 2 điểm của 1 conic ví dụ co.a của chùm, theo 2 cặp điểm không chia rẽ, bao giờ cũng có 2 điểm kép thực, ví dụ là W1, W2. Theo kết quả của, trang 63 tài liệu [1], …nếu w1-w2, và Ei - Ω* không chia rẽ thì có cặp điểm chung, là 2 điểm thực, là mút 1 đường kính của elip...

g. Áp dụng kết quả trên: Ví dụ Ei là tâm 1 elip lấy trên nhánh nối tâm elip của co.v1. vẽ 1 đường thẳng Ω bất kì qua Ei, Ω cát co.1, và q1,q2 theo 2 cặp điểm : 11-11', 12-12' đối hợp không chia rẽ. Cho ta hai điểm kép L-L', và 2 điểm mút của 1 đường kính elip, là F-F' chia điều hòa điểm Ei và điểm Ω* là điểm vô tận trên Ω. Ta cần tìm cặp điểm chung của 2 liên hệ đối hợp này. Nếu Ei không thuộc cung M-N, thì tìm được 2 điểm F,F' trên Ω, của elip co.ei , từ đó tìm thêm các điểm của elip tâm Ei, ta dựng được co.ei.

2.4. Tìm hai điểm tiếp xúc của conic trên đường thẳng đối cực chung k

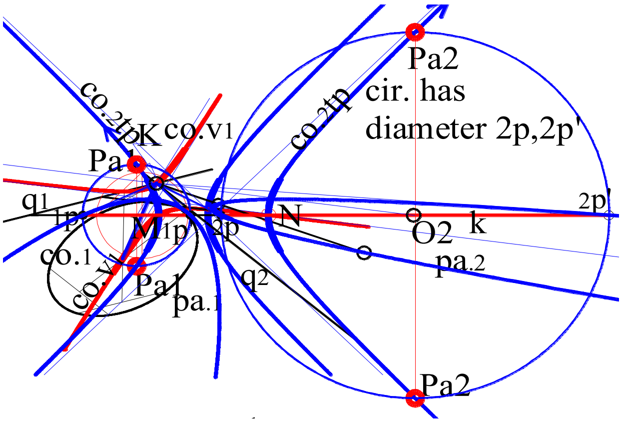
Việc làm trong mục 2.4, tuy đơn dản, nhưng ta còn có cách để làm nhanh hơn, và cho mọi conic của chùm khi đã có tâm conic.

1/ Trên đường thẳng đối cực k của cực chung K= q1 x q2, mỗi conic của chùm đều có 2 tiếp tuyến với 2 điểm tiếp xúc thực, trên 2 đường thẳng tiếp tuyến qua K. Các cặp điểm này, tạo ra 2 hàng điểm đối hợp nhận M,N là 2 điểm kép. Ta có thể lập 1 conic bằng cách chiếu hai cặp điểm này , theo 2 phương ± 45 °, so với đường thẳng k thì từ hai hàng điểm đối hợp này, ta dựng được 1 hypecbol vuông, có 1 trục là k, hai đỉnh là M,N…Mỗi cặp điểm đối hợp, được chuyển lên thành 1 điểm của hypecbol vuông này, ta kí hiệu hypecbol vuông này, là conic để xác định 2 điểm tiếp xúc (2 tangent points) của mỗi conic của chùm, trên đường thẳng k, viết tắt co.2 t,p.

Vì hai hàng điểm xạ ảnh này, là đối hợp không chia rẽ, nên ảnh 2 chùm đường thẳng trên cho ta 1 hypecbol vuông, nhận 2 điểm kép M,N là 2 đỉnh và 1 trục là đường MN, Mỗi điểm thuộc đường thẳng k(MN)., là 1 trung điểm của cạnh đáy tam giác vuông cân, có 2 đầu mút là 2 điểm tiếp điểm của conic của chùm, với tiếp tuyến đi qua K.

2/ Mỗi đường thẳng nối K với tâm conic Cj thuộc co.v1, cắt đường thẳng k ở 1 điểm Cjk, điểm Cjk là trung điểm của đoạn nối 2 điểm tiếp xúc bên trái Lej và bên phải Rj, Theo cách lập co.2tp, trung điểm Cjl là hình chiếu vuông góc của 1 điểm thuộc co.2tp. có điểm Cjl, thì lấy trên k 2 đoạn = K-Cik, ta được 2 điểm tiếp xúc của cônic tâm Ci, với 2 tiếp tuyến K-Rj, K Lj. Vì đã biết tâm là Cj, nên lấy đối xứng qua tâm, được 1 điểm thứ 5 của co.gj.

3/ Các thao tác để vẽ parabol 2, trên hình 2.4. là: từ cực K, vẽ đường thẳng nối tâm parabol 2 là 1 đường thẳng song song với tiệm cận 2 của co.v1, cắt đường thẳng đối cực k ở điểm O2, Dóng đứng qua O2, cắt co.2tp ở điểm Hph (Hph là hypecbol bên phải)Vẽ đường tròn tâm O2, bán kính O2-Hph, cắt k ở 2 điểm 2p, 2p' là 2 điểm tiếp xúc với parabol 2 , của 2 tiếp tuyến qua K. Ta áp dụng điểm vô tận tiệm cận 2, tìm 1 điểm hữu hạn của parabol này,ta dựng được parabol 2 đi qua 2 điểm tiếp xúc, và 1 điểm hữu hạn, …Với 1 conic đã có tâm là 1 điểm Ci thuộc co.v1, ta cũng làm tương tự…Nối K-Ci, cắt k ở Ci', qua Ci', vẽ đường thẳng vuông góc k, cắt co.2tp ở điểm Ci''. vẽ đáy tam giác vuông cân đỉnh Ci'', giả sử là 2 điểm 1Ci, 2Ci. trên k. Vì tâm conic là điểm Ci trên co.v1, nên lấy được 1 điểm đối xứng qua tâm Ci , và ta vẽ được conic có tâm Ci, tiếp xúc 2 điểm trên k, đi qua 1 điểm hữu hạn …



Hình 2.4. Dùng co.2tp vẽ parabol, các conic …

4/ Trường hợp tâm elip lấy trong cung hypecbol co.v1 (MN), thì conic co.2tp không có điểm thực tương ứng, nên không có elip thực của chùm.

5/ Rõ ràng trên đường thẳng đối cực k có 2 đoạn chắn tương ứng 2 parabol, trong 2 đoạn chắn này, là 2 vùng elip, ngoài 2 đoạn chắn này là 2 vùng hypecbol.

Vì thế, dựng 1 đường tròn có đường kính là đoạn chăn 1 parabol bên trái, thì đường thẳng qua tâm đường tròn này, cắt co.2tp ở 2 điểm, từ hai điểm này, sang phía trái đương co.2tp là những điểm cho hypecbol của chùm. Phía bên phải cũng tương tự,

Có thể tìm hai conic của chùm, có đoạn chắn trên k, bằng nhau, Ví dụ elip co.1 ở bên trái, và elip co.1 ở bên phải, có đoạn chắn trên k bằng nhau, thì có góc định dạng khác.

Trên đường co.2tp có thể chỉ ra: đoạn chắn parabol 1 ở bên trái, trên k, từ trung điểm 1, xác định điểm Pa1' trên co.2tp, trên đoạn chắn parabol 2 ở bên phải, cũng tìm được điểm tương ứng thuộc co.2tp, là điểm Pa2'.

Tuy nhiên, vì chỉ dựng được conic theo tâm đã cho, nên khi dựng xong conic, mới xác định được độ lớn góc định dạng, phương của hai trục conic đó, …cho nên cần bổ xung một số cách để cho việc lựa chọn conic của chùm, cũng được đầy đủ như áp dụng biến đổi giao đối cực vuông góc thực sự, được nói kĩ trong bài báo khảo sát chùm conic chung ít nhất 2 điểm thực ….

Sự thay đổi vị trí các điểm trên đường conic co.2tp, đưa đến sự biến đổi tâm các conic khác nhau của chùm 4 điểm ảo, nhánh conic co.2tp đi từ điểm Pa1 qua đỉnh, sang điểm Pa2, cho tâm elip. 2 điểm Pa1, Pa2 cho 2 parabol, còn lại từ Pa1, Pa2 ra đền điểm xa vô tận, cho các điểm trên k, để vẽ hypecbol…

Kết luận phần 1. Trong bài này, mới chỉ khảo sát chùm có 3 cực chung hữu hạn K,M,N. Một loạt bài toán ở phạm vi trìu tượng, là khảo sát các conic chung 2 cặp điểm ảo liên hợp, đã chứng minh bằng cách dựng hình, và vẽ hình chính xác theo việc lập trình Autolisp trong autocad.

Lần đầu tiên, chỉ ra bằng động tác hình học

Tìm 3 điểm đối cực chung của 2 conic không có điểm chung là điểm thực, và tìm 2 đường thẳng thực, mỗi đường chứa 1 cặp điểm chung ảo của 2 conic.

Kiểm chứng lại xem 2 conic có đúng là chung 1 cặp điểm ảo liên hợp trên 1 đường thẳng thực q1, hay không: bằng cách: lấy 1 điểm F bất kì thuộc q1, dựng hai đường thẳng đối cực của F với 2 conic thực co.1, co.2 của chùm, phải cắt nhau ở 1 điểm F' thuộc q1. Các điều thu được cũng có thể phát biểu dưới dạng đại số, giải tích.

Lần đầu tiên, chỉ ra trong chùm conic phẳng, chung 2 cặp điểm ảo, có 1 tập hợp các elip ảo, có thể tìm tâm,…Những kết quả này, cũng chưa hề có trong hình học xạ ảnh.

Từ mỗi conic đã vẽ được từ chùm 0, áp dụng 1 số kết quả trong tài liệu tham khảo [5], có thể viết các phương trình Đề-cac, hay phương trình theo tiêu điểm, đường chuẩn…cho mỗi conic đó.

Phương pháp khảo sát chùm conic chung 4 điểm ảo trong bài này, không dùng giải tích, đại số, cũng có nhược điểm là phải dùng nhiều chữ kí hiệu trên hình vẽ để giải thích, khiến cho người không quen đọc hình vẽ, có thể nản lòng.

Tuy nhiên, sau phần này, còn 1 số vấn đề, ở chùm conic chung 2 cặp điểm ảo liên hợp, chưa có khả năng giải quyết, như: vẽ hypecbol vuông của chùm, tìm elip chính (elip có góc định dạng max) của chùm, tìm bất kì conic nào của chùm, theo định dạng cho trước, là: phương của trục, góc định dạng của conic, tìm conic đồng dạng…Các vấn đề này, được giải quyết trong phần 2.

Kết quả về chùm conic chung 2 cặp điểm ảo, được thể hiện trong chùm conic trên mặt phẳng xa vô tận V, cắt 1 chùm mặt bậc hai tạo nên từ 2 elipxoid, trong không gian 3D, Trong đó: mỗi elipxoid, cắt V theo 1 conic ảo, và mỗi hypecbo loid cắt V theo 1 conic thật…mặt paraboloid eliptic cắt V theo 1 cặp đường thẳng ảo liên hợp, mặt yên ngựa, cắt V theo 1 cặp đường thẳng thực…và nhờ chùm conic này, ta khảo sát được chùm mặt bậc hai đó. Tất cả các đường conic trong các hình vẽ bài này đều lấy trong kết quả tham khảo [6].

Tài liệu tham khảo

[1] N.C. Toàn. (1970). Hình học xạ ảnh. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] L. Kadison and M.T. Kromann. (1994). A Course in Projective Geometry. *Roskilde Universitet*.

[3] J.W. Young. (1930). Monograph on Projective Geometry. *The Mathematical Association of America*.

[4] N.V. Tiến (2023). Chùm conic phẳng có chung ít nhất 2 điểm thực. Tạp chí Khoa học Đại học Kiến trúc, số 47.

[5] Jean-Marie Monier. (1990). Tuyển tập hình học. Nhà xuất bản Dunod.

[6] N.V. Tiến (2024). Các bài toán về conic không dùng giải tích, đại số. *Tạp chí điện tử Khoa học và Công nghệ Giao thông*, 4(1), 27-35.